Le problème à 3 corps restreint. Points de Lagrange

(1) $$L = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{X}}_1\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{X}}_2\right)^2 - U\left(|\vec{X}_1 - \vec{X}_2|\right)$$

or $\begin{cases} \vec{X}_2 = -\dfrac{m_1}{m_2} \vec{X}_1 \\ \vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1 \end{cases}$ donc $\vec{X}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2} \vec{X}$,

$$\vec{X}_2 = +\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{X}$$

alors

$$L = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\right]\left(\dot{\vec{X}}\right)^2 - U(|\vec{X}|)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\dot{\vec{X}}\right)^2 - U(|\vec{X}|) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

(2) On a vu au TD6 que $\tilde{U}(r) = -\dfrac{m_1 m_2 \mathcal{G}}{r} + \dfrac{\mu \mathcal{L}^2}{2r^2}$

avec $r = |\vec{X}|$ et $\mathcal{L} = r^2 \dot{\varphi}$

Le minimum de $\tilde{U}(r)$ donne une trajectoire avec $r(t) = \text{cste}$ donc circulaire.

On calcule : $$0 = \frac{d\tilde{U}}{dr} = \frac{m_1 m_2 \mathcal{G}}{r^2} - \frac{\mu \mathcal{L}^2}{r^3}$$

on pose $r = R$, et on a $\mathcal{L} = r^2\dot{\varphi} = R^2 \Omega$.

On obtient : $$\frac{m_1 m_2 \mathcal{G}}{R^2} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \frac{(R^2\Omega)^2}{R^3}$$

$$\Leftrightarrow \Omega^2 = \mathcal{G}\frac{(m_1+m_2)}{R^3}$$

③ On peut aussi choisir $m = 1$ car en gravitation, la trajectoire ne dépend pas de la masse de l'objet.

On a vu (examen mi parcours, voir corrigé) que en coordonnées polaires (r, θ), dans le réf tournant :

$$H(r, p_r, \theta, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - p_\theta + V$$

(ici $\Omega = 1$)

On passe en coordonnées cartésiennes par le changement canonique de variable :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \\ p_r = \frac{1}{r}\left(x\, p_x + y\, p_y\right) \\ p_\theta = x\, p_y - y\, p_x \end{cases}$$

(qui s'obtient par le calcul différentiel :

$$p = p_x\, dx + p_y\, dy = p_\theta\, d\theta + p_r\, dr \quad : \text{"forme différentielle"}$$
$$= p_x\left(dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta\right) + p_y\left(dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta\right)$$

et identifications)

- Très généralement pour un changement de variable sur $\mathbb{R}$:

$Y = f(X)$, si on pose $P \doteq P_X\, dX = P_Y\, dY$

alors $dY = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) dX$ $\qquad = \left(P_Y \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)\right) dX$

donc $P_Y = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^{-1} \cdot P_X$ obtenu par ↗

On peut vérifier que (Y, P_Y) sont des coordonnées canoniques :

$$\{Y, P_Y\} = \frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{\partial P_Y}{\partial P_X} - \underbrace{\frac{\partial Y}{\partial P_X}}_{= 0} \frac{\partial P_Y}{\partial X} = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^{-1} = 1.$$

de m en dimension quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

On obtient :

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \left(y\,p_x - x\,p_y\right) + V_1 + V_2$$

avec $V_1 = -\left(\frac{m\,m_1\,\mathcal{G}}{R_1}\right) = -m(m_1+m_2)\,\mathcal{G}\,\frac{(1-\nu)}{R_1}$

$$= -m\,R^3\Omega^2\,\frac{(1-\nu)}{R_1} = -\frac{(1-\nu)}{R_1}$$

car $1-\nu = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}$

et car $m=1$, $\Omega = 1$, $R=1$

de même $V_2 = -\left(\frac{m\,m_2\,\mathcal{G}}{R_2}\right) = -m(m_1+m_2)\,\mathcal{G}\,\frac{\nu}{R_2}$

$$= -\frac{\nu}{R_2}$$

$$R_1^2 = \left(\text{dist}(1,3)\right)^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x+\nu)^2 + y^2$$

car avec (x_1, y_1) : coord de l'objet 1 données d'après ① par :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}R = -\nu & (\text{car } R=1) \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

et $R_2^2 = \left(\text{dist}(2,3)\right)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = (x+\nu-1)^2 + y^2$

car avec $\begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}R = 1-\nu \\ y_2 = 0 \end{cases}$

