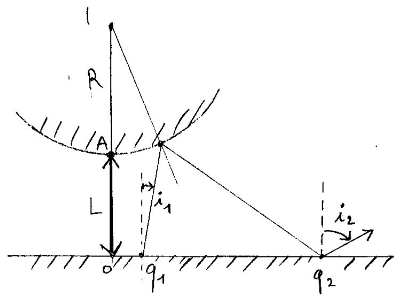
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique 2011-12
TD de Mécanique Analytique

TD n^{o}3

Systèmes à 2 degrés de liberté. Billards et Sections de Poincaré

Exercice 1. On souhaite étudier la stabilité de **la trajectoire périodique verticale** OA dans le billard sur le schéma suivant. On appelle $L = OA$ et R le rayon de courbure de la partie supérieure. Noter que $R < 0$ signifie une courbure dans l'autre sens.



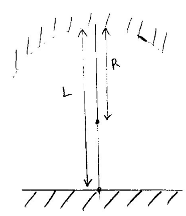
1. Soit $(q_1, p_1 = \sin(i_1))$ un "état initial" sur le bord inférieur. Montrer que l'état suivant $(q_2, p_2 = \sin(i_2))$ au premier ordre en $q, i \ll 1$ est donné par

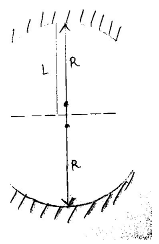
$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(1 + 2\frac{L}{R}\right) & -2L\left(1 + \frac{L}{R}\right) \\ -\frac{2}{R} & \left(1 + 2\frac{L}{R}\right) \end{pmatrix}}_{DM} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

   La matrice $DM : (q_1, p_1) \to (q_2, p_2)$ est le linéarisé de l'application de Poincaré au voisinage de l'orbite périodique.

2. Vérifier que $\mathrm{Det}\,(DM) = 1$. Calculer $T = \mathrm{Tr}\,(DM)$. Calculer les valeurs propres de la matrice DM en fonction de T et déduire si l'orbite OA est stable ou instable selon L/R.

3. Déduire la stabilité de l'orbite périodique verticale dans les billards suivants, selon les valeurs de L/R :





Exercice 2. Billard circulaire. On considère un billard circulaire. On reprend la notation $(q, p = \sin(i))$ de l'exercice 1.

1. Décrire la trajectoire dans le billard, partant d'un point donné du bord (q_1, p_1). Décrire la suite de points (q_i, p_i) associée sur la section de Poincaré.
2. Tracer une trajectoire périodique (fermée) qui fait $m = 3$ rebonds en $n = 1$ tour. Tracer une trajectoire périodique qui fait $m = 5$ rebonds en $n = 2$ tours. Montrer que une trajectoire est périodique si et seulement si $i = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b}\right)$ où a, b sont des entiers (on dit que $\frac{a}{b}$ est **rationnel**). Exprimer le nombre m de rebonds et le nombre n de tours effectués en une période en fonction de a, b ?
3. Quelle est la longeur$L$ parcourue pour une trajectoire périodique, en fonction de m, n ?
4. Montrer au contraire que si l'angle initial s'écrit $i = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationel** alors les points $q_1, q_2, \ldots$ de la trajectoire (non périodique) sont denses sur le bord (i.e. il n'y a pas d'intervalle non touché). Aide : procéder par l'absurde en supposant qu'il y a un intervalle non touché.
5. **(Option)** Si x est irrationel, montrer que pour toute condition initiale q_0, la proportion de points q_t qui tombent dans un intervalle I donné du bord est proportionnel à la longueur de l'intervalle. On dit que la dynamique est **uniquement ergodique**.

Exercice 3. (Option) Loi de Bendford. (Application de l'exercice 3, question 5). Montrer que parmi les premières décimales de la suite $u_n = 2^n$, c'est à dire $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \ldots$ le chiffre c apparait avec la probabilité $p_c = \frac{\log\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\log 10}$. Par exemple $p_1 = 0.17, p_7 = 0.06 \ldots$. (Voir "Loi de Bendford" sur wikipedia, son utilité pour détecter les fraudes fiscales).

Aide : écrire $c10^r \leq 2^n \leq (c+1)\, 10^r$ et prendre le log pour se ramener à une dynamique de translation de $\log 2$ modulo 1. Montrer que $\log 2$ est irrationnel.

Exercice 4. (Option) Application de $SL(2, \mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle qui représente une application de Poincaré linéaire dans le plan (q, p) ayant $(0, 0)$ comme point fixe (= point d'équilibre). La conservation de l'aire $dqdp$ impose $Det(M) = ad - cb = 1$. (On dit que $M \in SL(2, \mathbb{R})$). Soit $T = a + d$ la trace de la matrice. Montrer que

1. Si $|T| > 2$ alors on peut écrire $M = PDP^{-1}$ (qui s'interprète comme un changement de base) où $D = \pm \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$ est diagonale contenant les valeurs propres et $\lambda = \log\left(\frac{T+\sqrt{T^2-4}}{2}\right) > 0$ appelé **coefficient de Lyapounov**. Chaque trajectoire $(q_n, p_n) = M^n(q_0, p_0)$ est sur une hyperbole. Les vecteurs propres donnent les directions instable et stable. Déduire que le point$(0, 0)$ est instable. On dit que la matrice est **hyperbolique.**
2. Si $-2 < T < 2$ alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \pm \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$ et la fréquence $\omega = \arg\left(\frac{T+i\sqrt{4-T^2}}{2}\right)$. Chaque trajectoire est sur une ellipse de période $T = 2\pi/\omega$. Déduire que $(0, 0)$ est stable. On dit que la matrice est **elliptique.**
3. Si $|T| = 2$ alors $M = PDP^{-1}$, avec $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que la matrice est **parabolique**. Que dire de la stabilité de $(0, 0)$?