
Cours de Mécanique Analytique, en Licence 3 de physique.

Frédéric Faure¹Université Joseph Fourier.

25 novembre 2010

1. Institut Fourier, UMR 5582, 100 rue des Maths, BP74 38402 St Martin d'Hères. frederic.faure@ujf-grenoble.fr <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure>

Table des matières

1	De la formulation Newtonienne à la formulation Hamiltonienne de la mécanique	5
1.1	Rappels sur la mécanique de Newton du point	5
1.2	Formulation Hamiltonienne	10
1.2.1	Forces conservatives	10
1.2.2	Equations du mouvement de Hamilton	12
1.2.3	Exemple d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	14
1.3	Changement de coordonnées	16
1.3.1	Exemple simple	17
1.3.2	Loi générale. Vecteur tangent et cotangent.	18
1.3.2.1	Norme des vecteurs. Tenseur métrique.	19
1.3.3	Exemple	19
1.4	Etude de la dynamique Hamiltonienne indépendante de t , à 1 degré de liberté	23
1.4.1	L'oscillateur harmonique	23
1.4.2	Construction du diagramme de phase	25
1.4.2.1	Dynamique près d'un minimum de $U(x)$	26
1.4.2.2	Dynamique près d'un maximum de $U(x)$	27
1.4.3	Période des trajectoires périodiques	29
1.5	Propriétés générales d'un flot Hamiltonien	30
2	Déterminisme et chaos. Introduction	35
2.1	Dynamique dans un billard parfait	36
2.1.1	Description en terme de forces et de Hamiltonien	36
2.1.2	Section de Poincaré	37
2.2	Origine du chaos. Intersections des courbes stables et instables.	40
2.2.1	courbes stables et instables au point fixe hyperbolique	40
2.2.2	Intersection homoclines transverse des courbes stables et instables .	41
2.2.3	Etirement et repliement de l'espace de phase par la dynamique . . .	42
2.2.4	Conclusion : mélange et sensibilité aux conditions initiales	44
2.3	Un modèle simple de chaos déterministe : une application hyperbolique sur le tore \mathbb{T}^2	44
2.3.1	Propriétés chaotiques	45
2.3.2	Stabilité structurelle	47

2.3.3	Orbites périodiques	47
2.3.4	Conclusion	47
3	Principe variationnel et formulation Lagrangienne de la mécanique	48
3.1	Du principe variationnel aux équations de Hamilton	48
3.1.1	Exemple simple : le pendule.	52
3.1.2	Exemple avec notion de contrainte holonome et coordonnées généralisées	54
3.1.3	Exemple : particule chargée dans un champ électromagnétique	56
3.2	Principe variationnel et mécanique relativiste	56
3.2.1	L'espace temps	56
3.2.2	La métrique de l'espace temps	57
3.2.3	Exemples de temps propres	59
3.2.4	Principe variationnel	60
4	Formalisme Hamiltonien de la mécanique	63
4.1	Transport de fonctions sur l'espace de phase	63
4.1.1	Exemple simple de la translation en x sur l'espace \mathbb{R} :	68
4.1.2	Exemples de champs de vecteurs et leur flot (*)	69
4.1.3	Propriété de groupe du flot (*)	69
4.1.4	Evolution de fonctions et de points et de distributions (*) :	70
4.1.5	Non commutativité du flot : (*)	70
4.2	Les crochets de Poisson	71
4.3	Transformation canoniques et coordonnées canoniques	75
4.4	Variables angle-action à un degré de liberté	79
4.4.1	Exemple de l'oscillateur harmonique	81
5	Théorie des perturbations et théorie adiabatique	83
5.1	Méthode de la moyenne	83
5.1.1	Exemple simple	85
5.1.2	Exemple où la méthode de la moyenne ne marche pas	86
5.2	Méthode de la moyenne pour un système Hamiltonien	87
5.2.1	Problème de perturbation Hamiltonien	87
5.2.2	Problème adiabatique : Hamiltonien variant lentement avec le temps	88
5.2.3	Transformations canoniques dépendant du temps	90
6	Symétries et réductions	94
A	Quelques formules	95
A.1	Analyse et intégrales	95
A.1.1	Intégrales Gaussiennes	95
A.2	Algèbre	96
A.2.1	Diagonalisation d'une matrice 2×2	96

A.2.2	Inverse d'une matrice 2×2	96
A.2.3	Relations sur les matrices	96
A.3	Calcul différentiel dans \mathbb{R}^3	96
A.3.1	Rappels sur le calcul différentiel vectoriel.	97
A.3.2	En coordonnées sphériques :	98
A.3.3	Relations	98

Description de la “ mécanique analytique ” La “ mécanique analytique ” ou “ mécanique classique ” est une théorie physique fondamentale qui permet de décrire le mouvement des “ corps ” lorsqu'ils interagissent entre eux (particules, corps solides, ondes électromagnétiques, fluides, milieux continus), valable de l'échelle des molécules à l'échelle des planètes. Cette théorie a été développée principalement par :

1. Newton (1684) : formulation en terme de forces.
2. Lagrange (1787) et Hamilton (1827) : formulation variationnelle : le mouvement effectué est celui qui optimise une certaine “ action ” (comme le chemin le plus court entre deux point). C'est une formulation aussi très géométrique qui permet de comprendre et résoudre des problèmes plus compliqués.
3. Maxwell (1865) : dynamique des ondes électromagnétiques et des corps chargés en interaction. Les équations de Maxwell s'expriment aussi avec la formulation de Lagrange et Hamilton.
4. Einstein (1905, 1917) : “ théorie relativiste ” : modification de la théorie précédente, en “ unifiant ” l'espace et le temps, et en fournissant une expression géométrique de la gravitation.

Dans ce cours on étudiera essentiellement les formulations (2) de Lagrange et Hamilton. On apprendra des techniques pour résoudre des problèmes précis. On fera des rappels sur (1), et on abordera (3) et (4).

Déterminisme et chaos : Une caractéristique de la “ mécanique classique ” est qu'elle est déterministe : en principe, en connaissant la position et la vitesse de tous les corps à un instant donné, on peut prédire leur mouvement passé et futur.

Poincaré (1900) a cependant montré que ces mouvements peuvent être chaotiques et complexes, c'est à dire d'apparence désordonnée et en pratique imprévisibles.

Dans le cours, on abordera les problèmes de prédiction du mouvement et quelques résultats de la théorie du chaos qui introduit une description probabiliste du mouvement, à la base de la physique statistique et de la thermodynamique.

Relation avec la mécanique quantique : La “ mécanique classique ” a été bouleversée par la théorie de la mécanique quantique, qui est une description ondulatoire et probabiliste des corps développée après 1920, et indispensable à l'échelle atomique. La formulation de Hamilton est très importante dans la théorie quantique. (voir cours de L3 et M1).

Chapitre 1

De la formulation Newtonienne à la formulation Hamiltonienne de la mécanique

1.1 Rappels sur la mécanique de Newton du point

Remarque : un “point” signifie objet considéré comme ponctuel. C’est une idéalisation. Par exemple en mécanique céleste, pour étudier le mouvement des planètes autour du soleil, on assimile les planètes à des objets ponctuels. C’est une très bonne approximation.

Définition 1. Un **repère** à l'instant t est une origine $O(t)$ et trois axes orthonormés $(\vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$ dans l'espace :

$$\mathcal{R}(t) \equiv (O(t), \vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$$

Un **référentiel** est la donnée d'un repère $\mathcal{R}(t)$ à chaque instant t . Par rapport à ce référentiel, la **trajectoire** d'un point $M(t)$ est caractérisée par trois coordonnées réelles

$$\vec{X}(t) := (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

qui dépendent de t :

$$O\vec{M} = x(t)\vec{i}(t) + y(t)\vec{j}(t) + z(t)\vec{k}(t)$$

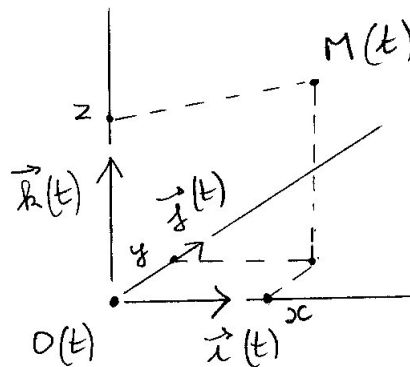
Par rapport à ce référentiel, on appelle

$$\vec{V}(t) := \frac{d\vec{X}}{dt} \quad \text{vitesse}$$

$$\vec{A}(t) := \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{X}}{dt^2} \quad \text{accélération}$$

$$\vec{P}(t) := m\vec{V} \quad \text{impulsion}$$

où m est la masse de la particule.



Remarques

- Souvent on spécifie un référentiel en indiquant l'objet auquel il est attaché. Par exemple : le référentiel du laboratoire, ou le référentiel terrestre, ou le référentiel héliocentrique (centré sur le soleil, axes fixes par rapport aux étoiles).

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

Il y a un référentiel privilégié en physique non relativiste, qui est le “**référentiel des étoiles lointaines**” (considérées comme fixes) où $O(t)$ et les axes sont fixes par rapport à ces étoiles . On commentera plus loin @@ ce sujet délicat.

Pour formuler la loi de Newton on introduit la notion de référentiel Galiléen :

Définition 2. Un **référentiel Galiléen** est un référentiel dont les axes sont fixes dans le référentiel des étoiles et dont l’origine se déplace à vitesse constante (mouvement rectiligne et uniforme)

Proposition 3. “Loi de Newton”. Newton (1687) a découvert que dans un référentiel Galiléen la trajectoire d’un objet est soumise aux équations du mouvement :

$$m\vec{A}(t) = \vec{F}(\vec{X}, \vec{V}, t)$$

où $\vec{F}(\vec{X}, \vec{V}, t)$ est la somme des forces subies (peut dépendre de \vec{X}, \vec{V}, t). L’unité de \vec{F} est

$$\frac{kg.M}{s^2} \equiv N \quad \text{Newton}$$

Déterminisme de la loi de Newton À un instant t on définit l’état du système par :

$$E(t) := \left(\underbrace{\vec{X}(t)}_{\text{position}}, \underbrace{\vec{P}(t)}_{\text{impulsion}} \right) \equiv (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$$

qui est un point dans un espace de dimension $3 + 3 = 6$, appelé **espace de phase** \mathcal{P} .

Comme $\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{A}$, la loi de Newton peut aussi s’écrire : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \vec{V}, t)$. Par ailleurs $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V} = \frac{\vec{P}}{m}$, donc on a un système d’équation :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\vec{P}}{m} \\ \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \frac{\vec{P}}{m}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

qui est de la forme générale :

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{F}(E, t) \quad (1.2)$$

dont l’inconnue est une trajectoire dans l’espace de phase $E : t \rightarrow E(t) \in \mathcal{P}$ qui est l’état de la particule à chaque instant, et $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^6$ est une fonction à valeurs vectorielles. Une équation de la forme (1.2) s’appelle une **équation différentielle ordinaire (EDO)**.

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

Il y a un résultat fondamental en mathématique appelé **théorème de Cauchy-Lipschitz** que l'on justifiera graphiquement plus loin :

Théorème 4. *Considérons une équation différentielle ordinaire sur \mathbb{R}^n :*

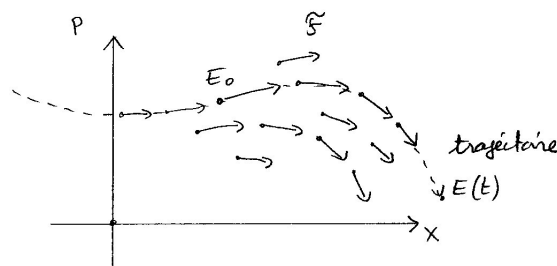
$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{F}(E, t) \in \mathbb{R}^n, \quad E \in \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

*Pour tout $E_0 \in \mathbb{R}^n$ appelé **état initial** et t_0 (date initiale), cette équation a une unique solution $E(t)$ telle que $E(t_0) = E_0$.*

Remarques :

- Pour la preuve du Théorème, voir [9, page 8]. En fait il faut une hypothèse sur la fonction \mathcal{F} qui doit être Lipschitz (C^1 suffit).
- En termes physique, cela signifie que connaissant l'état $E_0 = (X_0, P_0)$ (position et impulsion ou vitesse) de la particule à l'instant t_0 , cela détermine son état $E(t)$ dans le passé et dans le futur. On dit que l'équation de Newton est **déterministe**.
- Mais cela ne signifie pas qu'il est facile de trouver cette trajectoire. Il faut intégrer l'équation ODE. En général c'est impossible de façon exacte (sauf dans certains cas), même si la loi \mathcal{F} est simple. On peut le faire de façon approchée avec un ordinateur. Voir la discussion sur le "chaos déterministe" plus loin.
- Si l'on veut décrire plusieurs N particules il faut $3N$ variables de positions : $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N$ et $3N$ variables d'impulsion. On dit qu'il y a $3N$ **degrés de liberté**. L'espace de phase \mathcal{P} est de dimension $6N$. Pour simplifier, on notera $X \equiv (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N)$ les variables de position.

Interprétation graphique : L'équation EDO $\frac{dE}{dt} = \mathcal{F}(E, t)$ s'interprète en disant que en chaque point $E \in \mathcal{P}$ de l'espace de phase, $\mathcal{F}(E, t)$ est un vecteur qui doit être égal au vecteur vitesse de la trajectoire $\frac{dE}{dt}$. autrement dit la fonction $E \rightarrow \mathcal{F}(E, t)$ définit un **champ de vecteur sur l'espace de phase \mathcal{P}** , et la trajectoire $E(t)$ est une courbe qui correspond à une "ligne de champ" passant par l'état initial spécifié E_0 . L'existence et l'unicité semble claire sur le schéma.



À un instant t , l'application :

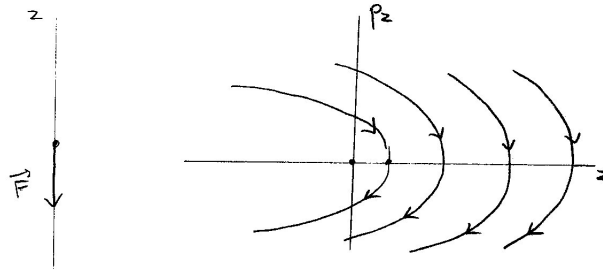
$$\phi_t : \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \mathcal{P} \\ E_0 & \rightarrow E(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

s'appelle le **flot au temps t** . On vérifie que

$$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2} \quad (1.5)$$

Exemples standard de forces

- Le **poids** $\vec{P} = -mg\vec{k}$ où \vec{k} est le vecteur vertical unitaire. On peut facilement résoudre l'équation du mouvement. Montrer que les trajectoires sont des paraboles dans l'espace de phase. Voir figure.



