Transformation linéaire des coordonnées

① Le crochet de Poisson est bi-linéaire donc

$$\{x'^i, p'^j\} = \sum_{k,l} A^i_k B^j_l \underbrace{\{x^k, p^l\}}_{\delta_{k,l}} = \sum_k A^i_k B^j_k$$

$$= \sum_k A^i_k (B^T)^k_j = (A \cdot B^T)^i_j$$

Ce sont des variables canoniques ssi $\{x'^i, p'^j\} = \delta_{i,j}$

$$\Longleftrightarrow \quad A \cdot B^T = Id \quad \Longleftrightarrow \quad B \cdot A^T = Id \quad \Longleftrightarrow \quad B = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

② Rappel : A orthogonale $\Longleftrightarrow \|Au\|^2 = \|u\|^2, \forall u$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle Au | Au \rangle = \langle u | u \rangle, \forall u$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle A^+ A u | u \rangle = \langle u | u \rangle, \forall u$$

$$\Longleftrightarrow \quad A^T A = Id$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = (A^{-1})^T$$

donc $B = (A^{-1})^T = A$

Dans ce cas, $p' = A\, p$

$\|p'\| = \|A p\| = \|p\|$ donc

$$E_c = \frac{1}{2m} \|p\|^2 = \frac{1}{2m} \|p'\|^2$$