(4) Equat° de mouvement :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y + (1-\nu)\,\partial_x\left(\frac{1}{R_1}\right) + \nu\,\partial_x\left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x + (1-\nu)\,\partial_y\left(\frac{1}{R_1}\right) + \nu\,\partial_y\left(\frac{1}{R_2}\right)$$

. La condition de point fixe $\dot{x}=0,\ \dot{p}_x=0,\ \dot{y}=0,\ \dot{p}_y=0$

donne $p_x = -y \ ,\ p_y = x$

donc

$$(*)\ \begin{cases} x = -(1-\nu)\,\partial_x\left(\frac{1}{R_1}\right) - \nu\,\partial_x\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ y = -(1-\nu)\,\partial_y\left(\frac{1}{R_1}\right) - \nu\,\partial_y\left(\frac{1}{R_2}\right) \end{cases}$$

or $R_1^2 = (x+\nu)^2 + y^2 \longrightarrow 2R_1(\partial_x R_1) = 2(x+\nu)$

$$\longrightarrow (\partial_x R_1) = \frac{x+\nu}{R_1}$$

$$\longrightarrow \partial_x\left(\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{(\partial_x R_1)}{R_1^2} = -\frac{(x+\nu)}{R_1^3}$$

de même on trouve $\partial_x\left(\frac{1}{R_2}\right) = -\frac{(x+\nu-1)}{R_2^3}$

$$\partial_y\left(\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{y}{R_1^3}\ ,\qquad \partial_y\left(\frac{1}{R_2}\right) = -\frac{y}{R_2^3}\ .$$

(*) donnent :

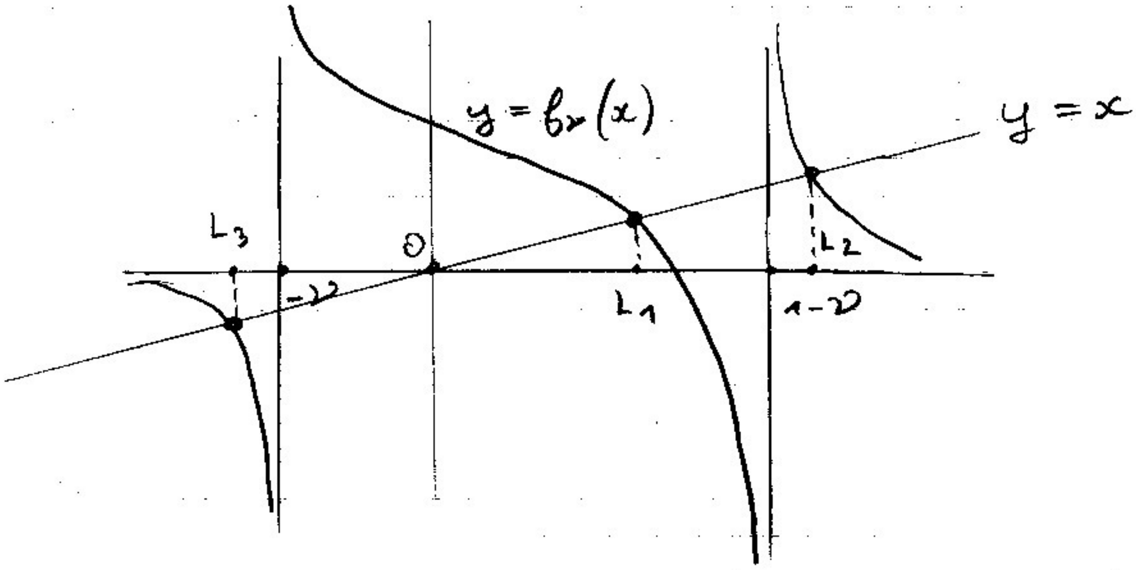
$$\begin{cases} x = (1-\nu)\,\frac{(x+\nu)}{R_1^3} + \nu\,\frac{(x+\nu-1)}{R_2^3} \\ y = (1-\nu)\,\frac{y}{R_1^3} + \nu\,\frac{y}{R_2^3} \end{cases}$$