- La **force de Lorentz**

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}$$

où q est la charge de la particule et \vec{E}, \vec{B} sont les champs électriques et magnétiques à l'endroit de la particule. Si \vec{E}, \vec{B} sont constant et uniformes, on peut facilement résoudre les équations du mouvement, sinon c'est impossible en général.

- La **force de gravitation** exercée par une masse A sur une masse B :

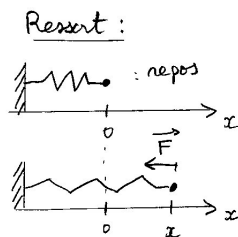
$$\vec{F}_{A \text{ sur } B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{|AB|^2} \vec{u}_{AB}$$

avec $\mathcal{G} := 6,6 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ et $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|AB|}$ est un vecteur unitaire. Pour deux corps on peut résoudre les équations de mouvement. Ce sont des ellipses. À partir de trois corps c'est impossible.

- **Force de rappel d'un ressort** : à une dimension x :

$$F = -Kx$$

avec $K > 0$: "constante de raideur du ressort", et x allongement du ressort. On peut facilement résoudre les équations du mouvement. Voir plus loin. Voir figure.



– Force de frottement :

$$\vec{F} = -\gamma \vec{V}$$

avec $\gamma > 0$. La force est opposée au mouvement (viscosité par exemple).

1.2 Formulation Hamiltonienne

1.2.1 Forces conservatives

Définition 5. Une **force conservative** est une force $\vec{F}(X, t)$ qui ne dépend pas de la vitesse, et telle qu'il existe une fonction $U(X, t)$ appelée **énergie potentielle associée** tq :

$$\vec{F} = -\vec{grad}(U)$$

Remarques :

- Le temps ne joue pas de rôle. On rappelle que en coordonnées cartésiennes le gradient d'une fonction est le champ de vecteur :

$$\vec{grad}(U) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

- A une dimension x la condition est donc

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

qui a toujours une solution :

$$U(x) = -\int_0^x F(x') dx' + U(0)$$

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

- Par contre en dimension > 1 il n’y a pas toujours de solution. D’après le théorème suivant, une condition nécessaire et suffisante sur \mathbb{R}^3 pour que la force soit conservative est que :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$$

La plupart des forces en physique sont conservatives (ce n’est pas par hasard, c’est que la formulation Hamiltonienne provient de la mécanique quantique qui est “plus fondamentale”. Voir discussion plus loin @@)

- Si on change l’énergie potentielle par une constante, cela ne change pas la force, donc ne change pas les équations du mouvement.

Théorème 6. (Lemme de Poincaré). Si $\vec{V}(x, y, z)$ est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^3 . Il existe une fonction $f(x, y, z)$ telle que $\vec{V} = \text{grad}(f)$ si et seulement si $\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$.

(dans ce théorème on démontre facilement le sens $\text{rot}(\text{grad}(\cdot)) = 0$).

On rappelle aussi que si $\vec{V} = \text{grad}(f)$ et si $\gamma = a \rightarrow b$ est un chemin quelconque entre deux points a et b alors

$$\int_{\gamma} \vec{V} d\vec{l} = f(b) - f(a) \quad (1.6)$$

Exemple 7. Voici un contre exemple simple de champ de force non conservatif sur le plan \mathbb{R}^2 :

$$\vec{F} = (F_x(y), 0),$$

Avec $F_x(y) = \alpha y$ pour simplifier. On calcule

$$\text{rot}(\vec{F}) = -\frac{dF_x(y)}{dy} = -\alpha$$

Donc si $\alpha \neq 0$ ce champ de force est non conservatif. Cela se comprend bien sur une figure @@. On vérifie que la relation (1.6) ne peut pas être vérifiée, en prenant par exemple les points $a = (0, 0)$ et $b = (1, 0)$ et deux chemins différents allant de a à b .

Exemples :

- Pour le poids, selon l’axe z , $F = -mg$, l’énergie potentielle de pesanteur est $U(z) = mgz$.

- Pour la gravitation, $\vec{F}_{A \text{ sur } B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB}$, $r = |AB|$,

$$U(r) = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r}$$

plus généralement toute force centrale (qui dépend de r seulement) est conservative.

- Pour le ressort, ou oscillateur harmonique, $F = -Kx$,

$$U(x) = \frac{1}{2} K x^2$$

- Les forces de frottement et de Lorentz ne sont pas conservatives d’après notre définition. On verra cependant que la force de Lorentz a une propriété analogue.

@@ principe action-réaction @@

1.2.2 Equations du mouvement de Hamilton

Proposition 8. “Formulation Hamiltonienne de la mécanique”. *Considérons un système qui ne subit que des forces conservatives. On note $U(X, t)$ l'énergie potentielle associée. On définit*

$$H(X, P, t) := \underbrace{\frac{P^2}{2m}}_{\text{en.cin.}} + \underbrace{U(X, t)}_{\text{en.pot.}} \quad (1.7)$$

qui est une fonction sur l'espace de phase appelée **Hamiltonien** (et dépendant aussi de $t \in \mathbb{R}$). Alors les équations de mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P} \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial X} \end{aligned} \quad (1.8)$$

appelée **équations de mouvement de Hamilton**. C'est un EDO (voir (1.3)) qui définit un **champ de vecteur Hamiltonien** dans l'espace de phase. La solution $E(t) = (X(t), P(t))$ est une trajectoire dans l'espace de phase. L'**énergie** de la particule est

$$\mathcal{E}(t) = H(X(t), P(t), t)$$

Démonstration. Tout simplement :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial X} = -\frac{\partial U}{\partial X} = F \end{aligned}$$

on retrouve les équations (1.1). □

Remarques :

- On rappelle que l'**énergie cinétique** (1er terme de (1.7)) s'écrit :

$$\mathcal{E}_c := \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{P}{m} \right)^2 = \frac{P^2}{2m}$$

- Pour plusieurs particules, le Hamiltonien est

$$H(X, P, t) = \frac{P_1^2}{2m_1} + \dots + \frac{P_N^2}{2m_N} + U(X_1, \dots, X_N, t)$$

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

- Attention : “système conservatif” ne signifie pas que l’énergie est conservée, mais que le volume dans l’espace de phase est conservé (voir plus loin). L’énergie elle n’est pas conservée si H dépend du temps.
- Pour les équations de mouvement provenant d’un “problème de Newton”, le Hamiltonien a la forme particulière (1.7). Mais il y a de nombreux problèmes en physique où le Hamiltonien est une fonction $H(X, P)$ qui peut avoir d’autres formes. Nous verrons des exemples. Beaucoup de résultats que nous donnons sont vrais pour une fonction $H(X, P)$ quelconque.

Proposition 9. Conservation de l’énergie : *en général, l’énergie $\mathcal{E}(t)$ peut varier au cours du temps. Mais si $U(X)$ est indépendant du temps (donc $H(X, P)$ est indépendant du temps) alors \mathcal{E} est constant. L’ensemble des états de même énergie \mathcal{E} s’appelle la **couche d’énergie** :*

$$\Sigma_{\mathcal{E}} := \{(X, P) \quad \text{tq} \quad H(X, P) = \mathcal{E}\}$$

Noter que si l’espace de phase est de dimension $6N$ alors $\dim(\Sigma_{\mathcal{E}}) = 6N - 1$ (pour les valeurs de \mathcal{E} non critiques, cf ci-dessous) .

Démonstration. On calcule dans le cas général :

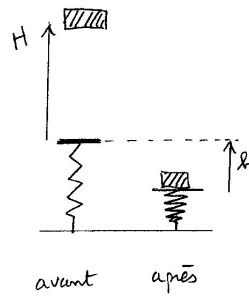
$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{d}{dt} (H(X(t), P(t), t)) = \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial P} \left(-\frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

qui est nul si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. □

Remarque :

- Par définition, un **point critique** de la fonction $H(X, P)$ est un point (X, P) de l’espace de phase tel que $dH(X, P) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial P} = 0$, c’est donc un point fixe ($\dot{X} = \dot{P} = 0$) d’après (1.8). On dit alors que l’énergie $\mathcal{E} = H(X, P)$ est une **valeur critique** de H . On fera une étude des points fixes dans le cas dimension 1, ci-dessous.
- En général savoir que l’énergie est conservée ne suffit pas du tout à résoudre les équations de mouvement et prédire la trajectoire $(X(t), P(t))$ ($3N$ degrés de liberté, $6N$ variables inconnues). Mais à 1 degré de liberté, (x, p_x) (alors $\dim(\mathcal{P}) = 2$, et $\dim(\Sigma_{\mathcal{E}}) = 2 - 1 = 1$). Si on connaît x_{final} par exemple il ne reste plus que une inconnue p_{final} que l’on peut trouver grâce à la conservation de l’énergie .

Exercice 10. (Pour illustrer que la conservation de l’énergie permet de résoudre des problèmes à 1 dimension). Une masse m initialement immobile tombe d’une hauteur H sur un ressort (de masse négligeable). Trouver l’allongement maximal h du ressort. Voir figure.



1.2.3 Exemple d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère une particule de charge électrique q soumise à un champ électrique $\vec{E}(X, t)$ et magnétique $\vec{B}(X, t)$. (rappel X sont les coordonnées spatiales), dans le cadre de la mécanique non relativiste classique (non quantique).

Rappelons en théorie de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) que :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'après le Lemme de Poincaré, cela implique que (sur \mathbb{R}^3) il existe un champ de vecteur $\vec{A}(X, t)$ appelé potentiel vecteur et $U(X, t)$ appelé potentiel scalaire tels que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\operatorname{grad}(U) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \operatorname{rot}(\vec{A})\end{aligned}$$

La **force de Lorentz** que subit une particule au point X est

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} := q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{V} \wedge \vec{B}$ désigne le produit vectoriel.

Voici la reformulation de l'équation de mouvement sous forme Hamiltonienne.

Proposition 11. *La fonction Hamiltonien suivante*

$$H(\vec{X}, \vec{P}, t) = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - q\vec{A}(\vec{X}, t) \right)^2 + qU(\vec{X}, t) \quad (1.9)$$

et les équations de mouvement de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{X}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

sont équivalentes à l'équation de Newton

$$m \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \quad (1.11)$$

L'impulsion est

$$\vec{P} = m\vec{V} + qA(\vec{X}, t) \quad (1.12)$$

Remarques :

- L'expression du produit vectoriel $\vec{V} \wedge \vec{B}$ dépend du système de coordonnées (cartésiennes ou sphériques etc...)
- Remarquer que le Hamiltonien H utilise les potentiels \vec{A}, U alors que l'équation de Newton n'utilise que les champs \vec{E}, \vec{B} .
- On sait que des potentiels différents correspondent à des champs identiques ("transformation de Jauge"). L'équivalence montrée dans ce théorème signifie que une différence entre ces potentiels n'affecte pas la trajectoire. En mécanique quantique, on utilise exclusivement le Hamiltonien H pour exprimer l'évolution d'un état quantique (équation de Schrödinger). En mécanique quantique un état quantique est sensible de façon non locale à un champ magnétique ("effet Aharanov Bohm").

Démonstration. On notera $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les composantes d'un vecteur. Avec le Hamiltonien ci-dessus, les équations de mouvement de Hamilton donnent pour $j = 1, 2, 3$

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{m} (p_j - qA_j)$$

(Cela donne $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ où $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ est la vitesse). On a aussi

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} (p_i - qA_i) \left(q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right) - q \frac{\partial U}{\partial x_j} = \left(\sum_{i=1}^3 v_i \left(q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right) - q \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

Alors

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = \frac{dp_j}{dt} - q \frac{dA_j}{dt}$$

or

$$\frac{dA_j(\vec{x}(t), t)}{dt} = \sum_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial A_j}{\partial t}$$

et

$$E_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t},$$

Donc

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_j}{dt^2} &= \left(\sum_{i=1}^3 v_i \left(q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right) - q \frac{\partial U}{\partial x_j} - q \left(\sum_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) \\ &= q \left(\sum_{i=1}^3 v_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \right) + q E_j \\ &= q (v \wedge B)_j + q E_j = F_{Lorentz} \end{aligned}$$

En dernière ligne on a utilisé $(v \wedge B)_j = \left(\sum_{i=1}^3 v_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \right)$ qu'il nous faut montrer maintenant. On a

$$\vec{B} = \vec{rot}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial X_2} - \frac{\partial A_2}{\partial X_3} \\ B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial X_3} - \frac{\partial A_3}{\partial X_1} \\ B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial X_1} - \frac{\partial A_1}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} v_2 B_3 - v_3 B_2 \\ etc \\ .. \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_2 B_3 - v_3 B_2 &= v_2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial X_1} - \frac{\partial A_1}{\partial X_2} \right) + v_3 \left(\frac{\partial A_3}{\partial X_1} - \frac{\partial A_1}{\partial X_3} \right) \\ &= \sum_j v_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial X_1} - \frac{\partial A_1}{\partial X_j} \right) \end{aligned}$$

car le terme $j = 1$ est nul. On a donc bien montré que $\sum_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) v_j = \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right)_i$. \square

1.3 Changement de coordonnées

Les équations de Hamilton formulées ci-dessus utilisent les coordonnées X de position pour repérer le point dans l'espace et les coordonnées P de l'impulsion. Il n'est pas clair jusqu'à présent ce que représente P et en particulier comment elles sont modifiées si on change de repère ou de système de coordonnées dans l'espace.

