# Exercice : Etude d'une dynamique chaotique

1) si $\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$, on rappelle que

avec le changement de variable : $(q_1, p_1) \longrightarrow (q_2, p_2)$,

l'élément d'aire est changé par :

$$dq_2 \cdot dp_2 = \underbrace{|\det(M)|}_{\text{Jacobien}} \, dq_1 \cdot dp_1$$

ici $\det(M) = 2.1 - 1.1 = 1$ donc $dq_2 \, dp_2 = dq_1 \, dp_1$ = aire préservée.

2) Calcul des valeurs propres :

Polynome caractéristique $D(\mu) = \det \begin{pmatrix} 2-\mu & 1 \\ 1 & 1-\mu \end{pmatrix} = \mu^2 - \underbrace{3}_{Tr(M)} \mu + \underbrace{1}_{Det(M)}$

$$\rightarrow \quad \mu_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

avec $\Delta = 9 - 4 = 5$

on a $\begin{cases} \mu_+ \simeq 2,6 \\ \mu_- \simeq 0,4 \end{cases}$ $\quad 0 < \mu_- < 1 < \mu_+$

$$\mu_+ \cdot \mu_- = \det(M) = 1$$
$$\mu_+ + \mu_- = Tr(M) = 3$$

On note $\begin{cases} \mu_+ = e^{\lambda} \\ \mu_- = e^{-\lambda} \end{cases}$

avec $\lambda = \log(\mu_+) > 0$.

Vecteurs propres : posons $V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ v_+ \end{pmatrix}$, $MV_+ = \mu_+ V_+$

$\Longleftrightarrow 2 + v_+ = \mu_+ \cdot 1 \Longleftrightarrow v_+ = \mu_+ - 2 \simeq 0,6$

et $V_- = \begin{pmatrix} -1 \\ v_- \end{pmatrix}$. $MV_- = \mu_- V_- \Longleftrightarrow -2 + v_- = -\mu_-$

$\Longleftrightarrow v_- = 2 - \mu_- \simeq 1,6$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_+ & v_- \end{pmatrix}$ : matrice de Passage

on a $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$

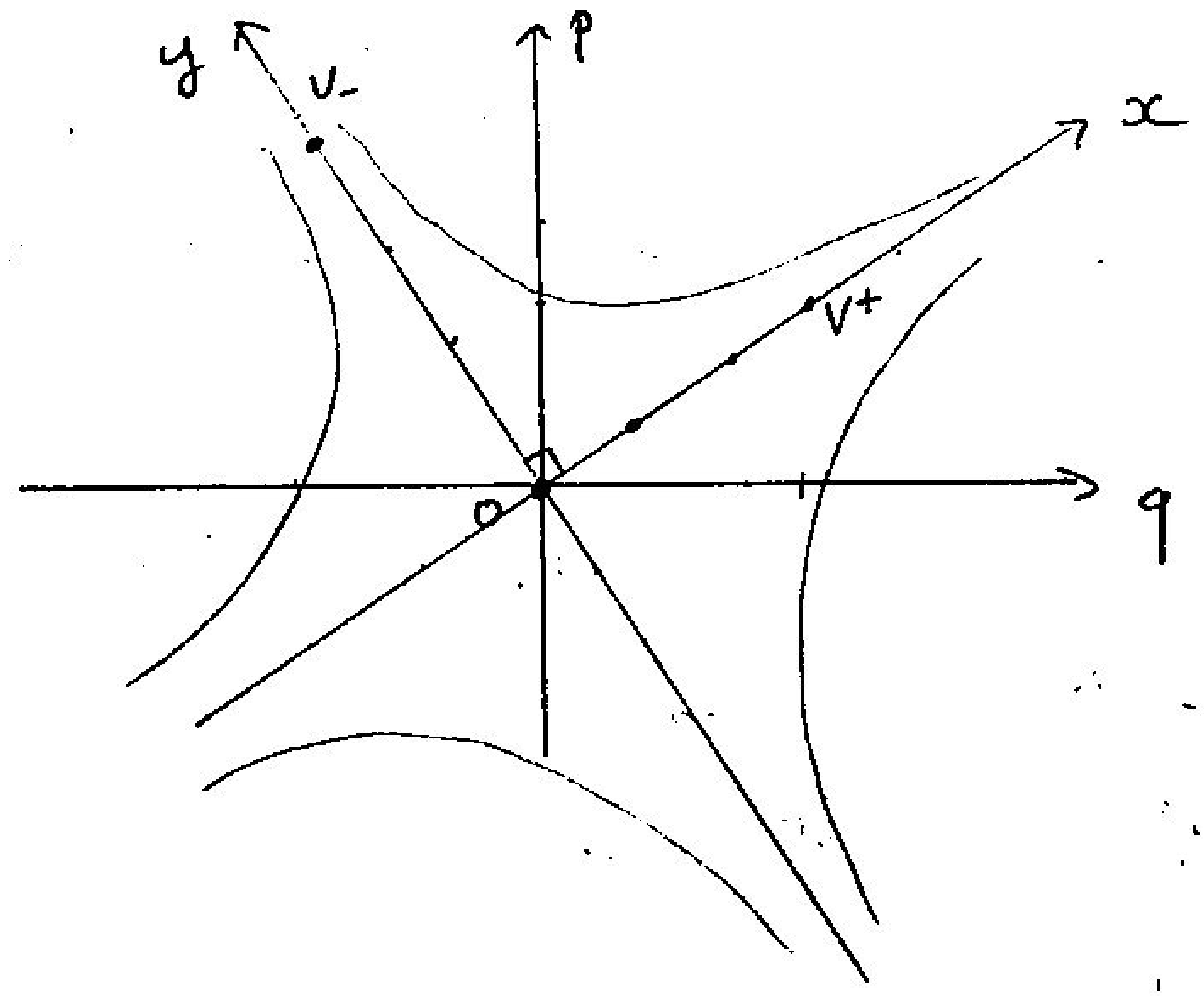
Soit le changement de variable : $E = (q, p) \longrightarrow X = (x, y)$

