TD n^{o}7

Champ de vecteurs, flots et crochets de Poisson

Exercice 1. Champ de vecteur et flot

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, un point X peut être caractérisé par ses coordonnées cartésiennes x, y ou polaires (r, θ) ou complexes $z, \overline{z}$ définies par

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad \overline{z} = x - iy = re^{-i\theta}$$

(Utilisant la notation d'opérateur différentiel) on considère le champ de vecteur V défini par

$$V = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. C'est à dire que ses composantes polaires sont $V^r = 0, V^\theta = \omega$.

1. Tracer l'allure du champ de vecteur V. Exprimer V en coordonnées cartésiennes et complexes, c'est à dire trouver les composantes V^x, V^y et $V^z, V^{\overline{z}}$ définies par
$$V = V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y} = V^z \frac{\partial}{\partial z} + V^{\overline{z}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$
2. Ecrire les équations de mouvement des trajectoires générées par ce champ de vecteur dans les différents systèmes de coordonnées. Choisir le meilleur système de coordonnées pour les résoudre, et déduire l'expression du flot $\phi_t : X \to X(t) = \phi_t(X)$ sur $\mathbb{R}^2$. Schéma.
3. L'opérateur de transfert $\hat{T}_t$ associé au flot qui décrit le transport d'une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ est défini par
$$f_t(X) = \left(\hat{T}_t f\right)(X) = f(\phi_{-t}(X))$$
donner l'expression de f_t en coordonnées polaires et montrer que
$$\hat{T}_t = e^{-(\omega t)\frac{\partial}{\partial\theta}} = e^{-tV}$$
4. On appelle $\hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$ les "**opérateurs impulsion**" (utilisés en mécanique quantique). Montrer que
$$V = i\omega\left(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x\right)$$
(suite à l'exercice 4)

Exercice 2. Champ de vecteur et flots (II)

Sur $\mathbb{R}^2$, en coordonnées cartésiennes, tracer l'allure du champ de vecteur

$$V = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

de composantes $V^x = x$,$V^y = -y$. Ecrire les équations du mouvement, déterminer le flot ϕ_t associé et la forme des trajectoires (lignes de champ).

Exercice 3. Crochets de Poisson

1. Montrer que pour deux fonctions $f, g \in C^\infty(\mathcal{P})$ on a
$$\mathcal{V}_g(f) = -\{g, f\} = -\mathcal{V}_f(g) \tag{1}$$
où $\mathcal{V}_f$ est le champ de vecteur Hamiltonien associé à f (et de même pour g).
2. Montrer directement que si X^i et P^j désignent les variables de position et impulsion, et H le Hamiltonien, on a :
$$\frac{dX^i(t)}{dt} = -\left\{H, X^i\right\}, \qquad \frac{dP^j(t)}{dt} = -\left\{H, P^j\right\} \tag{2}$$
(Ces relations sont équivalentes aux équations de mouvement de Hamilton, et sont un cas particulier de l'équation d'évolution $\frac{df_t}{dt} = -\{H, f_t\}$).
3. Montrer la relation suivante entre les **crochets de Lie** et les **crochets de Poisson** pour des champs de vecteurs Hamiltonien (par définition $[\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_g] = \mathcal{V}_f\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_g\mathcal{V}_f$) :
$$[\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_g] = -\mathcal{V}_{\{f,g\}}$$
4. Déduire la **relation de Jacobi** entre trois fonctions f, g, h :
$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Exercice 4. Groupe et algèbre des rotations (optionel)

On va généraliser l'exercice 1.

1. Soit $\vec{u}$ est un vecteur unitaire donné ($\|\vec{u}\| = 1$). Soient
$$\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{p}, \qquad \vec{X} = (x, y, z), \quad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$
$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ sont appelés **opérateurs moment angulaire**. Montrer que le champ de vecteur
$$V_{\vec{u}} = i\left(\vec{L}.\vec{u}\right)$$
génére un flot ϕ_α qui est une rotation $R_{\alpha,\vec{u}}$ d'un angle α autour de l'axe $\vec{u}$. (aide : il suffit de traiter le cas $\vec{u} = (0, 0, 1)$). Déduire l'expression de l'opérateur de transfert associé (appelé opérateur de rotation $\hat{R}_{\alpha,\vec{u}}$) qui fait tourner une fonction $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ d'un angle α autour de l'axe $\vec{u}$. Ces opérateurs de transfert sont très utilisés en mécanique quantique car les "particules" sont décrites par des fonctions d'ondes. On dit que l'opérateur moment angulaire est le **générateur des rotations**.
2. Par définition, $[A, B] = AB - BA$ est appelé commutateur. Montrer que
$$[L_x, L_y] = iL_z$$
appelé relation de commutation de l'algèbre so(3). Plus généralement, déduire que si on note $\vec{U} = \alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et $V_{\vec{U}} = i\left(\vec{L}.\vec{U}\right)$ le champ de vecteur qui génère l'opérateur de rotation $\hat{R}_{\alpha,\vec{u}} = e^{-V_{\vec{U}}}$, alors
$$\left[V_{\vec{U}}, V_{\vec{W}}\right] = -V_{\vec{U}\wedge\vec{W}}$$