1.3.1 Exemple simple

Pour répondre à cette question considérons le cas très simple d'une masse m libre de se déplacer sur un cercle fixé de rayon l . La relation entre la coordonnées curviligne s et la coordonnées polaire (l'angle) θ est

$$s(t) = l\theta(t)$$

Par conséquent pour la vitesse on a la relation :

$$V_s = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} = lV_\theta \quad (1.13)$$

L'équation de mouvement de Hamilton écrite avec les coordonnées (s, P_s) (où P_s est l'impulsion associée à la coordonnée s) est

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_s}, \quad \frac{dP_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial s}$$

On cherche l'expression de P_θ (impulsion associée à la coordonnée θ) en fonction de P_s . Pour cela **on exige que le mouvement du point ne dépende pas de la coordonnée choisie s ou θ** . L'équation de mouvement s'écrit en θ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta}, \quad \frac{dP_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

avec la même fonction Hamiltonien (juste exprimée en coordonnées θ, P_θ). Ces équations doivent donner le même mouvement $\theta(t)$, donc

$$\frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial P_s} = l \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = l \frac{\partial H}{\partial P_s} \frac{\partial P_s}{\partial P_\theta} \Leftrightarrow \frac{\partial P_s}{\partial P_\theta} = \frac{1}{l}$$

donnant

$$P_s = \frac{1}{l} P_\theta$$

On remarque que le vecteur impulsion ne se transforme pas comme le vecteur vitesse (1.13), mais plutôt à l'inverse. Pour le retenir, on remarque que l'on a un invariant (formule indépendante du choix des coordonnées) qui a l'unité d'une énergie et qui est

$$P_s V_s = P_\theta V_\theta$$

En particulier l'énergie cinétique de la masse m s'écrit

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m V_s^2 = \frac{P_s^2}{2m} = \frac{P_\theta^2}{2ml^2}$$

Le Hamiltonien est donc selon le choix de coordonnées :

$$H(s, P_s) = \frac{P_s^2}{2m} + U(s), \quad H(\theta, P_\theta) = \frac{P_\theta^2}{2ml^2} + \tilde{U}(\theta).$$

(où $\tilde{U}(\theta) = U(s(\theta))$).

1.3.2 Loi générale. Vecteur tangent et cotangent.

Si sur l'espace on a un système de coordonnées X et que l'on passe à de nouvelles coordonnées $X' = f(X)$ avec f un difféomorphisme quelconque (cad fonction bijective C^∞ , dérivable un nombre infini de fois, et d'inverse C^∞), alors on cherche la loi de transformation des impulsions $P \rightarrow P'$. **On exige que le mouvement du point ne dépende pas du système de coordonnées choisi X ou X' .** Il suffit de reprendre le raisonnement de l'exemple précédent.

Comme la vitesse $V = \frac{dX}{dt}$ est un vecteur tangent aux trajectoires donc à l'espace, on dit que c'est un **vecteur tangent**. La vitesse se transforme selon

$$\boxed{V' = \frac{dX'}{dt} = \frac{\partial X'}{\partial X} \frac{dX}{dt} = Df.V} \quad (1.14)$$

où $(Df)_X = \left(\frac{\partial X'}{\partial X}\right)_X$ est appelée **différentielle** du difféomorphisme f ou **matrice Jacobienne** au point X . Précisément, si $X = (x^1, \dots, x^n)$ et $f(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))$ alors les éléments de matrice de Df sont $(Df)_j^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}$.

L'équation du mouvement s'écrit selon le système de coordonnées :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \text{ou} \quad \frac{dX'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P'}$$

Donc en notant $V = (V^1, \dots, V^n)$ et $P = (P_1, \dots, P_n)$ etc, on a

$$\begin{aligned} & (V')^i \sum_j (Df)_j^i . V^j \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial H}{\partial P'_i} = \sum_j (Df)_j^i . \frac{\partial H}{\partial P_j} = \sum_{j,k} (Df)_j^i . \frac{\partial H}{\partial P'_k} \frac{\partial P'_k}{\partial P_j} = \sum_{j,k} (Df)_j^i . \left(\left(\frac{\partial P'}{\partial P} \right)^T \right)_k^j \frac{\partial H}{\partial P'_k} \\ \Leftrightarrow & (Df) \left(\frac{\partial P'}{\partial P} \right)^T = I \Leftrightarrow \left(\frac{\partial P'}{\partial P} \right)^T = (Df)^{-1} \end{aligned}$$

où A^T dénote la matrice transposée. Donc

$$\boxed{P' = \left(Df^T \right)^{-1} . P} \quad (1.15)$$

ou

$$P = (Df)^T . P' \quad (1.16)$$

en comparant avec (1.14) on s'aperçoit que la formule de transformation est inversée. On dit que l'impulsion P est un **vecteur cotangent**. On remarque que la "contraction"

$$P'.V' = P.V$$

est un "invariant" (et a l'unité d'une énergie). On dit que P et V sont des **vecteurs duaux** l'un de l'autre.

1.3.2.1 Norme des vecteurs. Tenseur métrique.

Supposons que dans le système de coordonnées X la norme carrée $\|V\|^2$ du vecteur tangent V soit donnée par comme en coordonnées cartésiennes,

$$\|V\|^2 = \sum_{i=1}^n (V^i)^2.$$

Et que la norme carrée $\|P\|^2$ du vecteur cotangent P soit donnée par

$$\|P\|^2 = \sum_{i=1}^n (P_i)^2.$$

Notons

$$\langle A|B \rangle := \sum_i A^i B^i$$

Alors comme $V = (Df)^{-1} V'$,

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &= \langle V|V \rangle = \langle (Df)^{-1} V' | (Df)^{-1} V' \rangle = \langle V' | ((Df)^{-1})^T (Df)^{-1} V' \rangle \\ &= \langle V' | (Df \cdot (Df)^T)^{-1} V' \rangle = \langle V' | G' V' \rangle \end{aligned}$$

avec $G' = (Df \cdot (Df)^T)^{-1}$ appelé tenseur métrique dans les coordonnées X' . C'est une matrice $n \times n$.

De même pour un vecteur cotangent, $P = (Df)^T \cdot P'$ donc

$$\begin{aligned} \|P\|^2 &= \langle P|P \rangle = \langle (Df)^T \cdot P' | (Df)^T \cdot P' \rangle = \langle P' | (Df) (Df)^T \cdot P' \rangle \\ &= \langle P' | (G')^{-1} \cdot P' \rangle \end{aligned}$$

On remarque le tenseur métrique des vecteurs cotangents est l'inverse de celui des vecteurs tangents.

1.3.3 Exemple

Sur le plan $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, considérons les coordonnées polaires (r, θ) ou cartésiennes (x, y) reliées par le difféomorphisme

$$f : \begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}$$

alors la différentielle (matrice Jacobienne) est

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

donc d'après (A.4) page 96

$$(Df)^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad ((Df)^{-1})^T = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

alors d'après (1.15)

$$\begin{cases} p_x &= \cos \theta p_r - \frac{1}{r} \sin \theta p_\theta \\ p_y &= \sin \theta p_r + \frac{1}{r} \cos \theta p_\theta \end{cases}$$

Inversement d'après (1.16) :

$$\begin{cases} p_r &= \cos \theta p_x + \sin \theta p_y = \frac{1}{r} (x p_x + y p_y) \\ p_\theta &= -r \sin \theta p_x + r \cos \theta p_y = -y p_x + x p_y \end{cases} \quad (1.17)$$

Le vecteur vitesse a pour composantes d'après (1.14)

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = (Df) \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta V_r - r \sin \theta V_\theta \\ \sin \theta V_r + r \cos \theta V_\theta \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

La norme carrée du vecteur vitesse est donc

$$\|V\|^2 = V_x^2 + V_y^2 = V_r^2 + r^2 V_\theta^2$$

On peut écrire $\|V\|^2 = \langle V|GV \rangle$. Le tenseur métrique, en coordonnées polaires, est donc la matrice diagonale $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$. Pour le vecteur impulsion :

$$\|P\|^2 = p_x^2 + p_y^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2$$

L'énergie cinétique s'écrit donc

$$E_{cin} = \frac{1}{2m} \|p\|^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right)$$

Remarque : en mathématiques (géométrie différentielle), on montre que la vraie nature d'un vecteur cotangent comme le vecteur impulsion est une **forme différentielle** notée :

$$P = p_x dx + p_y dy = p_r dr + p_\theta d\theta$$

Cette écriture utilisant les différentielles est très pratique car indépendante du système de coordonnées. En effet

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right) d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

et

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

donc on obtient directement :

$$\begin{aligned} P &= p_x dx + p_y dy = p_x (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + p_y (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= \underbrace{(\cos \theta p_x + \sin \theta p_y)}_{p_r} dr + \underbrace{(-r \sin \theta p_x + r \cos \theta p_y)}_{p_\theta} d\theta \end{aligned}$$

et on retrouve (1.17).

De la même façon la vraie nature d'un vecteur tangent comme le vecteur vitesse est un **opérateur différentiel d'ordre un** noté :

$$\begin{aligned} V &= V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y} \\ &= V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

cette écriture est très pratique car indépendante du système de coordonnées. En effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

donc

$$V = V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = \underbrace{(V^r \cos \theta - V^\theta r \sin \theta)}_{V^x} \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{(V^r \sin \theta + V^\theta r \cos \theta)}_{V^y} \frac{\partial}{\partial y}$$

et on retrouve (1.18).

On utilisera ces notions à la section 4.1 page 63.

Exercice 12. Sur \mathbb{R}^3 , trouver les formules de changement de coordonnées pour le vecteur vitesse $V \equiv (V_r, V_\theta, V_\varphi) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right)$ (qui est un vecteur tangent) et pour le vecteur impulsion P (vecteur cotangent), entre les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et cartésiennes $(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$. Montrer que

$$\|V\|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V_r^2 + r^2 V_\theta^2 + (r \sin \theta)^2 V_\varphi^2$$

et

$$\|P\|^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P_r^2 + \frac{1}{r^2} P_\theta^2 + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} P_\varphi^2$$

Déduire l'expression de l'énergie cinétique $E_{cin} = \frac{1}{2} m \|V\|^2 = \frac{\|P\|^2}{2m}$.

Solution La transformation est

$$f : \begin{cases} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Sa différentielle est donc

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Donnant d'après (1.14) les composantes de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix} = (Df) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

La norme est

$$\|V\|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = \langle V|V \rangle$$

où $\langle A|B \rangle = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. On note $V' = (V_r, V_\theta, V_\varphi)$. Alors $V' = (Df) V$ donc

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &= \langle V|V \rangle = \langle (Df)^{-1} V' | (Df)^{-1} V' \rangle = \langle V' | ((Df)^{-1})^T (Df)^{-1} V' \rangle \\ &= \langle V' | (Df \cdot (Df)^T)^{-1} V' \rangle = \langle V' | G' V' \rangle \end{aligned}$$

avec $G' = (Df \cdot (Df)^T)^{-1}$ appelé tenseur métrique en coordonnées sphériques. On calcule alors :

$$G' = Df \cdot (Df)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 (\sin \theta)^2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\|V\|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V_r^2 + r^2 V_\theta^2 + (r \sin \theta)^2 V_\varphi^2$$

De même pour l'impulsion, $P = (Df)^T \cdot P'$ donc

$$\begin{aligned} \|P\|^2 &= P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \langle P|P \rangle = \langle (Df)^T \cdot P' | (Df)^T \cdot P' \rangle = \langle P' | (Df) (Df)^T \cdot P' \rangle \\ &= \langle P' | (G')^{-1} \cdot P' \rangle \end{aligned}$$

On remarque le tenseur métrique est l'inverse et donc

$$\|P\|^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P_r^2 + \frac{1}{r^2} P_\theta^2 + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} P_\varphi^2$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \text{Det}(Df) &= r^2 \sin \theta \\ (Df)^{-1} &= \dots \end{aligned}$$

1.4 Etude de la dynamique Hamiltonienne indépendante de t , à 1 degré de liberté

C'est quasiment le seul problème soluble en mécanique. On verra plus loin @@ une classe plus large de problèmes solubles appelés systèmes intégrables.

Ici on suppose que le Hamiltonien est

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

avec $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction énergie potentielle $U(x)$ donnée. On cherche à prédire la trajectoire $(x(t), p(t))$ à partir d'une condition initiale $(x(0), p(0))$ donnée.

On rappelle les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

On va utiliser la conservation de l'énergie $E = H(x(t), p(t))$.

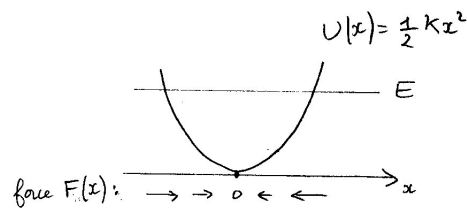
Commençons par un exemple simple

1.4.1 L'oscillateur harmonique

Soit

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

La force est $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -Kx$.



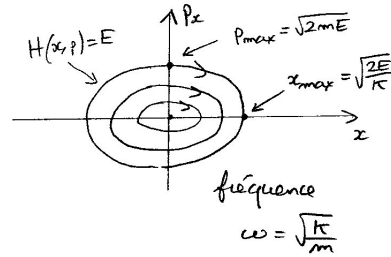
alors

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 \tag{1.19}$$

l'équation $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 = E$ constante, est l'équation d'une ellipse dans l'espace de phase (x, p) . Ses extrémités $(x_{max}, 0), (0, p_{max})$ sont données par

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{K}}, \quad p_{max} = \sqrt{2mE}$$

Voir figure.



Pour connaître précisément le mouvement $(x(t), p(t))$ sur cette ellipse, il faut résoudre les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -Kx \end{aligned}$$

Ce qui est particulier dans ces équations est que le terme de droite est linéaire en x, p (cad de degré 1). La petite difficulté est que les deux équations sont couplées. Un tel système est soluble avec de l'algèbre linéaire (voir TD). Pour simplifier, ici on exploite le fait que l'expression est simple. Posons (avec $E = 1$) le changement de variable :

$$X := \frac{x}{x_{max}} = \sqrt{\frac{K}{2}}x, \quad Y := \frac{p}{p_{max}} = \frac{p}{\sqrt{2m}} \quad (1.20)$$

Posons

$$\omega := \sqrt{\frac{K}{m}}$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sqrt{\frac{K}{2}}\dot{x} = \sqrt{\frac{K}{2}}\left(\frac{p}{m}\right) = \sqrt{\frac{K}{m}}Y = \omega Y \\ \dot{Y} &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\dot{p} = \frac{-K}{\sqrt{2m}}x = -\omega X \end{aligned}$$

Soit

$$Z := X + iY$$

alors

$$\dot{Z} = \dot{X} + i\dot{Y} = -i\omega(X + iY) = -i\omega Z$$

Cette équation est très simple à résoudre :

$$Z(t) = Z(0)e^{-i\omega t}, \quad (1.21)$$

qui est un mouvement de rotation à vitesse angulaire $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ dans le sens indirect.

