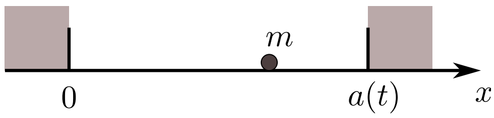
Université Joseph Fourier. Licence 3 Physique, 2009-10
Mécanique Analytique. Janvier 2010. Examen durée 3h00.

Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses. Encadrer les résultats demandés.

Exercise 1. **Rebonds parfaits entre murs qui bougent (6)**

Un objet ponctuel de masse m se déplace librement selon l'axe x, sans frottement, entre deux murs sur lesquels il rebondit de façon parfaite. Le premier mur est immobile en $x = 0$, le deuxième mur est en mouvement et situé en $x = a(t) > 0$.



1. **(1)** Si $v_0 = \frac{dx}{dt} < 0$ est la vitesse de l'objet avant de toucher le mur de gauche, quelle sera sa vitesse $v_0' = \frac{dx}{dt} > 0$ après le rebond ? Si $v_1 > 0$ est la vitesse de la particule avant de toucher le mur de droite, quelle sera sa vitesse v_1' après le rebond ? (à exprimer à partir de v_1 et $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Aide : se placer dans le référentiel du mur)
2. **(3)** On suppose que la position du mur $a(t)$ bouge *lentement*. On note Δt la période de l'objet (temps pour un aller-retour et se retrouver en $x = 0$ avec $v > 0$) et Δv la modification de vitesse sur cette période.
   (a) Exprimer $\Delta t, \Delta v$ puis $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ à partir de $v, a, \dot{a}$.
   (b) Déduire $\frac{d(va)}{dt}$ en première approximation.
   (c) Sur une durée $t \gg \Delta t$, déduire la vitesse $v(t)$ de l'objet en fonction de sa vitesse initiale $v(0)$ si la position du mur passe lentement de $a(0)$ à $a(t)$.
3. **(1)** On suppose que la position a du mur est fixée. Tracer la trajectoire de l'objet dans l'espace de phase (x, p) et calculer sa surface S en fonction de m, v, a.
4. **(1)** On suppose que la position du mur $a(t)$ bouge lentement. Appliquer le théorème adiabatique pour déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ en fonction de $a(t)$ et des données initiales $v(0), a(0)$. Déduire l'expression de l'énergie $E(t)$ à l'instant t à partir de $E(0)$.

Exercise 2. **Transformation linéaire des coordonnées (4)**

On note $\left(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n\right)$ les coordonnées canoniques d'un espace de phase d'un système à n degrés de liberté. On considère le changement de coordonnées :

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} A_i^j x^i, \qquad p'^j = \sum_{i=1}^{n} B_i^j p^i$$

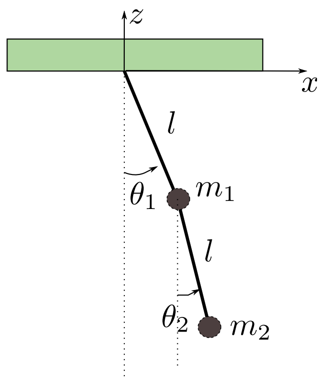
où $\mathbf{A} = \left(A_i^j\right)_{i,j}$, $\mathbf{B} = \left(B_i^j\right)_{i,j}$ sont des matrices réelles $n \times n$.

1. **(2)** Montrer que c'est une transformation canonique si et seulement si $\mathbf{B} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$ où T désigne la transposée.
2. **(2)** Si $\mathbf{A}$ est orthogonale (i.e. $\|\mathbf{A}u\| = \|u\|$ pour tout vecteur $u = \left(u^1, \dots, u^n\right)$) que vaut $\mathbf{B}$? Exprimer l'énergie cinétique $\frac{1}{2m}\|p\|^2$ à partir de p' ?

Exercise 3. **Modes normaux du double pendule (10)**

Dans le plan vertical (x, z), une masse ponctuelle m_1 est attachée à une tige sans masse de longueur l à un point fixe du plafond. Une autre masse ponctuelle m_2 est attachée à la masse m_1 par une tige identique à la première. Il y a la force de pesanteur et pas de frottements. Dans ce problème on étudie les petites oscillations $\theta_1, \theta_2 \ll 1$. On rappelle que à l'ordre 2 :

$$\sin\theta = \theta + o\left(\theta^2\right), \qquad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + o\left(\theta^2\right)$$



1. **(2)** a) Donner les positions (x_1, z_1), (x_2, z_2) des masses m_1 et m_2 en fonction de θ_1, θ_2 et l, à l'ordre 2.
   b) On posera $\theta = \theta_1$ et $\varphi = \theta_1 + \theta_2$. Déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle U du système en fonction de $m_1, m_2, g, l, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ à l'ordre 2.
2. **(2)** a) Déduire l'expression du Lagrangien, des impulsions p_θ, p_φ et du Hamiltonien du système $H\left(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi\right)$.
   b) On posera $\mu = \frac{m_2}{m_1}$. On effectue la transformation canonique
   $$(\varphi, p_\varphi) \to \left(\psi = \sqrt{\mu}\varphi, p_\psi = \frac{1}{\sqrt{\mu}}p_\varphi\right)$$
   afin de simplifier l'expression de l'énergie cinétique. Montrer que à une constante près, on obtient
   $$H\left(\theta, p_\theta, \psi, p_\psi\right) = \frac{1}{2m_1 l^2}\left(p_\theta^2 + p_\psi^2\right) + U$$
   avec
   $$U = \frac{glm_1\sqrt{1+\mu}}{2}\left(A_{11}\theta^2 + A_{22}\psi^2 + \left(A_{12} + A_{21}\right)\theta\psi\right) = \frac{glm_1\sqrt{1+\mu}}{2}\left(\theta, \psi\right).\mathbf{A}.\begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$
   où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique que l'on exprimera avec μ.
3. **(2)** Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont $\lambda_\pm = \sqrt{1+\mu} \pm \sqrt{\mu}$ et les vecteurs propres normalisés associés sont $V_\pm = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\pm^2}}\left(\lambda_\pm, \mp 1\right)$. On effectue le changement de variable canoniques
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix}$$
   où $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix}$ est la matrice orthogonale de passage contenant les vecteurs propres en lignes. Donner l'expression du Hamiltonien $H\left(x, p_x, y, p_y\right)$ dans ces nouvelles variables.
4. **(2)** Déduire l'expression des fréquences $\Omega_\pm$ des modes normaux en fonction de g, l, μ et tracer les fréquences $\Omega_\pm$ en fonction de μ.
5. **(2)** En posant $y = 0$ (puis $x = 0$), déduire l'allure du pendule losqu'il oscille dans les modes normaux de fréquence Ω_+ et Ω_-, dans les cas $m_1 \ll m_2$, $m_1 = m_2$ et $m_1 \gg m_2$.