par : $X = P^{-1} E$

alors $E_{t+1} = M E_t \iff X_{t+1} = D X_t = D^t X_0$

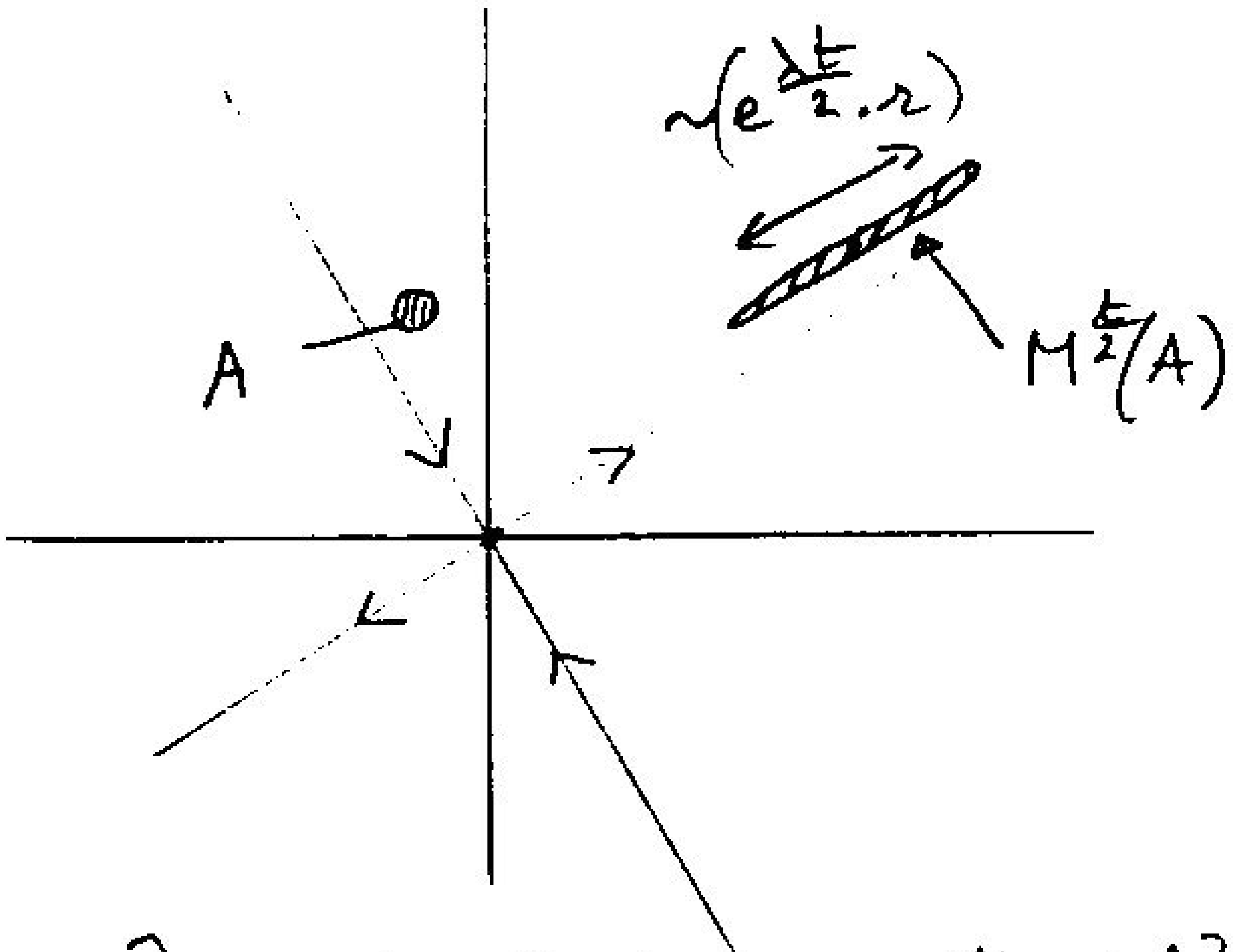
$$\iff \begin{cases} x_t = e^{\lambda t} x_0 \longrightarrow +\infty & \text{pour } t \to \infty \\ y_t = e^{-\lambda t} y_0 \longrightarrow 0 & \text{"} \end{cases}$$

on a $x_t y_t = x_0 y_0 = \text{cste}$ donc $(x_t, y_t) \in$ hyperbole

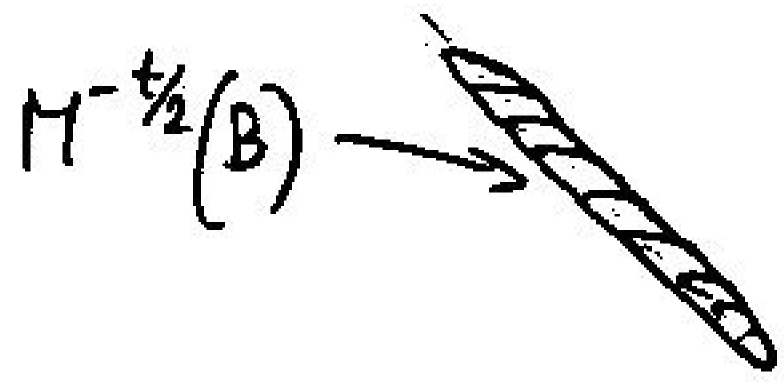


(2) Soit $A$ un petit disque sur le plan $(q,p)$, de rayon $r$.

D'après ci-dessus pour $t \gg 1$, $M^{\frac{t}{2}}(A)$ est une ellipse de même aire mais étirée dans la direction instable de $\frac{1}{2}$ grand axe $\simeq e^{\lambda \frac{t}{2}} \cdot r \gg 1$ et $\frac{1}{2}$ petit axe $\simeq e^{-\lambda \frac{t}{2}} r \ll 1$