En notant $Z(0) = Ae^{i\varphi}$, on déduit que

$$X(t) = \Re(Z(t)) = A \cos(-\omega t + \varphi), \quad Y(t) = \Im(Z(t)) = A \sin(-\omega t + \varphi)$$

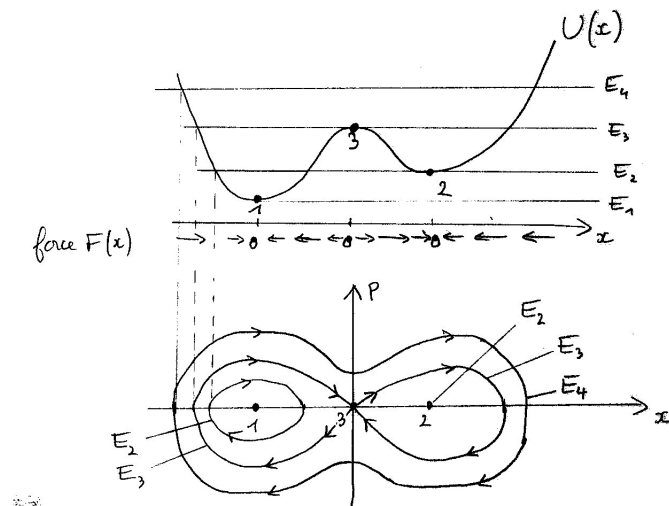
Remarquer que

$$H = X^2 + Y^2 = \bar{Z}Z$$

Avec le changement de variable (1.20) les ellipses dans les coordonnées de départ (x, p) sont devenues des cercles dans les coordonnées (X, Y) .

1.4.2 Construction du diagramme de phase

On considère une fonction $U(x)$ quelconque. Voir figure.



Le **diagramme de phase** est l'ensemble des lignes de niveau de la fonction $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$.

Proposition 13. *Pour un système Hamiltonien $H(x, p)$ à 1 degré de liberté $((x, p) \in \mathbb{R}^2)$ indépendant du temps, les **lignes de niveau** de la fonction $H(x, p)$ sont des courbes de dimension 1, et les trajectoires $x(t), p(t)$ sont contraintes à se déplacer sur ces courbes à cause de la conservation de l'énergie. D'après $p = m \frac{dx}{dt}$, le sens de parcourt est lié au signe de p .*

Attention : une ligne de niveau peut contenir plusieurs trajectoires. (dans l'exemple, la ligne $H(x, p) = E_2$ contient 2 trajectoires, et $H(x, p) = E_3$ contient 3 trajectoires, mais $H(x, p) = E_4$ contient 1 trajectoire).

On observe que la plupart des trajectoires sont des trajectoires fermées, appelées **orbites périodiques**.

Exercice 14. Trouver un exemple de diagramme de phase contenant une trajectoire non fermée, mais bornée.

Dans la suite on va répondre aux questions suivantes.

Questions :

- Comportement des trajectoires près des points fixes 1,2,3 ? réponse : proposition 15 page 27 et proposition 16 page 29.
- Périodes T des trajectoires fermées ? réponse : proposition 17 page 30.
- Existe-t-il un système de coordonnées sur l'espace de phase simplifiant l'expression des trajectoires ? (réponse : coordonnées actions-angle, voir page 79).

Remarque :

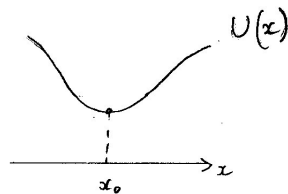
- De façon générale, un **point d'équilibre** ou **point fixe** du champ de vecteur Hamiltonien est un point tel que

$$\dot{X} = 0, \quad \dot{P} = 0$$

D'après (12), cela donne $P = 0$ et $\frac{dU}{dx} = 0$. Cela correspond donc aux extrema locaux de la fonction potentiel $U(x)$. On va étudier successivement, le cas minimum local et maximum local de $U(x)$.

1.4.2.1 Dynamique près d'un minimum de $U(x)$

cela correspond aux points 1 et 2 sur la figure @@.



Le développement de Taylor près d'un minimum x_0 de $U(x)$ s'écrit :

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0)U'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 U''(x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$$

on a $U'(x_0) = 0$ et on peut supposer $U(x_0) = 0$. On fait un changement de variable $x' = (x - x_0)$, ce qui revient à garder x et poser $x_0 = 0$. Si on pose $K := U''(x_0)$ on obtient

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

le premier terme est l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique que l'on a étudié. Reprenant la conclusion (1.21) on obtient pour résumer :

Proposition 15. *Près d'un minimum de $U(x)$, les trajectoires tournent dans le sens indirect et ont une fréquence*

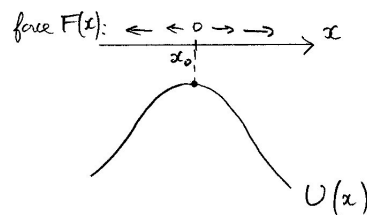
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}} \quad (1.22)$$

(donc de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$)

Attention : la fréquence $\omega(E)$ dépend de l'énergie (à cause des termes négligés en $\mathcal{O}(x^3)$), la valeur ω_0 est la limite de $\omega(E)$ lorsque $E \rightarrow U_{min}$. On fera une étude à tout ordre dans la section @@.

1.4.2.2 Dynamique près d'un maximum de $U(x)$

cela correspond aux points 3 sur la figure @@.



De même le développement de Taylor du potentiel donne :

$$U(x) = -\frac{1}{2}Kx^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}Kx^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

avec $K = -U''(0) > 0$. Observons que les lignes de niveau de $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}Kx^2 = \mathcal{E}$ sont des hyperboles de pente $\pm \left(\frac{K}{m}\right)$. Ce sont les trajectoires. Mais pour trouver le mouvement $x(t), p(t)$ sur ces hyperboles il faut résoudre les équations de mouvement.

Soit on reprend les formules ci-dessus en changeant $K \rightarrow -K$, soit on adopte une autre approche (méthode standard de résolution d'une EDO linéaire). On n'écrira pas les termes négligés. On pose

$$\lambda := \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$$

Les équations de mouvement (12) donnent

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= Kx \end{cases} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ K & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{dE(t)}{dt} = A.E(t)$$

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONNIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

avec $E := (x, p)$ état dans l'espace de phase. Formellement la solution est $E(t) = \exp(tA) E(0)$ mais il faut calculer la matrice $\exp(tA)$. Pour cela on diagonalise¹ la matrice A (voir Annexe) :

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2\lambda K}} \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ K & K \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

On rappelle que la matrice de passage P est aussi la matrice des coordonnées des vecteurs propres $P \equiv (V_1, V_2)$ disposés en colonnes. En particulier on déduit que la pente des vecteurs propres V_1, V_2 dans l'espace de phase est (voir figure) :

$$\text{pente} = \pm \frac{K}{\lambda} = \pm \sqrt{Km}$$

Alors avec le changement de variable $X := P^{-1}E = (x_1, x_2)$, on obtient

$$\dot{E} = AE = PDP^{-1}E \Leftrightarrow \dot{X} = DX$$

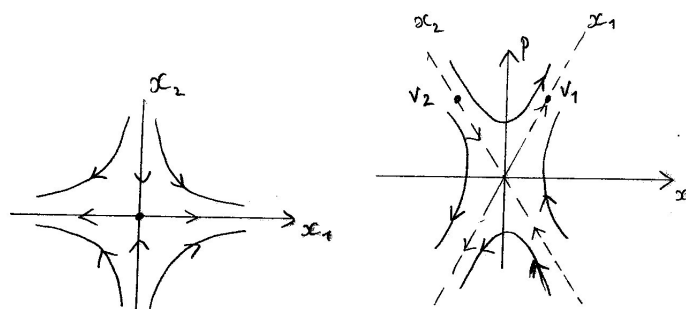
avec ces nouvelles variables, comme D est diagonale on a deux équations indépendantes qui se résolvent facilement :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 & \implies x_1(t) &= x_1(0) e^{\lambda t} \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 & \implies x_2(t) &= x_2(0) e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(De façon équivalente cela revient à écrire $X(t) = e^{tD} X(0)$. En diagonalisant la matrice $A = PDP^{-1}$ on a déduit l'expression de $e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$). On a donc

$$x_1(t) x_2(t) = x_1(0) x_2(0) = \text{cste}$$

donc les trajectoires sont des **hyperboles**.



On a donc un modèle simple de la dynamique au voisinage d'un point instable comme le point 3 sur la figure @@. Pour résumer :

1. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans xcas, écrire : $A := [[0, 1/m], [K, 0]]$; $D := \text{egv1}(A)$; $P := \text{egv}(A)$; On vérifia que $\text{simplify}(P * D * \text{inv}(P))$; redonne bien la matrice A .

Proposition 16. *Un maximum de $U(x)$ correspond à un **point d'équilibre instable** de la dynamique. Près de ce point, les trajectoires sont des hyperboles, avec un **coefficient d'instabilité** ou **coef de Lyapounov** :*

$$\lambda = \sqrt{\frac{-U''(x_0)}{m}}$$

Les pentes des directions stables et instables dans l'espace de phase est $\pm\sqrt{m|U''(x_0)|}$.

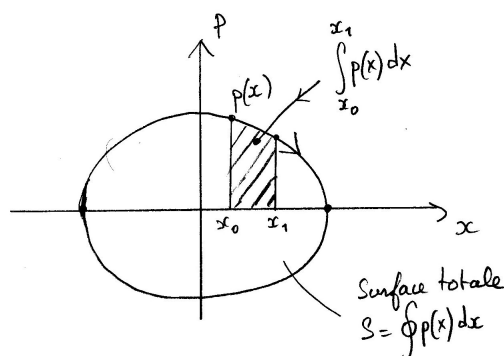
1.4.3 Période des trajectoires périodiques

On considère un Hamiltonien $H(x, p)$ à 1 degré de liberté, indépendant du temps. On a vu que les trajectoires sont des lignes de niveau de H . Il y a différents cas : la ligne de niveau peut partir à l'infini, ou être fermée (trajectoire périodique). Il y a des cas particuliers qui correspondent au minimum ou maximum de U (plus généralement aux "point critiques" de H tels que $DH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0$), et qui correspondent à des points fixes.

Dans cette section on considère une trajectoire γ fermée. On appelle $T(\gamma)$ sa période (temps que met un point pour faire le tour). On appelle $H(\gamma)$ son énergie (valeur de H sur γ), et on note $S(\gamma)$ la surface dans l'espace de phase (x, p) encerclée par cette trajectoire fermée. Voici une formule simple donnant $S(\gamma)$:

$$S(\gamma) = \oint_{\gamma} p(x) dx$$

où $p(x)$ est l'expression de p en fonction de x pour un point $(x, p(x)) \in \gamma$. L'intégrale se fait sur γ dans le sens indirect.

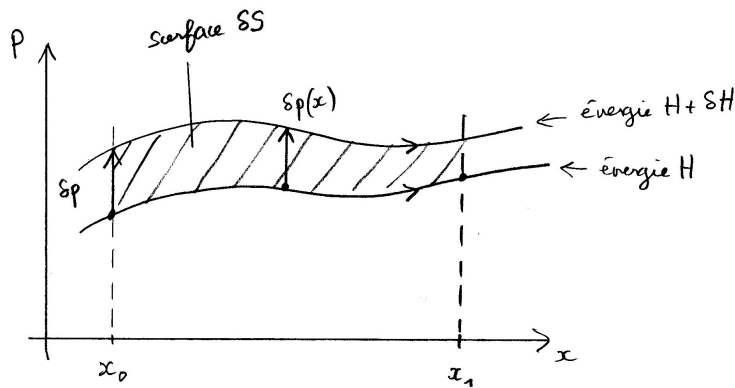


Près de la trajectoire γ il y a d'autres trajectoires. Ces trajectoires forment une famille à une dimension qui peuvent être caractérisée par leur énergie H ou leur surface S . On peut aussi considérer que l'énergie $H(S)$ dépend de la surface (ou inversement que la surface dépend de l'énergie $S(H)$).

Proposition 17. La période d'une trajectoire T (ou sa fréquence $\omega = \frac{2\pi}{T}$) est donnée par

$$\frac{dH(S)}{dS} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.23)$$

Démonstration. On considère une portion de trajectoire d'énergie H qui parcourt l'intervalle $[x_0, x_1]$ entre les instants t_0 et t_1 . On considère aussi une autre trajectoire très voisine d'énergie $H + \delta H$ qui parcourt le même intervalle $[x_0, x_1]$. Ces deux trajectoires sont séparées d'une surface δS . Voir figure.



On a

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{x_0}^{x_1} (\delta p) dx = \int_{t_0}^{t_1} (\delta p) \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta p) \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta H) dt = (\delta H) \int_{t_0}^{t_1} dt = (\delta H) (t_1 - t_0) \end{aligned}$$

On déduit que $\frac{\delta H}{\delta S} = \frac{1}{t_1 - t_0}$. Le même argument appliqué à une période donne $\frac{dH}{dS} = \frac{1}{T}$. \square

Exercice 18. Près d'un minimum de potentiel, calculer la surface S des trajectoires en fonction de leur énergie et retrouver l'expression (1.22) à partir de (1.23).

1.5 Propriétés générales d'un flot Hamiltonien

Rappel sur la définition mathématique de la divergence d'un champ de vecteur.

Définition 19. Si $V : X \in \mathbb{R}^n \rightarrow V(X) \in \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n (avec $n \geq 1$), qui génère des trajectoires d'après l'équation (EDO) :

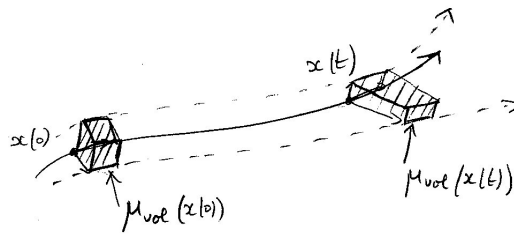
$$\frac{dX}{dt} = V(X)$$

si $\mu_{vol}(X(t))$ est la mesure d'un élément de volume au point $X(t)$ transporté par les trajectoires, alors la **divergence du champ de vecteur** au point $X = X(0)$ notée $\text{div}(V)(X)$, est définie par :

$$\frac{d\mu_{vol}(X(t))}{dt} = \text{div}(V)(X) \cdot \mu_{vol}(X)$$

en particulier $\text{div}(V)(X) = 0$ (respect. > 0) signifie que le volume infinitésimal est conservé (respect. augmenté).

ref : voir [9, p.125].