5 Si $y = 0$ alors $\begin{cases} R_1 = |x+\nu| \\ R_2 = |x+\nu-1| \end{cases}$

et (*) devient :

$$x = f_\nu(x) \text{ avec } f_\nu(x) = \frac{(1-\nu)(x+\nu)}{|(x+\nu)|^3} + \frac{\nu(x+\nu-1)}{|x+\nu-1|^3}$$

D'après le graphe, il y a trois solutions :



6 Si $y \neq 0$, (*) donne :

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{(1-\nu)}{R_1^3} + \dfrac{\nu}{R_2^3} \longrightarrow \dfrac{(1-\nu)}{R_1^3} = 1 - \dfrac{\nu}{R_2^3} \\[2ex] x = (x+\nu)\left(1 - \dfrac{\nu}{R_2^3}\right) + \dfrac{\nu(x+\nu-1)}{R_2^3} \end{cases}$$

$$\longrightarrow R_2^3 x = (x+\nu)(R_2^3 - \nu) + \nu(x+\nu-1)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{R_2^3 x} = \cancel{x R_2^3} - \cancel{x\nu} + \nu R_2^3 - \cancel{\nu^2} + \cancel{\nu x} + \cancel{\nu^2} - \nu$$

$$\Longleftrightarrow R_2^3 = 1 \longrightarrow R_2 = 1 \longrightarrow R_1 = 1$$

or $\begin{cases} 1 = R_1^2 = (x+\nu)^2 + y^2 \\ 1 = R_2^2 = (x+\nu-1)^2 + y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \nu \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

⑦ Recherche de L_3 : on suppose $x < -\nu < 1-\nu$

donc $|x+\nu| = -x-\nu$ et $|x+\nu-1|^3 = -(x+\nu-1)$

donc $x = f_\nu(x) \Longleftrightarrow x = -\frac{(1-\nu)}{(x+\nu)^2} - \frac{\nu}{(x+\nu-1)^2}$

Si $\nu = 0$, alors $x = -\frac{1}{x^2} \rightarrow x = -1$.

Si $\nu \ll 1$, on pose $x = -1+\varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$

Au premier ordre

$$x = f_\nu(x) \Longleftrightarrow (-1+\varepsilon) = -\frac{(1-\nu)}{(-1+\varepsilon+\nu)^2} - \frac{\nu}{(-1+\varepsilon-\nu-1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow (-1+\varepsilon)(-1+\varepsilon+\nu)^2(-2+\varepsilon-\nu)^2 = -(1-\nu)(-2+\varepsilon-\nu)^2 - \nu(-1+\varepsilon+\nu)^2$$

$$\Longleftrightarrow 12\varepsilon + 5\nu = 0 \quad : \text{à l'ordre } 1$$

$$\rightarrow \boxed{x_{L_3} = -1 - \frac{5}{12}\nu + O(\nu^2)}$$

Recherche de L_1 on suppose $-\nu < x < 1-\nu$

il faut résoudre $x = f_\nu(x)$. On pose $x = 1+\varepsilon$

$$\Longleftrightarrow (+1+\varepsilon)(+1+\varepsilon+\nu)^2(\varepsilon-\nu)^2 = +(1-\nu)(\varepsilon-\nu)^2 - \nu(-1+\varepsilon+\nu)^2$$

$$\Longleftrightarrow 3\varepsilon^3 + \nu = 0 \quad \text{à l'ordre } 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x_{L_1} = 1 - \left(\frac{\nu}{3}\right)^{1/3}}$$

Recherche de L_2, de m̂ on pose $x = 1+\varepsilon$

on a $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon+\nu)^2(\varepsilon-\nu)^2 = (1-\nu)(\varepsilon-\nu)^2 + \nu(-1+\varepsilon+\nu)^2$

$$\Longleftrightarrow 3\varepsilon^3 - \nu = 0, \text{ à l'ordre } 1$$

$$\rightarrow \boxed{x_{L_2} = 1 + \left(\frac{\nu}{3}\right)^{1/3}}$$

A.N. : $\nu \simeq \frac{m_T}{m_\odot} \simeq 3.10^{-6}$

$\rightarrow \left(\frac{\nu}{3}\right)^{1/3} \cdot R = 10^{-2} \cdot R = 1,5.10^6$ km