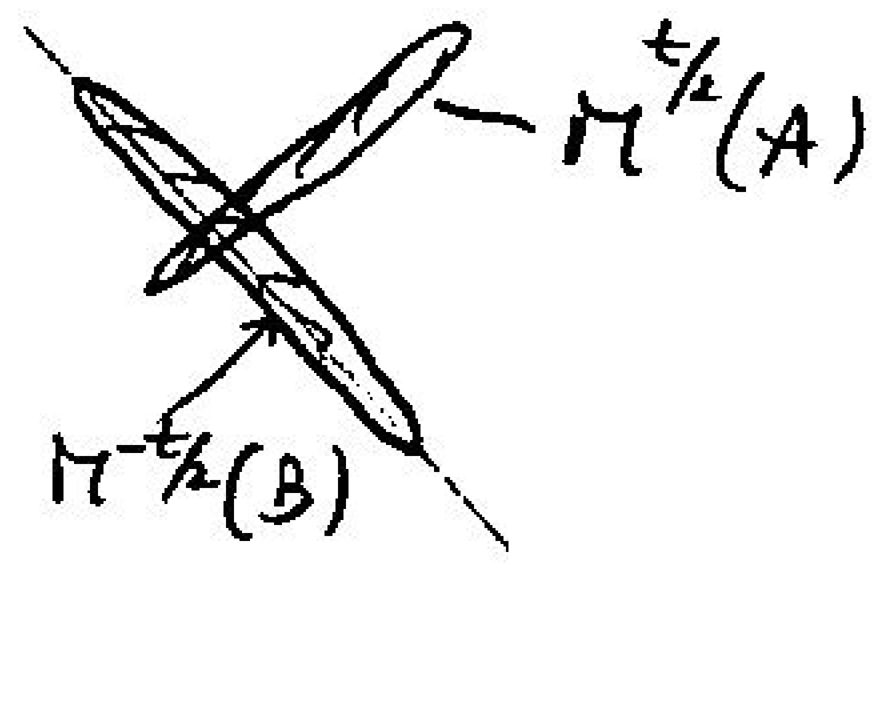

De même si $B$ est un autre petit disque, $M^{-\frac{t}{2}}(B)$ a l'allure étirée (dans le passé) selon la direction stable.




si $t$ est tel que $\left(e^{\lambda \frac{t}{2}} r\right) \gg 1$

alors modulo 1, $M^{\frac{t}{2}}(A)$ et $M^{-\frac{t}{2}}(B)$ vont forcément s'intersecter :

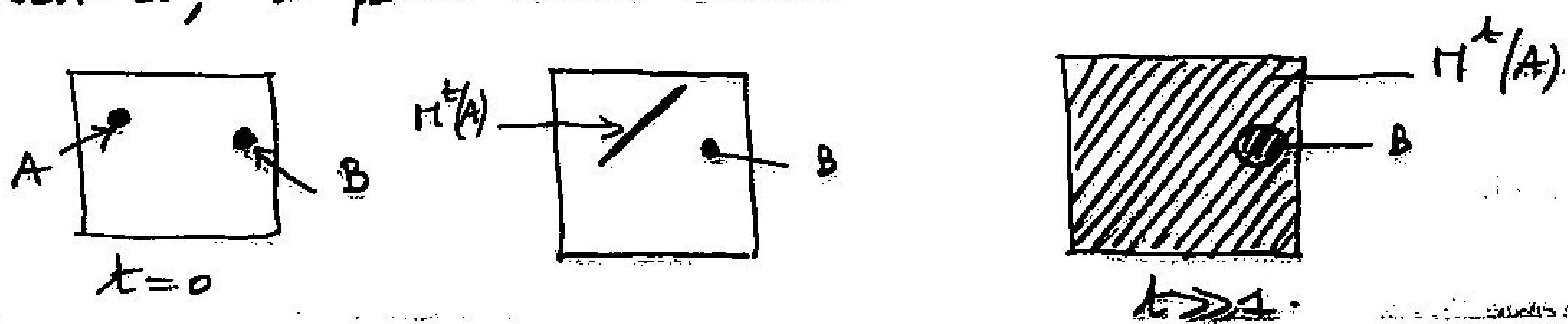
$$\left(M^{t/2}(A) \cap M^{t/2}(B)\right) \neq \emptyset$$




$$\Longrightarrow \left(M^{t}(A) \cap B\right) \neq \emptyset \quad : \text{modulo } 1.$$

(en appliquant $M^{t/2}$).

La signification est que sur $\mathcal{T} = [0,1[^2$, l'ensemble $M^t(A)$ va intersecter tout disque $B$ aussi petit soit-il, à partir d'une certaine date $t$ :



Autrement dit l'ensemble $M^t(A)$ se "mélange" sur $\mathcal{S}$.

Si le petit rayon de $r$ représente notre méconnaissance de l'état initial, à partir d'une certaine date, $M^t(A)$ est complètement mélangé $\Leftrightarrow$ la méconnaissance sur l'état $E_t$ est totale. C'est le chaos

Cette date $t$ est donnée par $e^{\lambda t/2} r \gg 1$

$$\Leftrightarrow \quad t \geqslant \frac{2}{\lambda} \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad = \quad 55$$

pour $r = 10^{-5}$

③ $\tilde{E}_0 = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ est périodique de période $t$

$$\Leftrightarrow \quad M^t(\tilde{E}_0) = \tilde{E}_0 \text{ modulo } 1$$

$$\Leftrightarrow \quad M^t(\tilde{E}_0) = \tilde{E}_0 + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

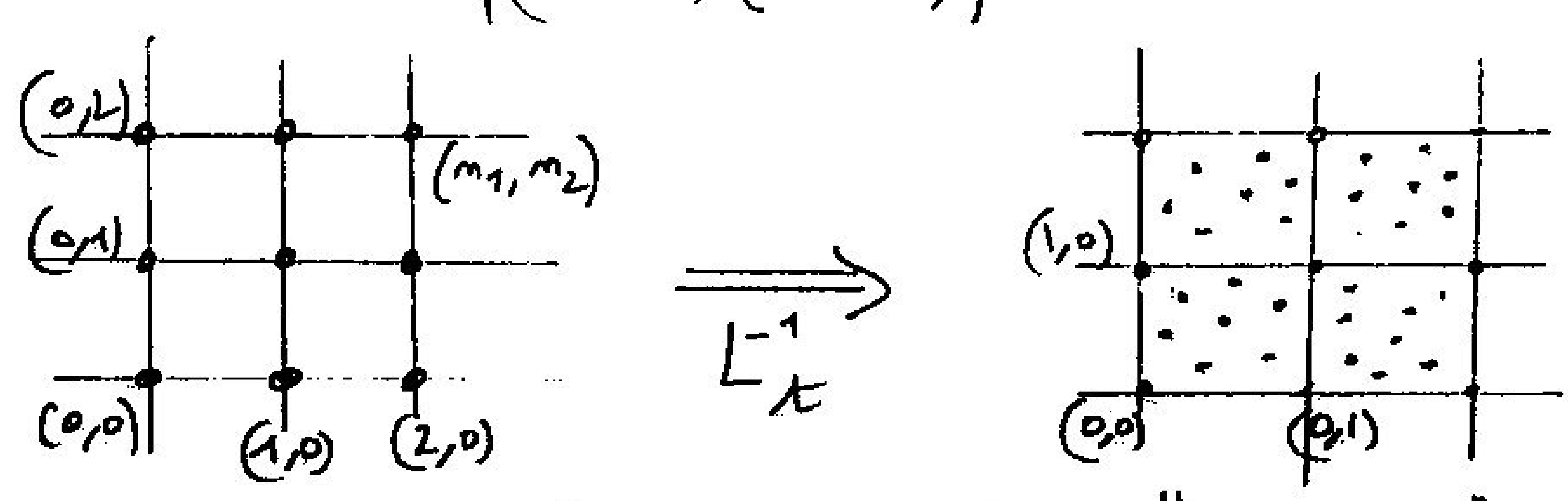
$$\Leftrightarrow \quad (M^t - Id)\, \tilde{E}_0 = N \qquad \text{avec} \quad N = (n_1, n_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{E}_0 = (M^t - 1)^{-1}(N)$$