Remarques :

- en coordonnées cartésiennes, si $V = (V_1, V_2 \dots V_n)$

$$\text{div}(V) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$$

- Si \mathcal{V} est un volume (ensemble de points de dimension 3), on note $\text{Vol}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \mu$ son volume ($\mu = d^3x$ en coordonnées cartésiennes). Si $\mathcal{V}(t)$ est son déplacement par le flot au temps t , alors d'après la définition

$$\frac{d\text{Vol}(\mathcal{V}(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} \mu \right) = \int_{\mathcal{V}} \frac{d\mu}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(V) \cdot \mu = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(V) \cdot d^3x$$

D'après le théorème de Stokes, cette intégrale se réduit au flux de V sur le bord $S = \partial\mathcal{V}$ ([9, p.128]) :

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div}(V) \cdot d^3x = \int_S V \cdot d^2s$$

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

- En mécanique des fluides, un champ de vecteur de divergence nulle correspond à un fluide incompressible.

Théorème 20. “de Liouville” : Le champ de vecteur Hamiltonien dans l'espace de phase est de divergence nulle, i.e. les trajectoires conservent les éléments de volume. C'est pourquoi on dit que un système Hamiltonien est **conservatif**.

Démonstration. Dans l'espace de phase (X, P) , le champ de Vecteur Hamiltonien a pour composantes $V = \left(\frac{\partial H}{\partial P}, -\frac{\partial H}{\partial X}\right)$. Donc

$$\operatorname{div}(V) = \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial P} - \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial X} = 0$$

□

Remarques :

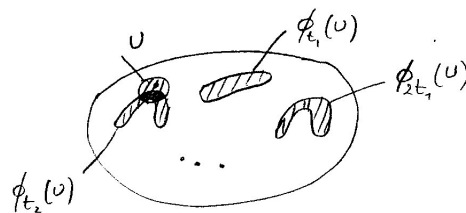
- ce résultat est valable même si le Hamiltonien dépend du temps (et donc si l'énergie n'est pas conservée). Il est valable aussi pour toutes dimensions.
- En termes imagés, on peut dire que le flot Hamiltonien est “incompressible” dans l'espace de phase.

Une conséquence étonnante du théorème de Liouville est le “théorème de retour de Poincaré”. Ici ϕ_t dénote le flot Hamiltonien défini en (1.4).

Théorème 21. “de retour de Poincaré”. Si la région de l'espace de phase où évoluent les trajectoires est de volume fini alors : soit $E(0)$ un état initial quelconque, et U un voisinage arbitrairement petit de $E(0)$ et t_1 un temps arbitrairement long. Il existe $t_2 > t_1$ tel que

$$\phi_{t_2}(U) \cap U \neq \emptyset$$

En d'autres termes, il existe un état $\tilde{E} \in U$ arbitrairement proche de $E(0)$ tel que $\tilde{E}(t_2) \in U$ cad l'état \tilde{E} revient proche de $E(0)$ au temps t_2 .



Démonstration. On note Vol le volume (fini) de l'espace de phase où évoluent les trajectoires. Supposons que les ensembles $U, \phi_{t_1}(U), \phi_{2t_1}(U), \dots, \phi_{nt_1}(U)$ sont tous disjoints. Alors

$$Vol \geq Vol(U) + \dots + Vol(\phi_{nt_1}(U)) = nVol(U)$$

car $Vol(\phi_t(U)) = Vol(U)$ d'après le théorème de Liouville. Pour $n \rightarrow \infty$ si les ensembles sont disjoints alors on aurait $Vol = \infty$ ce qui est impossible. Donc au moins deux ensembles se coupent : il existe n, m t.q.

$$\phi_{nt_1}(U) \cap \phi_{mt_1}(U) \neq \emptyset$$

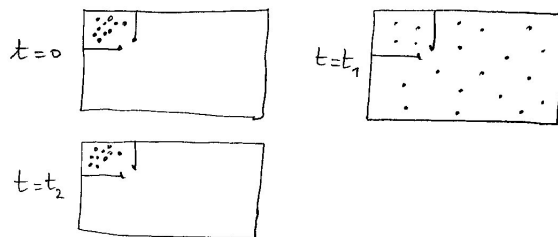
On applique le flot ϕ_{-nt_1} à cette relation (et (1.5)). Comme ϕ_t est une bijection, on obtient

$$U \cap \phi_{(m-n)t_1}(U) \neq \emptyset$$

On obtient la relation recherchée $\phi_{t_2}(U) \cap U \neq \emptyset$ en posant $t_2 = (m-n)t_1$. Pour finir, soit un point dans cette intersection : $E \in (\phi_{t_2}(U) \cap U)$. Posons $\tilde{E} = \phi_{-t_2}(E)$. Comme $E \in \phi_{t_2}(U)$, on déduit que $\tilde{E} \in \phi_{-t_2}(\phi_{t_2}(U)) = U$. On a $E = \phi_{t_2}(\tilde{E}) \in U$ aussi. \square

Exemples :

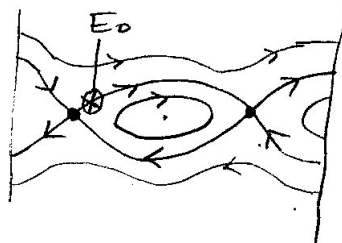
- Un gaz de N particules dans une boîte. Les variables de positions X_1, \dots, X_N sont bornées, et comme l'énergie totale est conservée, les variables d'impulsion sont aussi bornées. Donc le volume de l'espace de phase accessible est fini. Le théorème de retour de Poincaré s'applique donc. Une conséquence surprenante est : si à $t = 0$ les particules sont dans un coin de la boîte (état E_0 très particulier), alors il existe un état initial \tilde{E} quasiment identique, tel que après un temps t_2 (arbitrairement long) les particules reviendront dans un état très proche de \tilde{E} . Voir figure. Ce résultat est cependant de nature mathématique (i.e. valable dans le cadre idéalisé de la mécanique classique) et possède très peu d'intérêt physique. Par exemple ce temps de retour est extrêmement long² pour un gaz de particules, et des effets négligés (comme du bruit ou des effets quantiques) font que cette analyse n'est pas correcte.



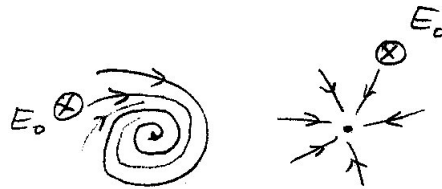
2. Pour N particules dans une boîte, la couche d'énergie Σ_E dont le volume correspond au "nombre d'états accessibles" \mathcal{N} croît exponentiellement avec N (pour cette raison en physique statistique, l'entropie microcanonique est définie par $\mathcal{S} := k_B \log \mathcal{N}$). En supposant que la dynamique des particules est **ergodique** (ce qui signifie que presque toutes les trajectoires explorent toute la couche d'énergie Σ_E et passe dans chaque région un temps proportionnel au volume de cette région) alors le temps de retour de Poincaré augmente avec N aussi exponentiellement. Pour un gaz de $N \simeq 10^{23}$ particules ce temps de retour théorique $t \simeq e^{C.N}$ dépasse toute signification physique.

CHAPITRE 1. DE LA FORMULATION NEWTONNIENNE À LA FORMULATION HAMILTONIENNE

- On peut facilement montrer (par récurrence) que ce “retour de Poincaré” se produit un nombre infini de fois.
- Attention que le retour de Poincaré ne se produit pas pour *tout* état. Trouver un contre exemple, voir Figure @@.



- Les figures @@ montrent que ce phénomène de retour n'est pas valable si le flot n'est pas conservatif.



Chapitre 2

Déterminisme et chaos. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons vu avec le théorème 4 page 8 que les équations de mouvement de Newton ou Hamilton sont **déterministes** au sens où pour un état initial donné $E(0) = (X(0), P(0))$ (point donné dans l'espace de phase) l'état futur et passé $E(t) = (X(t), P(t))$ est uniquement déterminé.

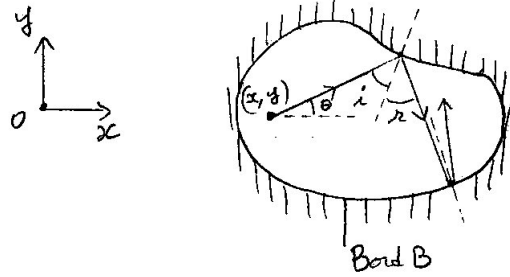
A la fin du chapitre précédent nous avons étudié en détail la dynamique d'un système **Hamiltonien $H(X, P)$ indépendant du temps et à 1 degré de liberté ($d = 1$)**. Il est apparu que les équations de mouvement se représentent par un champ de vecteur dans l'espace de phase (x, p) de dimension $2d = 2$ et il a été possible de décrire les trajectoires $E(t)$ possibles selon l'état initial. Ces trajectoires ont un comportement très simple : ce sont des courbes fermées (trajectoires périodiques) pour la plupart.

Dans ce chapitre nous allons voir que à partir de deux degrés de liberté $d = 2$, ou 1 degré de liberté $d = 1$ mais $H(t)$ dépend du temps, alors *en général* il est impossible de décrire les trajectoires, bien que le système soit déterministe. Ces trajectoires ont un comportement trop "complexe", "chaotique". On va caractériser cela en termes précis.

Un problème à deux degrés de liberté est par exemple une particule de masse m se déplaçant dans le plan (x, y) soumise à des forces dérivant d'une énergie potentielle $U(x, y)$. Le Hamiltonien est :

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + U(x, y) \equiv \frac{P^2}{2m} + U(X), \quad \vec{P} = (p_x, p_y), \quad X = (x, y)$$

Nous commençons par étudier un problème avec deux degrés de liberté assez simple appelé **billard parfait**.



2.1 Dynamique dans un billard parfait

Dans le plan \mathbb{R}^2 horizontal avec les coordonnées $X = (x, y)$ on considère une courbe fermée B qui est le bord du billard. Dans le billard, une particule ponctuelle de masse m se déplace en ligne droite à vitesse constante (on suppose qu'il n'y a pas de frottements) et elle rebondit parfaitement sur le bord B (angle de réflexion = angle d'incidence et la norme de la vitesse est conservée).

La question est de prédire la trajectoire $x(t), y(t)$ suivit par la particule.

2.1.1 Description en terme de forces et de Hamiltonien

- Dans le billard, la particule de subit aucune force dans le plan horizontal, donc $0 = F(X) = -\text{grad}(U(X))$ donc l'énergie potentielle est $U(X) = \text{cste} = 0$ (on peut choisir la constante nulle). Le Hamiltonien est donc seulement constitué de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E} = H(X, \vec{P}) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{P^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$$

avec le vecteur impulsion $\vec{P} = m\vec{V} = (p_x, p_y)$.

- La conservation de l'énergie implique que la norme de la vitesse $V = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$ est constante. Donc à une énergie donnée \mathcal{E} , les variables qui peuvent évoluer sont les trois variables (x, y, θ) où θ est la direction de la vitesse (et de \vec{P}). On retrouve le résultat que la **couche d'énergie** $\Sigma_{\mathcal{E}}$ est de dimension $2d - 1 = 4 - 1 = 3$.
- Dans le billard, entre deux rebonds, l'équation de Newton $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = 0$ (ou l'équation de Hamilton $\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} = 0$) implique que $\vec{P} = m\vec{V}$ est constant.
- Pour modéliser le rebond parfait sur le bord du billard on considère que l'énergie potentielle $U(X)$ est infinie sur le bord (cela idéalise une fonction qui croit très vite).

Intérêt en physique Le modèle du billard parfait est un problème très simplifié, mais qui peut servir à décrire des particules piégées dans des cavités, par exemple

- des molécules dans un volume (modèle du gaz parfait)
- des électrons dans un conducteur métallique,

- des neutrons et protons dans le noyau nucléaire,
- des rayons lumineux dans une cavité aux parois réfléchissantes,
- des ondes (acoustiques, électromagnétiques, sismiques) dans des cavités ou dans des guides d'ondes.

2.1.2 Section de Poincaré

Pour simplifier l'étude des trajectoires dans cet espace $\Sigma_{\mathcal{E}}$ de dimension trois on introduit la notion importante de Section de Poincaré.

A chaque rebond de la bille sur le bord B , on note q l'abscisse curviligne (comptée à partir d'un point du bord de référence), et i l'angle entre la normale au bord et la vitesse. On note

$$p := \sin(i) \in]-1, 1[$$

La suite des rebonds définit une suite :

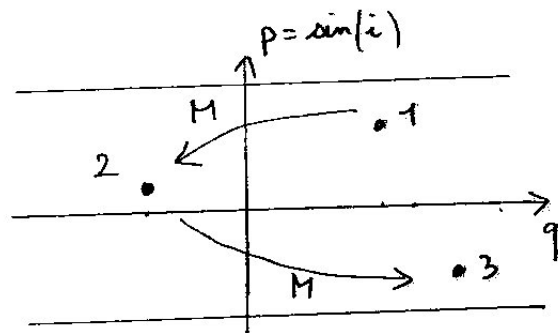
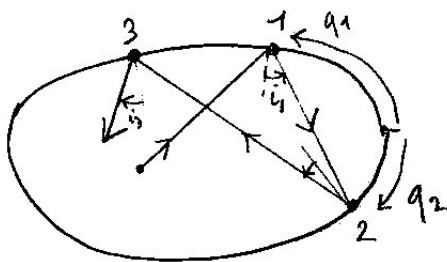
$$(q_1, p_1) \rightarrow (q_2, p_2) \rightarrow (q_3, p_3) \dots$$

qui est une trajectoire discrète. Il est clair graphiquement que la connaissance d'un seul couple (q_i, p_i) détermine la suite entière. On note

$$M : (q_j, p_j) \rightarrow (q_{j+1}, p_{j+1})$$

appelée **application de Poincaré**.

C'est une dynamique discrète sur un **espace de dimension 2** seulement appelé **Section de Poincaré**.



