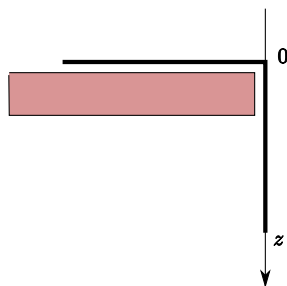


Examen durée 1h30.

Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses.

Exercice 1. Un ruban qui glisse. (sur 21)

On considère un ruban souple de longueur L et masse m uniformément répartie, posé à plat sur le bord d'une table. Une partie de longueur z du ruban pend verticalement sur le bord de la table. Les questions 6,7,8 peuvent se faire indépendamment.



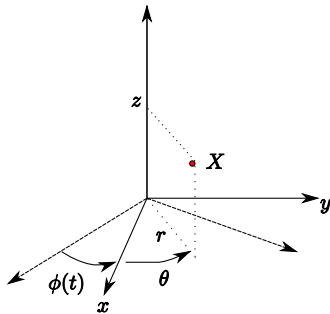
1. **(4)** On suppose que les frottements sont négligeables. Le ruban glisse. On note $z(t)$ la longueur qui pend à la date t . Écrire l'énergie cinétique E_c du ruban en fonction de m et \dot{z} et l'énergie potentielle $U(z)$ en fonction de m, g, L, z (aide : on pourra exprimer auparavant l'énergie dU d'un élément de hauteur dz . Préciser l'intervalle de z étudié).
2. **(1)** Dédire l'expression du Lagrangien $L(z, \dot{z})$ et l'expression de l'impulsion p_z associée.
3. **(2)** Dédire l'expression du Hamiltonien $H(z, p_z)$. Tracer l'allure des lignes de niveaux dans l'espace de phase (z, p_z) en précisant la région de l'espace de phase qui est pertinente.
4. **(3)** Donner l'expression du Hamiltonien et tracer les lignes de niveaux dans les autres régions de l'espace de phase.
5. **(2)** Écrire les équations de mouvement de Hamilton et trouver le facteur d'instabilité de Lyapounov λ en fonction de g, L .
6. **(4)** On suppose maintenant qu'il y a un frottement sur la table, c'est à dire que la force de réaction de la table est de la forme $\vec{R} = R_h + R_v$ avec R_h horizontale et

R_v , verticale. Lorsque le ruban est immobile sur la table et dépasse de z (voir figure) faire le bilan des forces agissant sur la partie horizontale puis sur la partie verticale. Dédire l'expression de R_h et R_v en fonction de m, g, z, L . Faire un schéma.

7. (2) La condition pour que le ruban reste immobile est $|R_h| < f |R_v|$ où f est une constante fixée (qui dépend des matériaux). Sinon le ruban glisse et $|R_h| = f |R_v|$. Si l'on pose initialement le ruban immobile, pour quelles valeurs de z le ruban reste immobile (résultat en fonction de f, L) ?
8. (3) Si le ruban glisse, écrire l'équation du mouvement de Newton pour la partie horizontale. Montrer que la force est conservative dérivant d'un potentiel que l'on tracera. Quel est le facteur d'instabilité $\lambda(f)$? Discuter.

Exercice 2. Lagrangien et Hamiltonien dans un référentiel tournant. (sur 6)

On considère une particule de masse m soumise à une force conservative décrite par une énergie potentielle $U(X)$. On souhaite décrire la dynamique de la particule dans un "référentiel tournant" (x, y, z) qui est tourné d'un angle $\phi(t)$ autour de l'axe z par rapport à un référentiel Galiléen. On notera $\Omega(t) = \frac{d\phi}{dt}$. Les coordonnées cylindriques d'un point X sont notées (r, θ, z) dans le référentiel tournant et $(r, \tilde{\theta}, z)$ dans le référentiel Galiléen.



1. (3) Quelle est l'expression de l'énergie cinétique E_c en fonction de $(\dot{r}, \dot{\tilde{\theta}}, \dot{z})$ puis en fonction de $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$. Dédire l'expression du Lagrangien $L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$.
2. (3) Donner les expressions des impulsions p_r, p_θ, p_z et du Hamiltonien $H(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z)$.