Les points périodiques sont donc l'image du réseau $\mathbb{Z}^2$ par l'application linéaire $L_t^{-1}$, avec $L_t := (M^t - 1)$.

on a $|\mathrm{Det}(L_t)| = |\mathrm{Det}(M^t - I)| = \left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} - 1 \end{pmatrix}\right|$

$$= \left|(e^{\lambda t} - 1)(e^{-\lambda t} - 1)\right| = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t} \xrightarrow[t \infty]{} \infty$$




$$\Longrightarrow_{L_t^{-1}}$$

$|\mathrm{Det}(L_t^{-1})| = |\mathrm{Det}(L_t)|^{-1} \ll 1$ cad $L_t^{-1}$ est "contractante" par le facteur $|\mathrm{Det}(L_t)|^{-1} \ll 1$

③

Le nombre de points périodique (dans $\mathcal{S} = [0,1[^2$)

est donc $\mathcal{N}_t = |\mathrm{Det}(L_t)| = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t}$

$= |\mathrm{Det}(M^t - 1)|$

- Il y a $\mathcal{N}_1 = |\mathrm{Det}(M-1)| = 1$ point de période 1

c'est $(0,0) \xrightarrow{M} (0,0)$

- Il y a $\mathcal{N}_2 = |\mathrm{Det}(M^2 - 1)| = 5$ points de période 2

Ce sont : $(0,0) \xrightarrow{M} (0,0) \xrightarrow{M} (0,0)$

$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ modulo 1

$\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \xrightarrow{M} \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ modulo 1

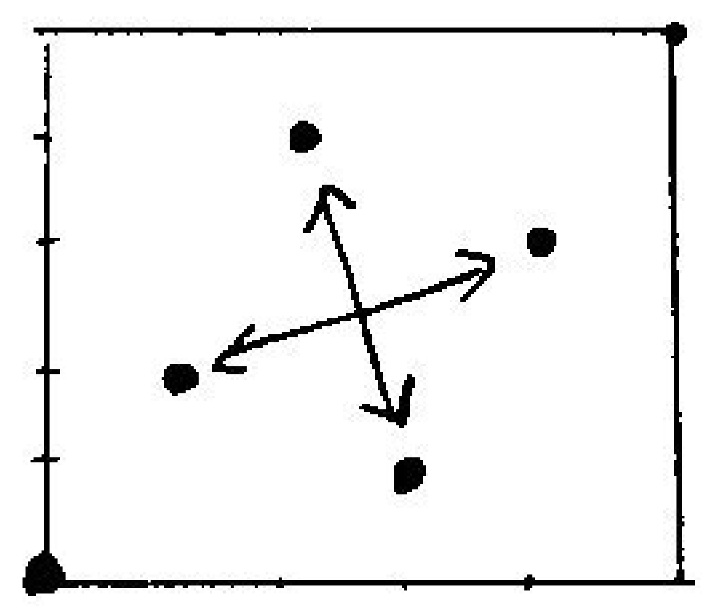
obtenus par $(0,0) = L_2^{-1}(0,0)$

$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = L_2^{-1}(2,1)$

$\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = L_2^{-1}(3,2)$

$\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = L_2^{-1}(4,2)$

$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = L_2^{-1}(5,3)$



(0,0)

④ D'après la formule ci-dessus, $\tilde{E}_0 = (M^t - 1)^{-1}(N)$

comme $(M^t - 1)$ est une matrice à coefficients entiers

alors $(M^t - 1)^{-1}$ a des coef. rationnels, et $N$ entiers

donc $\tilde{E}_0$ a des coef. rationnels.

Réciproquement, soit $N \in \mathbb{N}$. Considérons tous les points de la forme $\tilde{q}_0 = \frac{a}{N}$, $\tilde{p}_0 = \frac{b}{N}$ avec $a, b$ entiers et $0 \leq a < N$, $0 \leq b < N$.

Il y a $N^2$ points de la sorte. Comme $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est à coef entiers alors $\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{p}_0 \end{pmatrix}$ est encore de la sorte

Donc la trajectoire de $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ parmi ces $N^2$ points est forcément périodique. Conclusion : si $\tilde{q}_0 = \frac{a_1}{b_1}$, $\tilde{p}_0 = \frac{a_2}{b_2}$ est un point de coordonnées rationnelles on a :

$$\tilde{q}_0 = \frac{a_1 \cdot b_2}{N}, \quad \tilde{p}_0 = \frac{a_2 \cdot b_1}{N}$$ avec $N = b_1 \cdot b_2$ et on déduit que c'est un point périodique.

(5) on a calculé $\mathcal{N}_t = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t} \underset{t\infty}{\sim} e^{\lambda t}$

donc

$$h = \lim_{t\infty} \frac{1}{t} \log(\mathcal{N}_t) = \lambda = \log(\mu_+) \simeq 0,41$$

la signification est "la croissance de la complexité à chaque pas de temps" ou le taux de perte d'information au cours du temps.