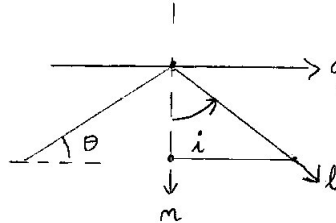
On a l'analogie du **Théorème de Liouville** :

Proposition 22. *L'application de Poincaré conserve l'élément d'aire $dqdp$.*

Démonstration. Voici 2 preuves différentes. On verra une 3eme preuve en TD. Preuve 1 : ([6, p.340]). Un état dans le billard a les coordonnées (x, y, θ) (θ : direction de la vitesse), et les équations du mouvement sont $\dot{\theta} = 0, \dot{x} = V \cos \theta, \dot{y} = V \sin \theta$ qui est un champ de vecteur de divergence nulle ($\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$) donc préserve l'élément de volume $d\mu = dx dy d\theta$. Au bord du billard, pour un rebond, si on utilise les coordonnées (q, n, i) où q est le long du bord, n normale au bord et i est l'angle d'incidence, on a $d\mu = dx dy d\theta = dq dn di$ (car on a effectué une rotation). Si l est la coordonnée le long de la trajectoire, alors $dn = \cos(i) dl$ et avec $p = \sin(i)$ on a

$$d\mu = dq dn di = dq \cos(i) dl di = dq dp dl$$

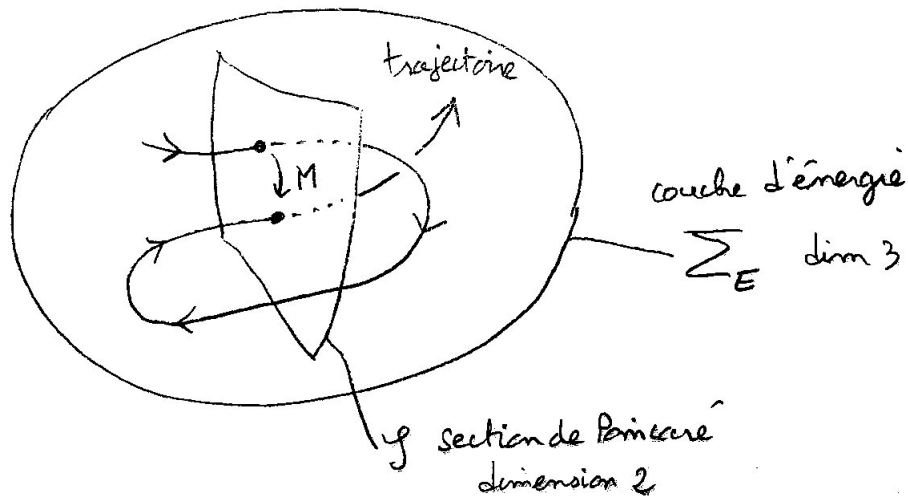
qui est préservé. dl est préservé donc $dq dp$ est préservée. □



Démonstration. Preuve 2 plus simple, mais qui utilise la dérivée extérieure ([8] p.4) : Notons $D(q_j, q_{j+1})$ la distance entre les rebonds. On vérifie sur un schéma que $\frac{\partial D}{\partial q_{j+1}} = -\sin(i_{j+1}) = -p_{j+1}, \frac{\partial D}{\partial q_j} = p_j$. Donc la différentielle est $dD = \frac{\partial D}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial D}{\partial q_{j+1}} dq_{j+1} = p_j dq_j - p_{j+1} dq_{j+1}$. Et $0 = ddD = dp_j \wedge dq_j - dp_{j+1} \wedge dq_{j+1}$, soit $dp_{j+1} \wedge dq_{j+1} = dp_j \wedge dq_j$. □

Généralisation :

- On a vu que la couche d'énergie Σ_E est de dimension 3. Les trajectoires sont des courbes de dimension 1 qui évoluent dans la couche d'énergie Σ_E qui est de dimension 3. La section de Poincaré \mathcal{S} est comme une surface de dimension 2 imaginaire, fixe dans cet espace Σ_E , et chaque fois que la trajectoire traverse \mathcal{S} l'intersection donne un point, de coordonnées (q, p) ici. Voir figure.
- La section de Poincaré se généralise de la façon suivante : pour d degrés de liberté, l'espace de phase \mathcal{P} est de dimension $2d$. La couche d'énergie Σ_E est de dimension $2d - 1$. Comme une trajectoire évoluant dans Σ_E est de dimension 1, la **section de Poincaré** \mathcal{S} doit être un sous espace de dimension $\dim(\Sigma_E) - 1 = 2d - 2$. L'**application de Poincaré** $M : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est l'application qui à une intersection fait correspondre l'intersection suivante. On peut montrer (même preuve que ci-dessus) que M préserve le volume sur \mathcal{S} .



Exercice 23. (TD) décrire les trajectoires dans un billard circulaire, ainsi que la dynamique discrète sur la section de Poincaré (q, p) .

Exercice (TD) : Etude de l'instabilité d'une trajectoire : On peut étudier l'instabilité d'une trajectoire particulière, qui est la trajectoire périodique horizontale, voir figure 2.1. Calculer l'application linéarisée de l'application de Poincaré M le long de la trajectoire périodique instable horizontale, après deux rebonds.

Aide : calculer la différentielle de l'application $(q_0, p_0) \rightarrow (q_1, p_1) = M(q_0, p_0)$ au point $q_0 = 0, p_0 = \sin(i_0) = 0$. Montrer que la matrice obtenue est de la forme :

$$DM_0 = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \frac{1}{c} \sinh \lambda \\ c \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

avec $c > 0, \lambda > 0$ que l'on reliera à la géométrie de la cavité (demi-grand axe a et rayon de courbure R). On a $\det(DM_0) = 1$, et $\text{Trace}(DM_0) = 2 \cosh \lambda > 2$. C'est une matrice hyperbolique, dont les valeurs propres sont $e^\lambda > 1, e^{-\lambda} < 1$.

Solution : $\cosh \lambda = 1 - \frac{2a}{R}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{a(a-R)}}$.

Noter que l'espace de la section de Poincaré (q, p) est compact, et donc l'étirement exponentiel observé dans l'approximation linéaire ne continue pas à l'infini. Nous verrons en section @@ qu'il y a étirement et repliement de la dynamique sur la section de Poincaré, et cela permet d'expliquer le chaos, observé sur la figure 2.2, avec une trajectoire.

Si on lance un paquet concentré de plusieurs billes, dans un billard chaotique, très rapidement les billes se dispersent et remplissent uniformément la cavité. C'est une autre manifestation du chaos. Pour des simulations numériques et plus de commentaires, Voir la page web [3].

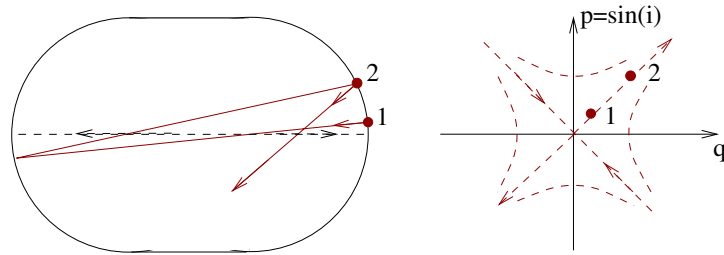


Figure 2.1 – Section de Poincaré de la trajectoire horizontale instable au voisinage de $q \simeq 0$, $p = \sin i \simeq 0$.

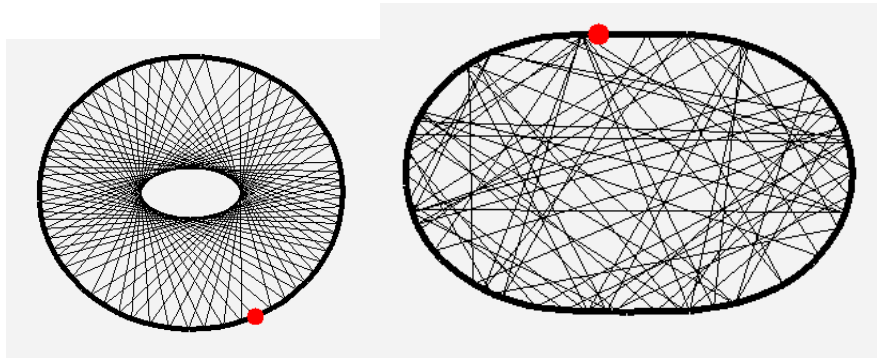


Figure 2.2 – Trajectoire dans un billard régulier (proche d’une ellipse) ou chaotique.

2.2 Origine du chaos. Intersections des courbes stables et instables.

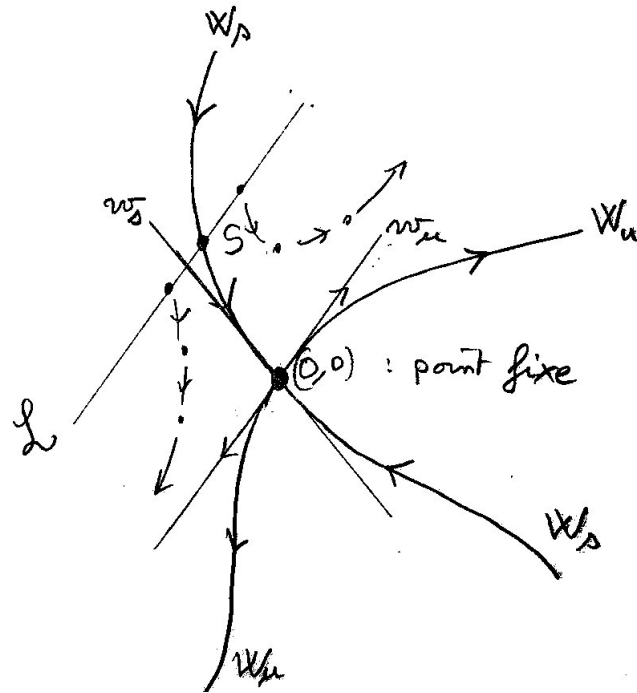
On explique ici le “scénario de Poincaré” dans le cas du billard ci-dessus, figure 2.1, possédant une orbite périodique instable.

Pour simplifier la discussion on considère l’application de Poincaré M sur l’espace $(q, p) \in \mathcal{S}$. L’orbite périodique est donc représentée par un point fixe hyperbolique (instable).

L’étude qui suit peut se faire plus généralement pour une orbite instable.

2.2.1 courbes stables et instables au point fixe hyperbolique

On suppose que l’origine $(0, 0)$ est un point fixe hyperbolique. On appelle w_s, w_u respectivement les directions stables et instables (unstable) (qui sont les directions des vecteurs propres de $DM_{(0,0)}$). Au voisinage de $(0, 0)$ les trajectoires (discrètes) suivent des hyperboles. Mais attention l’application linéaire DM n’est qu’une approximation de M à l’ordre 1 au voisinage du point fixe $(0, 0)$.



On considère une ligne \mathcal{L} proche de $(0,0)$ transverse à w_u . Par la dynamique de M les points de cette ligne suivent les hyperboles et vont d'un côté ou de l'autre du point fixe, sauf pour un point intermédiaire noté S qui va donc converger vers $(0,0)$. En variant \mathcal{L} (plus ou moins proche de $(0,0)$) ces points S ainsi obtenus forment un morceau de courbe issu de $(0,0)$, notée W_s et appelée **courbe stable du point fixe** $(0,0)$. Ce sont les points S tels que

$$S \in W_s \Leftrightarrow M^t(S) \rightarrow (0,0) \text{ pour } t \rightarrow +\infty$$

Notons que le vecteur w_s est tangent à W_s en $(0,0)$. Cette courbe se prolonge, pour l'obtenir il faut appliquer M^{-1} au bout de courbe déjà construit.

Notons la courbe W_s est invariante par M : si $S \in W_s$ alors $M(S) \in W_s$.

De la même façon on définit la **courbe instable du point fixe** $(0,0)$ qui est une courbe W_u contenant les points :

$$U \in W_u \Leftrightarrow M^t(U) \rightarrow (0,0) \text{ pour } t \rightarrow -\infty$$

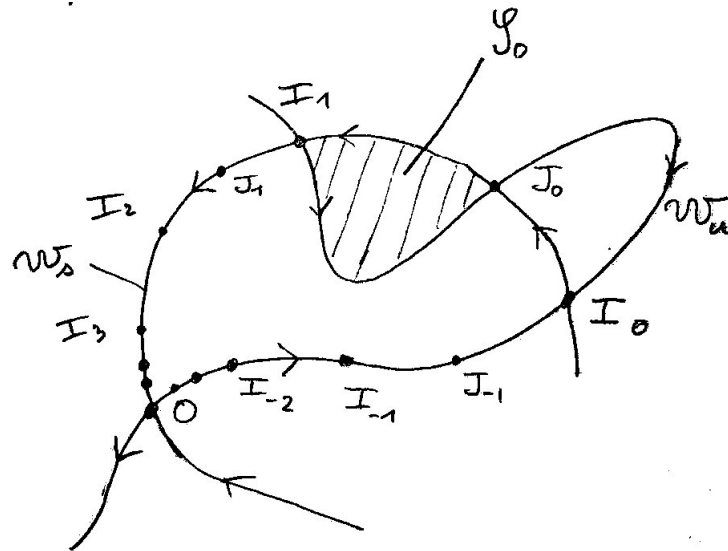
Le vecteur w_u est tangent à W_u . La courbe W_u est invariante par M .

2.2.2 Intersection homoclines transverse des courbes stables et instables

Les courbes W_u, W_s se prolongent loin de $(0,0)$. On **suppose qu'elles se coupent de façon transversale** en un point I_0 (cad sans être tangentes) :

$$I_0 \in (W_u \cap W_s)$$

Cette situation est générique, ce qui signifie que cette intersection existe toujours sauf dans des cas exceptionnels (que l'on peut éviter en perturbant un peu le problème). Appelons $I_1 = M(I_0)$, etc $I_t = M^t(I_0)$ les différentes images de I_0 pour $t \in \mathbb{Z}$.



D'après les propriétés des courbes W_s, W_u évoquées plus haut, comme $I_0 \in W_s$ alors $I_t \in W_s$ pour tout t et $I_t \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$.

De même $I_t \in W_u$ pour tout t et $I_t \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow -\infty$. Mais aussi

$$I_t \in (W_u \cap W_s)$$

donc les courbes W_s et W_u doivent se couper transversalement sur tous ces points I_t . De plus en gardant la même orientation car M préserve l'orientation.

Si l'on considère par exemple le point I_1 , la courbe W_u doit passer par I_1 (avec la même orientation). Par conséquent elle a dû couper W_s en un point intermédiaire que l'on note J_0 . Ce point J_0 engendre aussi une série de points $J_t = M^t(J_0) \in (W_u \cap W_s)$.

