

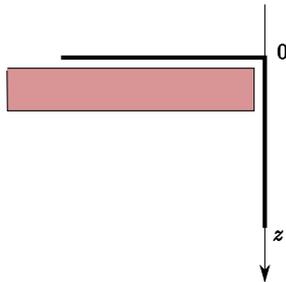
Examen durée 1h30.

---

**Documents interdits.** Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses.

**Exercice 1. Un ruban qui glisse. (sur 21)**

On considère un ruban souple de longueur  $L$  et masse  $m$  uniformément répartie, posé à plat sur le bord d'une table. Une partie de longueur  $z$  du ruban pend verticalement sur le bord de la table. Les questions 6,7,8 peuvent se faire indépendamment.



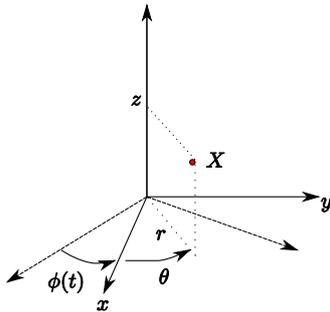
1. **(4)** On suppose que les frottements sont négligeables. Le ruban glisse. On note  $z(t)$  la longueur qui pend à la date  $t$ . Écrire l'énergie cinétique  $E_c$  du ruban en fonction de  $m$  et  $\dot{z}$  et l'énergie potentielle  $U(z)$  en fonction de  $m, g, L, z$  (aide : on pourra exprimer auparavant l'énergie  $dU$  d'un élément de hauteur  $dz$ . Préciser l'intervalle de  $z$  étudié).
2. **(1)** Déduire l'expression du Lagrangien  $L(z, \dot{z})$  et l'expression de l'impulsion  $p_z$  associée.
3. **(2)** Déduire l'expression du Hamiltonien  $H(z, p_z)$ . Tracer l'allure des lignes de niveaux dans l'espace de phase  $(z, p_z)$  en précisant la région de l'espace de phase qui est pertinente.
4. **(3)** Donner l'expression du Hamiltonien et tracer les lignes de niveaux dans les autres régions de l'espace de phase.
5. **(2)** Écrire les équations de mouvement de Hamilton et trouver le facteur d'instabilité de Lyapounov  $\lambda$  en fonction de  $g, L$ .
6. **(4)** On suppose maintenant qu'il y a un frottement sur la table, c'est à dire que la force de réaction de la table est de la forme  $\vec{R} = R_h + R_v$  avec  $R_h$  horizontale et

$R_v$ , verticale. Lorsque le ruban est immobile sur la table et dépasse de  $z$  (voir figure) faire le bilan des forces agissant sur la partie horizontale puis sur la partie verticale. Dédire l'expression de  $R_h$  et  $R_v$  en fonction de  $m, g, z, L$ . Faire un schéma.

7. (2) La condition pour que le ruban reste immobile est  $|R_h| < f |R_v|$  où  $f$  est une constante fixée (qui dépend des matériaux). Sinon le ruban glisse et  $|R_h| = f |R_v|$ . Si l'on pose initialement le ruban immobile, pour quelles valeurs de  $z$  le ruban reste immobile (résultat en fonction de  $f, L$ ) ?
8. (3) Si le ruban glisse, écrire l'équation du mouvement de Newton pour la partie horizontale. Montrer que la force est conservative dérivant d'un potentiel que l'on tracera. Quel est le facteur d'instabilité  $\lambda(f)$  ? Discuter.

### Exercice 2. Lagrangien et Hamiltonien dans un référentiel tournant. (sur 6)

On considère une particule de masse  $m$  soumise à une force conservative décrite par une énergie potentielle  $U(X)$ . On souhaite décrire la dynamique de la particule dans un "référentiel tournant"  $(x, y, z)$  qui est tourné d'un angle  $\phi(t)$  autour de l'axe  $z$  par rapport à un référentiel Galiléen. On notera  $\Omega(t) = \frac{d\phi}{dt}$ . Les coordonnées cylindriques d'un point  $X$  sont notées  $(r, \theta, z)$  dans le référentiel tournant et  $(r, \tilde{\theta}, z)$  dans le référentiel Galiléen.



1. (3) Quelle est l'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  en fonction de  $(\dot{r}, \dot{\tilde{\theta}}, \dot{z})$  puis en fonction de  $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$ . Dédire l'expression du Lagrangien  $L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$ .
2. (3) Donner les expressions des impulsions  $p_r, p_\theta, p_z$  et du Hamiltonien  $H(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z)$ .