# Exercice perle sur un cerceau

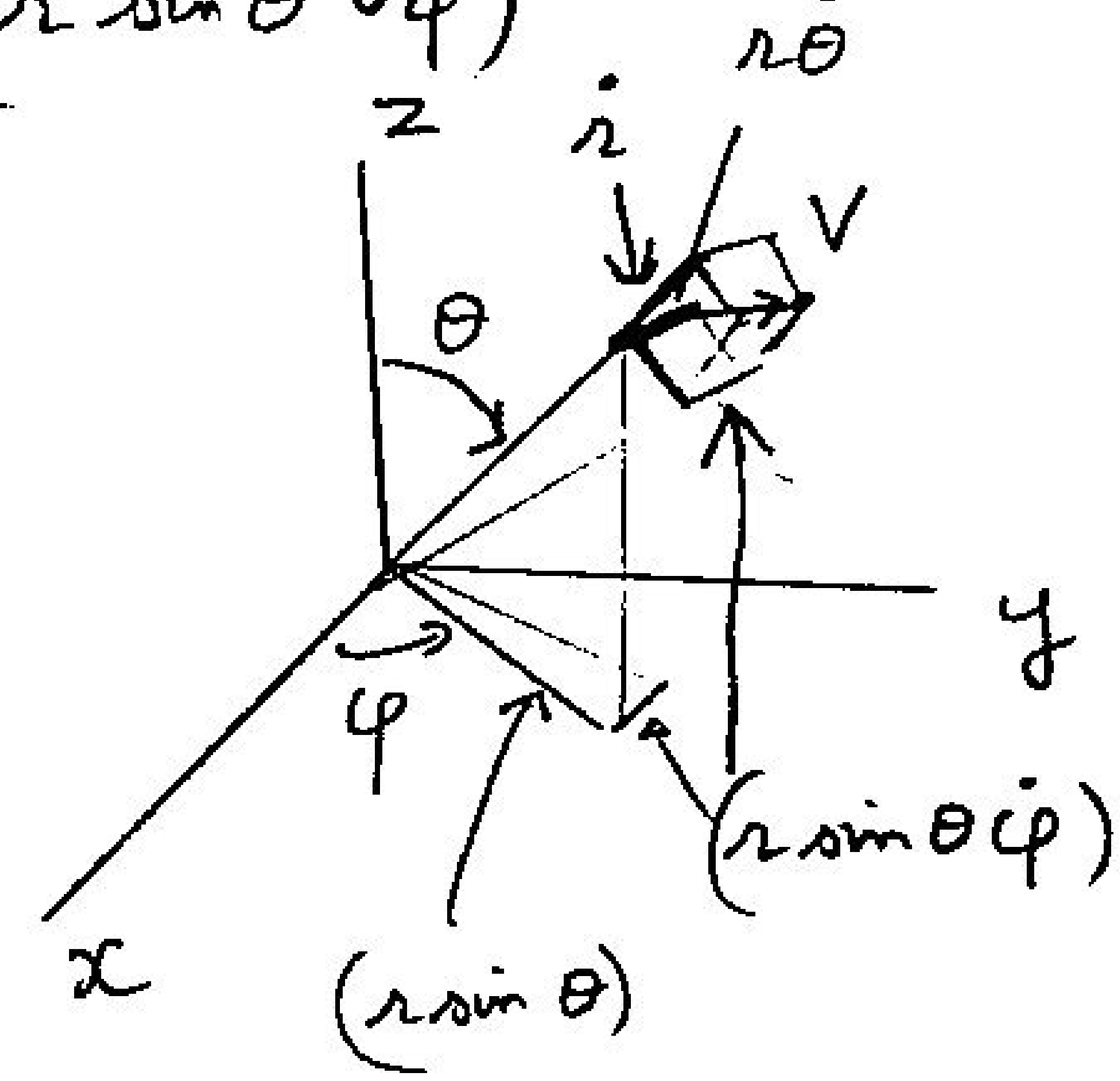
① Si un point $X(t)$ évolue en coordonnées sphériques,

$$X(t) = \left(r(t), \theta(t), \varphi(t)\right)$$

- alors $V(t) = \frac{dX}{dt} = \left(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = \left(V_r, V_\theta, V_\varphi\right)$

mais la norme est

$$\|V\|^2 = \left(\dot{r}\right)^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\sin\theta\,\dot{\varphi}\right)^2$$
$$= \left(V_r\right)^2 + \left(r V_\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\, V_\varphi\right)^2$$




donc

- $E_c = \frac{1}{2} m \|V\|^2$

$$= \frac{1}{2} m \left(V_r^2 + r^2 V_\theta^2 + (r\sin\theta)^2 V_\varphi^2\right)$$

- $z = -R\cos\theta$

donc

$$U = -mgR\cos\theta$$

- $r = R$ est fixé, donc $V_r = 0$

$\varphi(t)$ est déterminé par $\dot{\varphi}(t) = \Omega = V_\varphi$

$$\Longleftrightarrow \varphi(t) = \int_0^t \Omega(t')\,dt' + \varphi(0) = \Omega . t + \varphi(0)$$
si $\Omega = \text{cste}$

donc seule la variable $\theta(t)$ est libre.

Lagrangien : $L(\theta, V_\theta) = \frac{1}{2} m \left(R^2 V_\theta^2 + (R\sin\theta)^2 \Omega^2\right)$
$+ mgR\cos\theta$

(2) Soit $p = \dfrac{\partial L}{\partial V_\theta} = m R^2 V_\theta$

inversement $V_\theta = \dfrac{1}{mR^2}\, p$

alors $H(\theta, p) = p \cdot V_\theta - L = \dfrac{p^2}{mR^2} - \dfrac{m\, p^2}{2(mR^2)^2} - \dfrac{1}{2} m R^2 (\sin\theta)^2 \Omega^2$
$- m g R \cos\theta$

$$= \frac{p^2}{2mR^2} + \tilde{U}(\theta)$$

avec $\tilde{U}(\theta) = - m g R \cos\theta \underbrace{- \frac{1}{2} m R^2 (\sin\theta)^2 \Omega^2}_{\text{"effet centrifuge"}}$

(3) On a $\dfrac{d\tilde{U}}{d\theta} = + m g R \sin\theta - m R^2 \Omega^2 \sin\theta \cos\theta$