On a donc obtenu deux trajectoires particulières : $(I_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(J_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ qui s'appellent **trajectoires homoclines** associées au point fixe $(0, 0)$. Elles ont la particularité que $I_t \rightarrow (0, 0)$ pour $t \rightarrow \pm\infty$. Les points I_t, J_t sont appelés **points d'intersection homoclines**.

2.2.3 Etirement et repliement de l'espace de phase par la dynamique

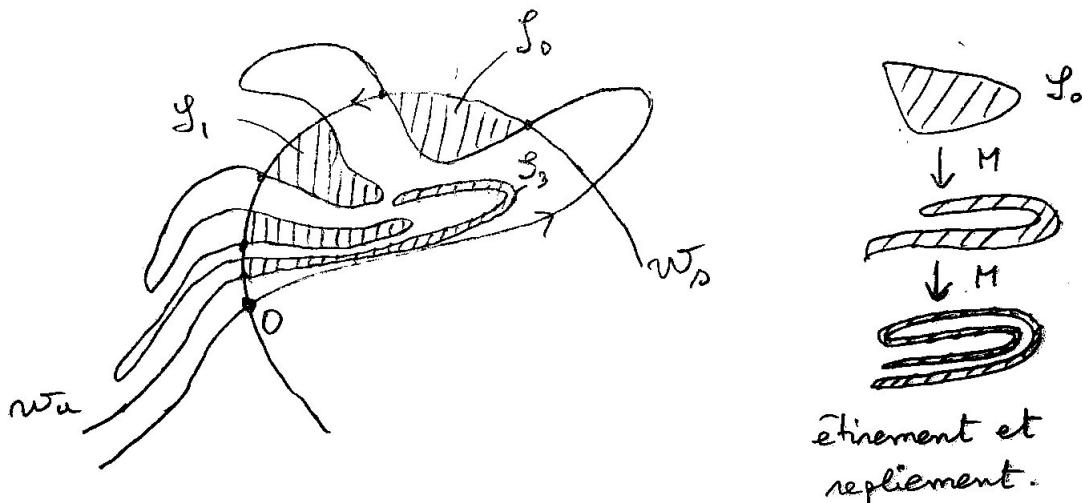
Voyons maintenant une conséquence remarquable de cette situation, qui a été analysées pour la première fois par Poincaré en 1899¹ ("Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v.2, chap XXXIII, p.389).

1. Poincaré en 1899 dans le troisième tome de ses Méthodes nouvelles de la mécanique céleste [1899]. « Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre

On considère l'ensemble des points \mathcal{S}_0 achurée sur la figure, qui est bordée par W_u et W_s et limitée par les points J_0 et I_1 .

Appelons $\mathcal{S}_t = M^t(\mathcal{S}_0)$ l'image de cet ensemble par l'application M . On peut facilement déduire que :

- Comme M préserve l'aire alors toutes les surfaces \mathcal{S}_t la même aire.
- La surface \mathcal{S}_t est limitée par les points J_t et I_{t+1} . Or ces points s'accroissent exponentiellement en $(0,0)$ pour $t \rightarrow +\infty$ le long de W_s , donc le côté $(J_t - I_{t+1})$ devient de plus en plus petit et par conséquent la surface \mathcal{S}_t **s'étire exponentiellement vite avec t** pour garder sa surface constante.
- Comme la surface \mathcal{S}_t doit appartenir à l'espace de phase \mathcal{P} qui est limité, elle doit forcément se replier en même temps qu'elle s'étire pour $t \rightarrow \infty$. Le scénario est identique pour $t \rightarrow -\infty$.



Au final on observe (comme Poincaré) que l'ensemble de points \mathcal{S}_0 est "étiré" et "replié" par l'application M à chaque instant.

Par analogie, on peut penser à une pâte feuilletée, travaillée par un boulanger. Afin de mélanger le beurre, il l'étire et la replie.

Le mélange obtenu est optimal.

infini dont chacune correspond à une solution asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes ». [Poincaré 1892-9, 3, 389] Ce texte est classiquement considéré comme la première description d'un comportement chaotique.

2.2.4 Conclusion : mélange et sensibilité aux conditions initiales

On a montré que dans un système avec 2 degrés de libertés (ou plus), près de chaque orbite périodique instables (hyperbolique), il y a un scénario comme décrit ci-dessus. La seule hypothèse que l'on a fait est que les courbes stables et instables se coupent transversalement. (Voir le diagramme de phase du pendule ou du potentiel double puits à 1 degré de liberté pour un contre exemple).

La conséquence de ce scénario est que **toute distribution de points est étirée et repliée par la dynamique avec un taux exponentiel** donné par le coefficient de Lyapounov λ du point instable.

Cela a pour effet de “mélanger” les trajectoires et que deux trajectoires voisines quelconques très proches à une date $t = 0$ vont se séparer et se mélanger à un taux exponentiel. On parle de **sensibilité aux conditions initiales** et de **chaos déterministe**.

Afin de comprendre plus en détails le comportement chaotique des trajectoires et ce que signifie précisément ce mélange on étudie un modèle simplifié dans la section suivante.

2.3 Un modèle simple de chaos déterministe : une application hyperbolique sur le tore \mathbb{T}^2

Le modèle présenté dans ce paragraphe est peut-être le modèle de dynamique hyperbolique (i.e. fortement chaotique) le plus simple que l'on puisse imaginer. C'est par conséquent un modèle privilégié pour l'étude du chaos Hamiltonien. C'est un modèle un peu artificiel d'un point de vue physique, mais il faut le penser comme l'équivalent d'une section de Poincaré, comme celle décrite en Eq.(2.1) et figure 2.1. Sa construction est basée sur l'idée d'étirement et de repliement observé dans les sections de Poincaré de dynamiques chaotiques. La section de Poincaré sera ici le carré $[0, 1]^2$ périodique, appelé le tore \mathbb{T}^2 .

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est à coefficients entiers, de déterminant 1. La matrice M agit sur un point de l'espace de phase noté $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$, par $x' = M(x) \in \mathbb{R}^2$.

On note

$$e^{+\lambda} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \simeq 2.6 > 1, \quad e^{-\lambda} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

les deux valeurs propres de M (obtenues en résolvant $0 = \text{Det}(M - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$) auxquelles correspondent une direction instable $e_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et stable $e_- = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ respectivement (i.e. $Me_{\pm} = e^{\pm\lambda}e_{\pm}$). On dit que M est de type hyperbolique (et plus généralement, on pourrait considérer $M \in SL(2, \mathbb{Z})$, avec $Tr(M) > 2$).

Pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$M(x+n) = M(x) + \underbrace{M(n)}_{\text{entiers}} \equiv M(x) \pmod{1}$$

donc M induit une application sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ aussi notée M :

$$M : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q' = 2q + p \pmod{1} \\ p' = q + p \pmod{1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La direction instable crée le phénomène d'étirement, et la périodicité sur le tore crée le phénomène de repliement tous deux nécessaires pour avoir du chaos.

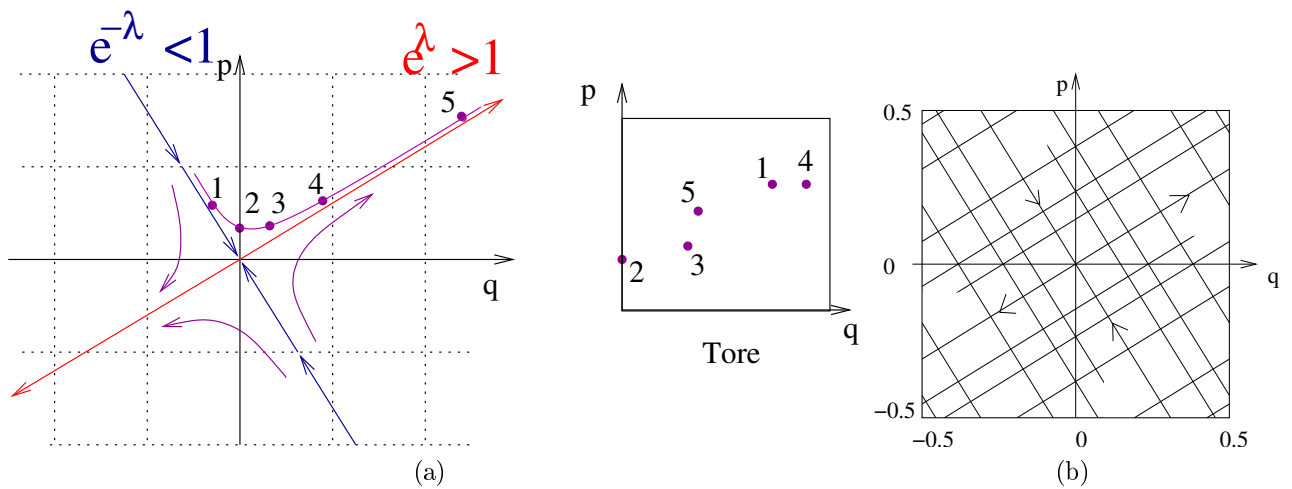


Figure 2.3 – (a) Evolution par l’application (2.2) du point 1 : $(-0.3, 0.6)$ sur le plan et sur le tore. Premiers itérés sur \mathbb{R}^2 : $(-0.3, 0.6)(0, 0.3), (0.3, 0.3), (0.9, 0.6), (2.4, 1.5)$.

(b) Les directions stables et instables e_{\pm} de l’application M ont une pente irrationnelle sur \mathbb{R}^2 . Par conséquent elles remplissent le tore de façon dense.

2.3.1 Propriétés chaotiques

L’application M sur le tore est **Anosov** ou **uniformément hyperbolique** ce qui signifie que chaque trajectoire a une direction transverse instable e_+ et une direction stable e_- (qui ne dépend pas du point $x \in \mathbb{T}^2$ dans notre modèle).

Sur le site web ([3], “Modèle du Chat d’Arnold”), on pourra observer un nuage de points (i.e. une distribution de probabilité régulière) qui évolue par l’application M et remarquer qu’elle converge vers la mesure uniforme. C’est la **propriété de “mélange”**. On pourra aussi observer l’évolution temporelle d’une particule (de position initiale générique) et remarquer que son **mouvement semble totalement imprévisible**. C’est une conséquence de la propriété de mélange, et cela contraste avec la simplicité de la loi déterministe (2.2).

Plus précisément, l'uniforme hyperbolicité implique que la dynamique a des **propriétés de chaos fort** comme le mélange, l'ergodicité, la décroissance exponentielle des corrélations temporelles, le théorème central limite, etc., (voir [6] p. 154).

La définition suivante donne un sens précis au "chaos".

Définition 24. La dynamique de M est **mélangeante** si pour tout ensemble de points $A, B \subset \mathbb{T}^2$,

$$\mu(M^t(A) \cap B) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu(A) \cdot \mu(B) \quad (2.3)$$

où $\mu(A)$ est la surface de l'ensemble A et $M^t(A)$ est l'ensemble A évolué après le temps t .

Interprétation : Cette propriété traduit bien que la dynamique mélange les ensembles, car $\mu(M^t(A) \cap B)$ ne dépend plus du temps t , pour $t \rightarrow \infty$, et la limite est indépendante de la forme et position des ensembles. Cela traduit une perte irréversible d'information. En termes probabilistes, le produit $\mu(A) \mu(B)$ montre que à la limite $t \rightarrow \infty$ les propriétés pour un point d'appartenir à $M^t(A)$ et B sont comme des événements aléatoires décorrélés.

Proposition 25. La dynamique de $M : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de l'exemple (2.2) est mélangeante.

Démonstration. Tout d'abord, observons que la propriété de mélange (2.3) est équivalente à :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}^2), \quad \int f(M^t(x)) g(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int f(x) dx \int g(x) dx \quad (2.4)$$

En effet, si f, g sont les fonctions caractéristiques des ensembles A, B alors (2.4) implique (2.3), et inversement on approxime les fonctions f, g par des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques.

Pour montrer (2.4), considérons un mode de Fourier sur le tore :

$$\varphi_n(x) = e^{in \cdot x}, \quad n \in \mathbb{Z}^2$$

Ces fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}^2}$ forment une base de l'espace $L^2(\mathbb{T}^2)$. On observe que : $\varphi_n(M^t(x)) = e^{in \cdot M^t(x)} = e^{iM^t(n) \cdot x} = \varphi_{M^t(n)}(x)$, (car $M^{\text{transp}} = M$ dans notre exemple). Or pour tout $n \neq 0$, $|M^t(n)| \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$, car la matrice M est hyperbolique, et n n'appartient pas à la courbe stable. (Ainsi la seule fonction invariante est la fonction constante). On vérifie maintenant que (2.4) est vérifiée pour deux modes de Fourier φ_n, φ_m . En effet si $m \neq 0$ ou $n \neq 0$, alors d'une part $(\int \varphi_m(x) dx) (\int \varphi_n(x) dx) = 0$, et d'autre part $\int \varphi_n(M^t(x)) \varphi_m(x) dx = \int \varphi_{M^t(n)}(x) \varphi_m(x) dx = 0$ pour t assez grand. Si $m = n = 0$, alors $\int \varphi_{M^t(n)}(x) \varphi_m(x) dx = (\int \varphi_m(x) dx) (\int \varphi_n(x) dx) = 1$. On déduit ensuite (2.4), en décomposant f, g en modes de Fourier.

□

2.3.2 Stabilité structurelle

Une autre propriété remarquable de l'application M est la **stabilité structurelle** : avec une perturbation suffisamment faible (en norme C^1), l'application reste uniformément hyperbolique, et même reste conjuguée topologiquement à M . Cette robustesse de la propriété d'hyperbolicité (et des propriétés de chaos qui en découlent), font l'intérêt principal (physique et mathématique) pour ce type de modèles.

2.3.3 Orbites périodiques

Exercice (TD) : recherche des trajectoires périodiques de l'application M

1. Trouver les points périodiques de M sur le tore de période $t \geq 1$ donnée, c'est à dire $x \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $M^t x = x \bmod 1$. Montrer qu'il y a $\mathcal{N}_t = e^{\lambda t} - 2 - e^{-\lambda t}$ points périodiques de période t .

2.3.4 Conclusion

Ce modèle de dynamique déterministe très simple correspond à une Section de Poincaré comme celle étudiée dans un billard. Dans ce modèle on a montré que la dynamique est mélangeante. Cela signifie que toute distribution initiale de probabilité (lisse) aussi précise soit elle, va converger vers la distribution uniforme sur le section de Poincaré. Pour le problème du billard cela correspondrait à une distribution uniforme sur la couche d'énergie. C'est exactement l'hypothèse qui est faite en physique statistique quand on parle "d'ensemble microcanonique". Le chaos est donc à la base de la physique statistique et de la thermodynamique.

