Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2011-12
TD de Mécanique Analytique

TD n°6

L'attraction gravitationnelle en mécanique de Newton et en relativité générale.

Exercice 1. Champ de force central.

Dans un référentiel Galiléen, en coordonées sphériques (r, θ, φ), on considère une particule de masse m (qui peut être une planète assimilée à un point) soumise à une force radiale dont l'intensité $F(r)$ dépend seulement de r.

1. Montrer qu'il existe une énergie potentielle $U(r)$ telle que $\vec{F} = -\vec{\mathrm{grad}}(U)$ et que $F(r) = -\frac{dU}{dr}$. (On dit que la force est potentielle ou conservative). Aide : en coord. sphériques, $\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$. Donner l'expression de $F(r)$ et $U(r)$ pour une planète soumise à l'attraction gravitationnelle du Soleil.
2. Justifier pourquoi on peut restreindre l'étude au plan (x, y),i.e. $\theta = \pi/2$, n'utiliser que les coordonnées (r, φ). Ecrire le Lagrangien $L(r, \varphi, V_r, V_\varphi)$.
3. Donner les expressions des impulsions p_r, p_φ et du Hamiltonien $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$. A l'aide des équations de Hamilton, montrer que p_φ est une grandeur conservée que l'on interprétera. On note $\mathcal{L} = \frac{p_\varphi}{m}$. Montrer que le problème radial est décrit par le Hamiltonien
$$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \tilde{U}(r)$$
avec une énergie potentielle $\tilde{U}(r)$ que l'on précisera et que l'on tracera. Montrer que les équations de mouvement de Hamilton donnent
$$\ddot{r} = \frac{1}{m}F(r) + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3}$$
Donner le sens physique des termes. Qui y a t-il de remarquable dans le cas de la force gravitationnelle ? (appelé principe d'équivalence)
4. Tracer $\tilde{U}(r)$ dans le cas de la force gravitationnelle. Discuter l'allure des trajectoires $r(t)$ et $(x(t), y(t))$.
5. Faire le changement de variable $u = 1/r$. Montrer que l'équation de mouvement radiale devient
$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{1}{m\mathcal{L}^2u^2}F(r)$$

dont la solution dans le cas de la gravitation donne des ellipses de la forme :

$$r(\varphi) = \frac{ed}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

.

Exercice 2. (Optionnel) Géodésiques autour d'une étoile. Modèle relativiste de la gravitation.

Le but de l'exercice est d'illustrer une idée de la relativité générale : une particule libre dans un espace-temps courbe (suivant une géodésique) subit une déviation similaire à celle créée par la "force de gravitation".

1. On choisi l'unité de masse étant la masse du Soleil $M_0 = 2.10^{30}kg$, l'unité de distance sera $r_0 = \frac{M_0\mathcal{G}}{c^2}$ et l'unité de temps $t_0 = r_0/c$ avec $c = 3.10^8 m/s$ et $\mathcal{G} = 6.6\,10^{-10} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Ainsi on remplace les grandeurs physique temps t, distance r et masse M par des grandeurs sans unités : t/t_0, r/r_0 et M/M_0. Calculer r_0, t_0. Dans la suite on travaille avec les grandeurs sans unités notées t, r, M.
2. On considère les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans l'espace et la métrique suivante dans l'espace temps appelée **métrique de Schwarzchild** :
$$g(V,V) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(V_t)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}(V_r)^2 - r^2\left((V_\theta)^2 + \sin^2\theta\,(V_\varphi)^2\right)$$
qui correspond à une déformation de l'espace temps créée par une étoile (ou un trou noir) immobile de masse M située à l'origine. Le cas $M = 0$ correspond à un espace temps plat. Dans la suite on travaille dans le plan (x, y) avec $\theta = \pi/2$ et $g(V,V) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(V_t)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}(V_r)^2 - r^2(V_\varphi)^2$. Le principe de la relativité est que la ligne d'univers $X(s) = (t(s), r(s), \varphi(s))$ d'une particule libre (ou d'une planète considérée comme ponctuelle) est une géodésique de l'espace temps, c'est à dire rend l'action
$$S = \int g\left(\frac{dX}{ds}, \frac{dX}{ds}\right) ds$$
extrémale. Le lagrangien est $L(t, r, \varphi, V_t, V_r, V_\varphi) = g(V,V)$. Définir les impulsions p_t, p_r, p_φ. Ecrire le Hamiltonien $H(t, r, \varphi, p_t, p_r, p_\varphi)$et les équations de Hamilton. Déduire qu'il y a trois quantités conservées $E := p_t$ et $\mathcal{L} := -p_\varphi$ et H l'Hamiltonien lui même. (on prendra $H = 1$ pour une particule massive afin que s s'identifie au temps propre, et $H = 0$ pour un photon).
3. Montrer que l'équation de mouvement radiale s'écrit
$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{MH}{r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{r^3} - \frac{3M\mathcal{L}^2}{r^4}$$
et interpréter les deux premiers termes, en comparant à l'exercice (1). Commenter l'effet du troisième terme.
4. Ecrire l'équation radiale de (4) sous la forme $\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{dU}{dr}$ avec une "énergie potentielle" $U(r)$. Discuter l'allure de $U(r)$ et les conséquences sur l'allure des trajectoires selon les valeurs de $\mathcal{L}$ et de H.