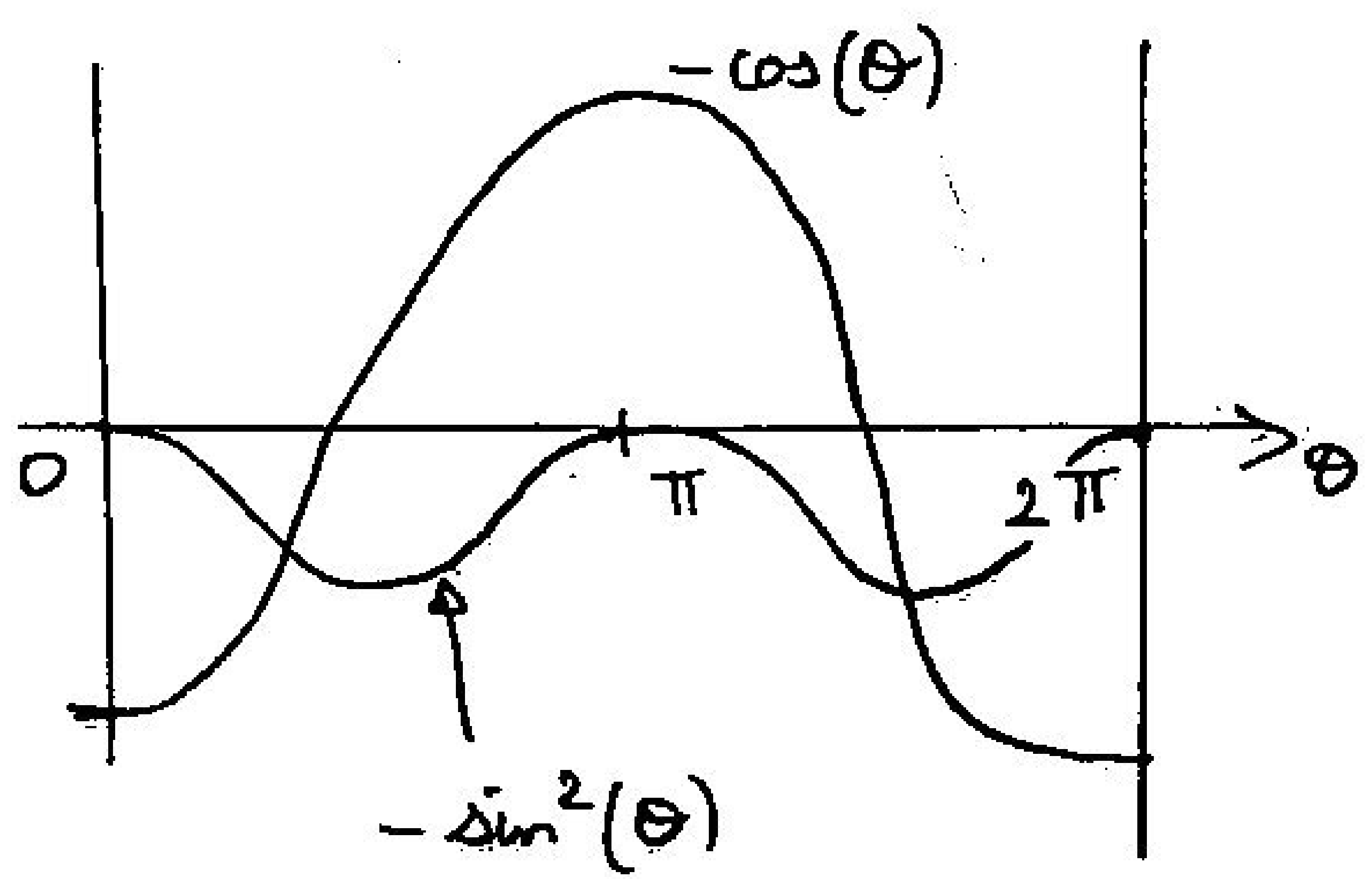
$$= 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g - R\Omega^2 \cos\theta = 0 \\ \text{ou } \sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{g}{R\Omega^2} & (*) \\ \text{ou } \theta = 0, \pi \end{cases}$$

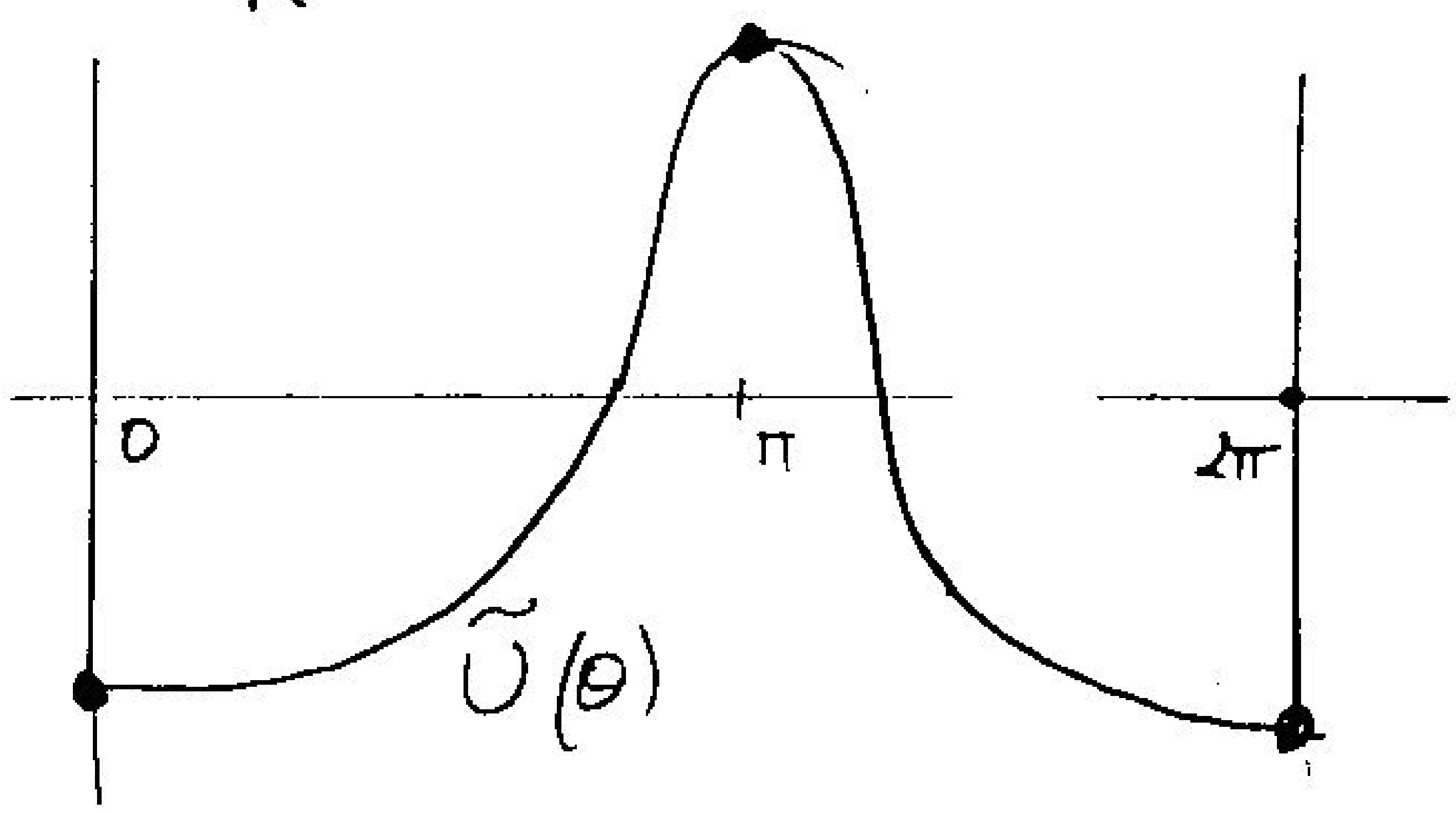
L'équation (*) a une solution seulement si $\dfrac{g}{R\Omega^2} \leq 1$

