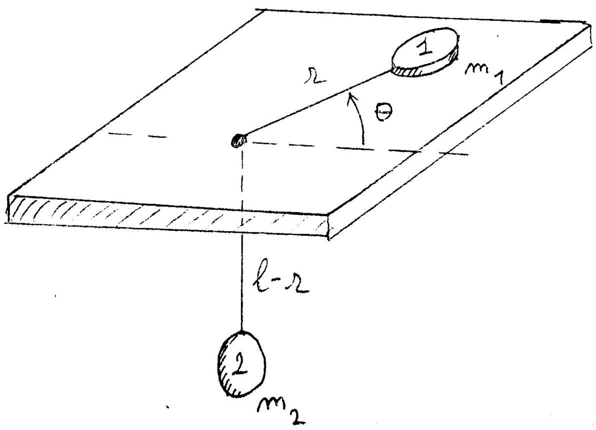
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2011-12
Examen Mécanique Analytique, Controle Continu, novembre 2011.

Durée 1h30. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses. **Encadrer les résultats demandés.**

1 Objet glissant sur une table attaché à une masse pesante

Un objet 1 de masse m_1 (un petit disque) est posé sur une table horizontale et glisse parfaitement (i.e. il n'y a pas de frottement). Il est attaché par une fil de longeur l fixe à un objet 2 de masse m_2. Le fil passe sans frottement par un trou de la table considéré comme ponctuel et la masse m_2 ne peut se déplacer que verticalement dans le champ de pesanteur g (pas de balancement). La diamètre de la table est supposé très grand.

On note r la longueur du fil qui est sur la table. On note θ la position angulaire de l'objet 1 ainsi (r, θ) sont les coordonnées polaires de l'objet 1 sur la table. Le but du problème est de décrire le mouvement $(r(t), \theta(t))$ de l'objet 1 sur la table étant donné un état initial (position-vitesse).



1. **(4)** Ecrire l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle U du système total 1-2 en fonction de r, θ, V_r, V_θ et m_1, m_2, l (avec $V_r = \frac{dr}{dt}, V_\theta = \frac{d\theta}{dt}$). Pour simplifier on choisira $U(r=0) = 0$.
2. **(2)** Déduire l'expression du Lagrangien $L(r, \theta, V_r, V_\theta)$, des impulsions p_r, p_θ et du Hamiltonien $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$.
3. **(2)** Ecrire les équations de mouvement de Hamilton qui expriment $\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{dp_r}{dt}, \frac{dp_\theta}{dt}$ (sans les résoudre).
4. **(2)** A partir des équations précédentes montrer que p_θ est une constante du mouvement notée $p_\theta = \mathcal{L}$. Déduire $\mathcal{L}$ à partir des conditions initiales $r(0), \frac{d\theta}{dt}(0)$.
5. **(2)** Déduire l'expression du Hamiltonien sous la forme

$$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2M} + V(r)$$

en fonction des variables radiales r, p_r seulement et des paramètres $m_1, m_2, \mathcal{L}$.

6. **(3)** Interpréter les différentes termes de $V(r)$ et le sens de la force. Tracer leur allure et tracer $V(r)$.
7. **(3)** Trouver le minimum r_0 et $V(r_0)$ de la fonction $V(r)$ si il existe. Discuter les différentes trajectoires possibles du mouvement $r(t)$ dans le potentiel $V(r)$ selon les conditions initiales (et l'énergie). Pour chacune de ces possibilités décrire la trajectoire $(r(t), \theta(t))$ de l'objet 1 sur la table.

2 Lagrangien d'une particule chargée

On a vu en cours que le Hamiltonien d'une particule de charge q soumise au potentiel électromagnétique $\vec{A}$ et U est

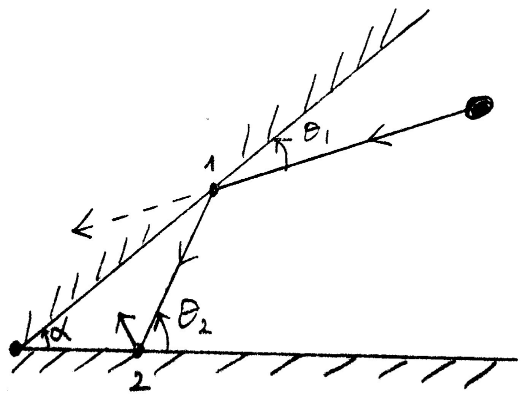
$$H\left(\vec{X}, \vec{P}, t\right) = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - q\vec{A}(\vec{X}, t)\right)^2 + qU(\vec{X}, t)$$

(3) Déduire l'expression du Lagrangien correspondant $L\left(\vec{X}, \vec{V}, t\right)$.

3 Dynamique d'une bille dans un billard formant un angle

Sur un plan horizontal, on considère une bille glissant parfaitement, considérée comme ponctuelle, venant de l'infini et arrivant dans un angle formé par des parois écartées d'un angle α. $(0 < \alpha < \pi)$.

On note θ_1 l'angle d'incidence de la bille avec le mur lors du premier rebond, θ_2 au deuxième rebond, etc.



1. **(2)** Exprimer[1] θ_2 à partir de θ_1 et α. Plus généralement θ_{n+1} à partir de θ_n et α.
2. **(2)** Déduire le nombre total N de rebonds que fait la bille en fonction de θ_1 et α. Application numérique : si $\alpha = 30^o$, $\theta_1 = 10^o$,$N = ?$

1. Aide : on peut utiliser la "méthode graphique des images", c'est à dire que à chaque rebond au lieu d'étudier la trajectoire qui est réfléchie, il faut considérer la trajectoire (en pointillées sur la figure) qui traverserait le mur en ligne droite. Il faut donc considérer les images des murs aux angles $2\alpha, 3\alpha$ etc. Faire un schéma de cette trajectoire en ligne droite et placer tous les points de rebond sur cette droite.