$\Leftrightarrow |\Omega| \geq \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, alors $\theta^* = \pm \operatorname{acos}\left(\dfrac{g}{R\Omega^2}\right)$

Schéma :



• Si $|\Omega| < \sqrt{\frac{g}{R}}$




• il y a un minimum en $\theta = 0$ (équilibre stable)

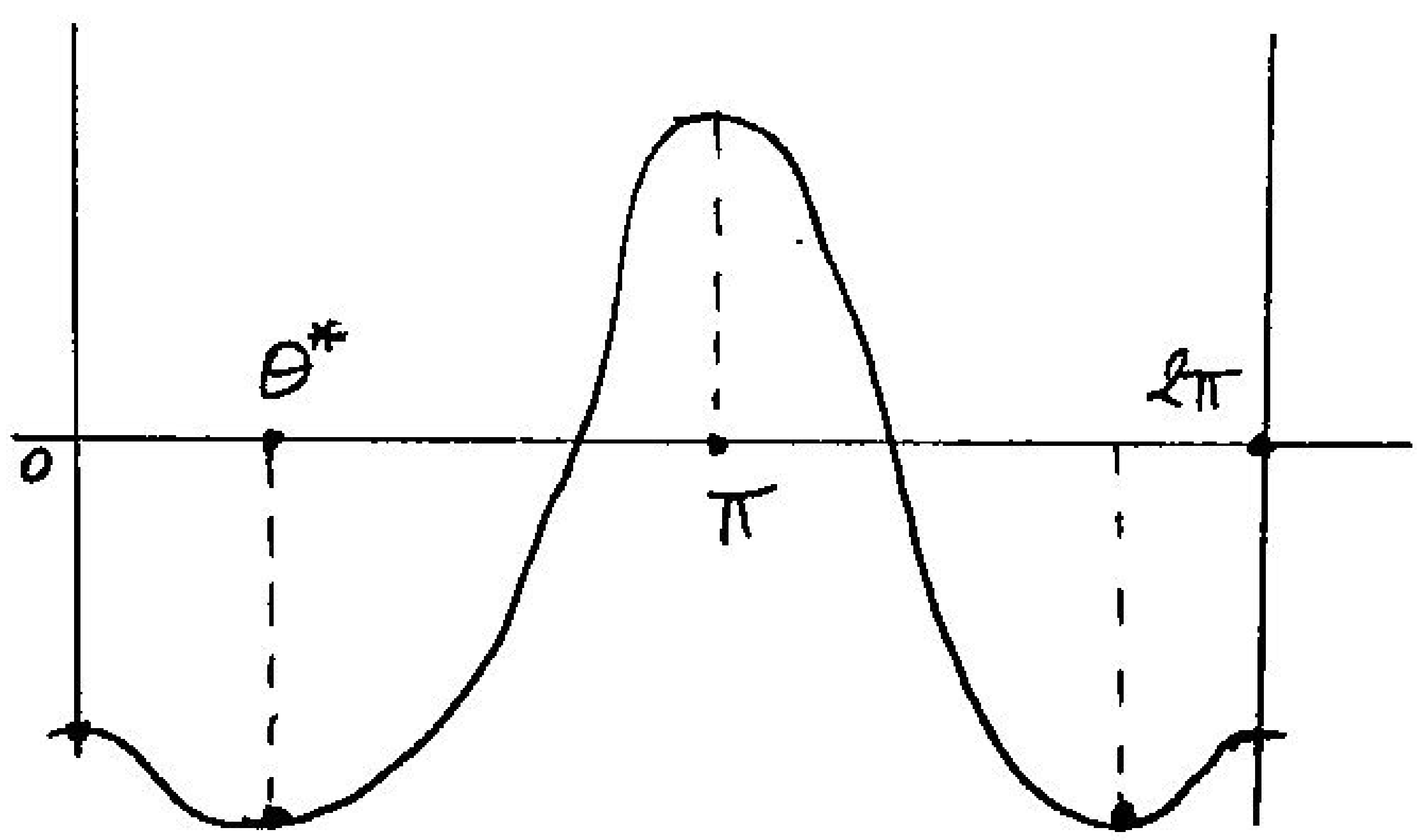
de fréquence : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{U}''(0)}{mR^2}} = \left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right)^{1/2}$

car $\tilde{U}''(\theta) = mgR\cos\theta - mR^2\Omega^2\cos(2\theta)$

• et un maximum en $\theta = \pi$ de coef d'instabilité :

$$\lambda_\pi = \left(-\frac{\tilde{U}''(\pi)}{mR^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{R} + \Omega^2\right)^{1/2}$$

• Si $|\Omega| > \sqrt{\frac{g}{R}}$,




• $\theta = 0$ est maximum avec coef d'instabilité

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{-\tilde{U}''(0)}{mR^2}} = \left(\Omega^2 - \frac{g}{R}\right)^{1/2}$$

• $\theta = \pi$ est maximum avec $\lambda_\pi = \left(\frac{g}{R} + \Omega^2\right)^{1/2}$

et $\theta^* = \pm \operatorname{acos}\left(\frac{g}{R\Omega^2}\right)$ est minimum (stable)

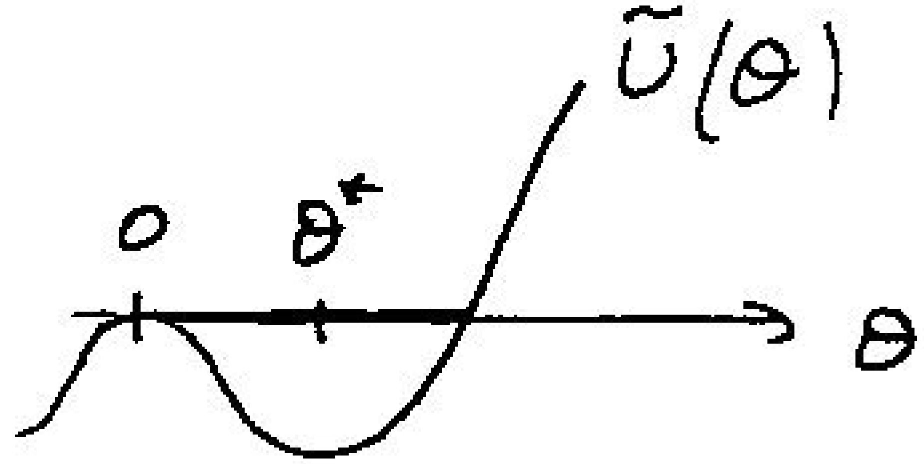
avec fréquence propre $\omega^* = \sqrt{\frac{U''(\theta^*)}{mR^2}}$

$$= \Omega \cdot \left(1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}\right)^{1/2}$$

- Si à $t=0$, $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$,

  alors si $|\Omega| < \sqrt{\frac{g}{R}}$, la perle va y rester

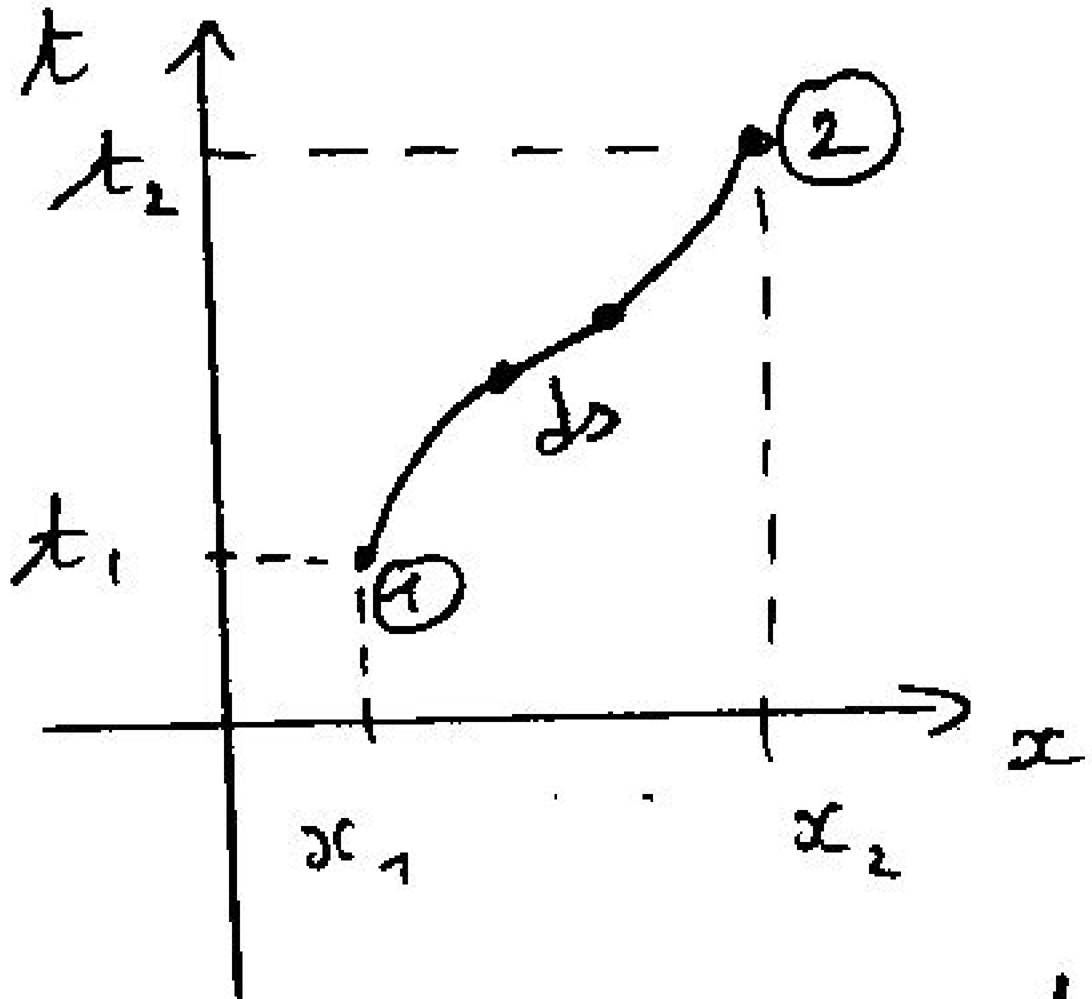
  mais si $|\Omega| > \sqrt{\frac{g}{R}}$, la perle va osciller dans le puits de potentiel autour de $\theta^*$




  et à cause des frottements,

  va finir par se stabiliser en $\theta = \theta^*$.

# Exercice : Courbe de longueur minimale

① 


$$ds^2 = dx^2 + dt^2$$

on a $S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{1/2} dt$

$$= \int_{①}^{②} \left(dt^2 + dx^2\right)^{1/2} = \int_1^2 ds = \text{longueur}$$

② On sait que $S$ extrémale $\Longleftrightarrow$

équ. de Euler Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right) = 0$ donc $v = \frac{dx}{dt} = \text{cste} = v_0$

donc $x(t) = v_0 \cdot t + x(0)$ : équation d'une droite