Attention, la situation est beaucoup plus compliquée dans des modèles autre que celui ci. En général dans l'espace de phase il y a des régions dominées par le chaos et d'autres où la régularité existe comme dans un système à un degré de liberté ou un système intégrable. (Théorie KAM).

Chapitre 3

Principe variationnel et formulation Lagrangienne de la mécanique

3.1 Du principe variationnel aux équations de Hamilton

On considère une situation simple mais on verra que le formalisme de cette Section est beaucoup plus général.

Considérons une particule de **position** $X = (x, y, z)$ exprimée dans un **système de coordonnées** quelconque. Cela pourrait être des coordonnées **sphériques** $X = (r, \theta, \varphi)$ ou autres. La **trajectoire** γ de la particule est représentée par les coordonnées $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en fonction du temps. Sa vitesse est représentée par

$$V = \dot{X} = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

(ici et dans la suite le point désigne la dérivée par rapport au temps). Son **énergie cinétique** est

$$E_c = \frac{1}{2}m \|V\|^2$$

On rappelle que la norme d'un vecteur est en coordonnées cartésiennes :

$$\|V\|^2 = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$$

Par contre en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , d'après ()

$$|V|^2 = (V_r^2 + (rV_\theta)^2 + (r \sin \theta V_\varphi)^2) \tag{3.1}$$

On note $U(X)$ l'**énergie potentielle**.

Définition 26. La fonction

$$L(X, V, t) := \frac{1}{2}m|V|^2 - U(X, t) \quad (3.2)$$

s'appelle le **Lagrangien**.

Le théorème suivant dépasse le cadre de la mécanique, car la fonction $L(X, V, t)$ est quelconque.

Théorème 27. “de moindre action de Hamilton (1834)”. Soit $L(X, V, t)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, une fonction quelconque. Considérons deux points A, B fixes et deux dates t_A, t_B fixées. Soit \mathcal{T} l'espace des courbes paramétrées $X(t)$ telles que $X(t_A) = A$ et $X(t_B) = B$, c'est à dire que les extrémités sont fixées. Pour une courbe $\gamma \in \mathcal{T}$ on définit son **action** par :

$$S(\gamma) := \int_{t_A}^{t_B} L(X, \dot{X}, t) dt, \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt}$$

Soit $\gamma_0 \in \mathcal{T}$ une courbe donnée et $\gamma_s \in \mathcal{T}$ une famille de courbes indicées par $s \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma_{s=0} = \gamma_0$. On note $X_s(t)$ les coordonnées du point sur la courbe γ_s à la date t . Soit

$$W(t) := \left(\frac{dX_s(t)}{ds} \right)_{/s=0}$$

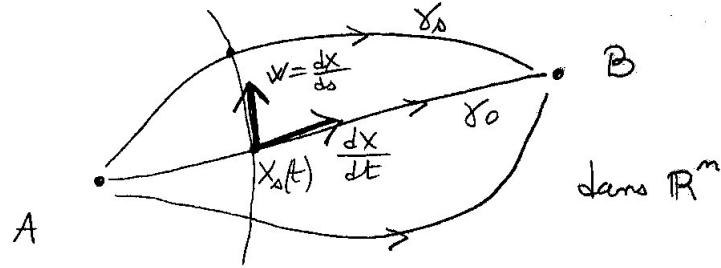
appelé **champ de déformation de Jacobi**, et qui caractérise une modification infinitésimale de la trajectoire γ_0 . Remarquer que $W(t_A) = 0$ car $X_s(t_A) = A$ est fixé; de même $W(t_B) = 0$.

Alors

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = 0, \quad \forall \text{ déformation } W(t) \text{ : "l'action est extrémale"}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) (X_0, \dot{X}_0, t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) (X_0, \dot{X}_0, t) = 0 \quad (3.3)$$

$$: \text{ équations de Euler-Lagrange} \quad (3.4)$$



Démonstration. On a

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = \int_{t_A}^{t_B} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X_s}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \left(\frac{\partial \dot{X}_s}{\partial s} \right) \right) dt$$

or $\left(\frac{\partial X_s}{\partial s} \right)_{s=0} = W(t)$ et $\left(\frac{\partial \dot{X}_s}{\partial s} \right)_{s=0} = \left(\frac{\partial X_s(t)}{\partial s \partial t} \right)_{s=0} = \frac{d}{dt} (W(t))$. Donc

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = \int_{t_A}^{t_B} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) W(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \frac{d}{dt} (W(t)) \right) dt$$

On fait une intégration par parties¹ du deuxième terme, et on utilise l'hypothèse que $W(t_A) = W(t_B) = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) W(t) - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \right) W(t) \right) dt + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) W(t) \right]_{t_A}^{t_B}}_{=0} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \right) \right) W(t) dt \end{aligned}$$

On déduit que

$$\left(\frac{dS(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = 0, \forall W(t) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V} \right) \right) \right) = 0$$

□

1. rappel :

$$[f \cdot g]_{t_A}^{t_B} = f(t_B)g(t_B) - f(t_A)g(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} (f \cdot g) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} (f)g + \int_{t_A}^{t_B} f \frac{d}{dt} (g)$$

donc

$$\int_{t_A}^{t_B} f \frac{d}{dt} (g) = [f \cdot g]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} (f)g$$

Remarques

- Les équations de Euler Lagrange peuvent s'écrire :

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial X \partial V}\right) \dot{X} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial V^2}\right) \ddot{X} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial V}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial X}\right) = 0 \quad (3.5)$$

(où $X(t) = X_0(t)$ pour simplifier). Ce sont donc des équations du deuxième ordre pour la fonction $X(t)$.

- Dans le cas eq.(3.2) où

$$L(X, V, t) := \frac{1}{2}m|V|^2 - U(X, t)$$

et pour des coordonnées cartésiennes, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V} &= mV = P \text{ impulsion} \\ \frac{\partial L}{\partial X} &= -\frac{\partial U}{\partial X} = F : \text{ force} \end{aligned} \quad (3.6)$$

et les équations de Euler Lagrange donnent donc

$$\dot{P} = F : \text{équation de Newton}$$

Donc le théorème de "moindre action" montre que parmi toutes les trajectoires possibles (à extrémités fixées), la trajectoire suivie par une particule soumise à une force F est celle qui rend l'action $S = \int L dt$ extrémale (pas forcément minimale!).

Le théorème suivant est toujours pour une fonction $L(X, V, t)$ quelconque.

Théorème 28. "Passage des équations de Euler-Lagrange aux équations de Hamilton". Posons

$$P := \left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)(X, V) \quad : \text{impulsion}$$

On suppose pouvoir faire le changement de variable $V \longleftrightarrow P$ à X fixé, appelé **Transformée de Legendre**. On notera $P(X, V)$ et inversement $V(X, P)$ les formules de changement. Soit

$$H(X, P, t) := P.V(X, P) - L(X, V(X, P), t) : \text{fonction Hamiltonien} \quad (3.7)$$

(on écrit $H = PV - L$ pour faire vite). Alors les équations de Euler Lagrange sont équivalentes aux **équations de Hamilton** :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial V} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Remarques

- Il est important de remarquer que L est fonction de (X, V, t) alors que H est fonction de (X, P, t) . Ainsi $\frac{\partial L}{\partial X}$ signifie dérivée à V fixé, et $\frac{\partial H}{\partial X}$ signifie dérivée à P fixé.
- Si on reprends l'exemple de la mécanique

$$L(X, V, t) := \frac{1}{2}m|V|^2 - U(X, t)$$

alors $P = \frac{\partial L}{\partial V} = mV$ (en coordonnées cartésiennes!). La transformée de Legendre est simple (indépendante de X). Inversement $V = \frac{P}{m}$. (il y a d'autres cas ou cette relation est plus compliquée). Le Hamiltonien est

$$H(X, P, t) = PV - L = \frac{P^2}{m} - \frac{P^2}{2m} + U(X, t) = \underbrace{\frac{P^2}{2m}}_{E_c} + U(X, t)$$

En résumé : L'action S est extrémale \Leftrightarrow Equations de Euler-Lagrange \Leftrightarrow équations de Newton \Leftrightarrow équations de Hamilton.

- En coordonnées sphériques par exemple, d'après (3.1) et la définition $P = \frac{\partial L}{\partial V}$, les coordonnées de l'impulsion P sont plutot

$$P_r = mV_r, \quad P_\theta = mr^2V_\theta, \quad P_\varphi = m(r \sin \theta)^2 V_\varphi$$

- On discutera en @@ plus en détail la transformée de Legendre.

Démonstration. de (3.8). On a

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right) = V + P \underbrace{\frac{\partial V}{\partial P}}_P - \left(\frac{\partial L}{\partial V}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) = V = \dot{X}$$

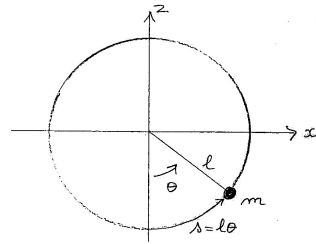
et

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right) &= P \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial L}{\partial X} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial V}}_P \frac{\partial V}{\partial X} = -\frac{\partial L}{\partial X} \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V}\right) = -\dot{P} \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne on a utilisé les équation de Euler Lagrange. □

3.1.1 Exemple simple : le pendule.

Pour illustrer la démarche, considérons une masse m libre de se déplacer sur un cercle vertical de rayon l , et soumise à son poids. On utilise les coordonnées polaires $x = l \sin \theta$, $z = -l \cos \theta$.



L'énergie potentielle est

$$U = mgz = -mgl \cos \theta$$

Si $s = l\theta$ désigne la coordonnées curviligne, alors la norme de la vitesse est $|V| = |l\dot{\theta}|$, donc l'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}m|V|^2 = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta})^2$$

Le Lagrangien est

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta$$

L'impulsion est

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

Ce qui montre que la transformée de Legendre est simplement $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$. Les équation de Euler Lagrange sont :

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta$$

Le Hamiltonien est

$$\begin{aligned} H(\theta, p_\theta) &= p_\theta \dot{\theta} - L = ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta})^2 + mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta})^2 + mgl \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

Les équation de Hamilton sont :

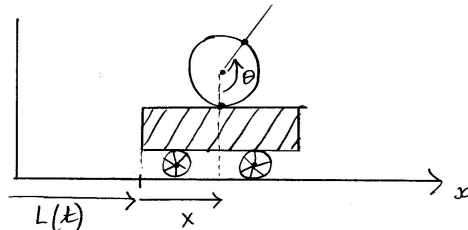
$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{ml^2} p_\theta \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \end{aligned}$$

On retrouve : $\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta$ (que donnerait aussi l'équation de Newton).

L'intérêt ici est de savoir que l'énergie $\mathcal{E} = H(\theta, p_\theta)$ est une quantité conservée.

3.1.2 Exemple avec notion de contrainte holonome et coordonnées généralisées

On considère un cylindre posé sur un chariot.



Le chariot est à la position $L(t)$ qui est supposée imposée et connue. La position du cylindre est caractérisée par la position du centre x (On a $x = L + X$ où X est mesuré depuis le bord du chariot) et la position angulaire θ d'un point fixé du cylindre.

Le cylindre est supposé de masse m homogène, et de rayon R . Le contact du cylindre au chariot est **un contact sans glissement**.

La fonction $L(t)$ est imposée, on cherche le mouvement $x(t)$ et $\theta(t)$ du cylindre.

Tout d'abord on établit une relation entre les variables x et θ . On a pour une variation $d\theta$ donnée,

$$\begin{aligned} R d\theta &= -dX = -d(x - L) \\ \Leftrightarrow R \dot{\theta} &= -\dot{x} + \dot{L} \\ \Leftrightarrow R\theta(t) &= -x(t) + L(t) + cste \end{aligned}$$

Une telle relation entre les variables de position $\theta(t)$ et $x(t)$ s'appelle **une contrainte holonome**. (Dans le plan θ, x c'est une droite). Pour traiter le problème, il suffit d'une seule variable, par exemple la variable θ que l'on appelle **coordonnée généralisée**.

Energie cinétique : L'énergie cinétique du cylindre est

$$E_c = E_{c,translation} + E_{c,rotation}$$

l'énergie cinétique de translation est

$$E_{c,transl} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

l'énergie cinétique de rotation est due à l'énergie cinétique de chaque élément de volume. On l'exprime comme une intégrale sur la section du cylindre :

$$E_{c,rotation} = \int_{section} (d^2x) \frac{1}{2} \mu (V(x))^2$$

CHAPITRE 3. PRINCIPE VARIATIONNEL ET FORMULATION LAGRANGIENNE DE LA MÉCANIQUE

où μ est la densité de masse supposée constante, et $V(x) = r\dot{\theta}$ (en coord. polaires) est la vitesse dans le référentiel du centre du cylindre. Comme le cylindre est rigide, $\dot{\theta}$ est le même pour tous les points. On a $dx^2 = rd\theta dr$ alors

$$E_{c,rotation} = \frac{1}{2}\mu\dot{\theta}^2 \iint (rd\theta dr) r^2 = \pi\mu\dot{\theta}^2 \int_0^R r^3 dr = \pi\mu\dot{\theta}^2 \frac{R^4}{4}$$

Par une même intégrale, la masse totale du cylindre est

$$m = \int_{section} (d^2x) \mu = \mu \iint (rd\theta dr) = 2\pi\mu \frac{R^2}{2}$$

donc $\mu = \frac{2m}{2\pi R^2}$ et

$$E_{c,rotation} = m \frac{R^2}{4} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

où I est le **moment d'inertie** (d'un cylindre homogène) :

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

Lagrangien : On déduit le Lagrangien (avec $V_\theta = \dot{\theta}$)

$$\begin{aligned} L(\theta, V_\theta) &= E_{cin} = E_{c,transl} + E_{c,rotation} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{L} - R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{L} - R V_\theta)^2 + \frac{1}{2} I V_\theta^2 \end{aligned}$$

L'impulsion est alors

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial V_\theta} = m (\dot{L} - R V_\theta) (-R) + I V_\theta$$

donc inversement :

$$\dot{\theta} = V_\theta = \frac{p + R m \dot{L}}{R^2 m + I}$$

Equation de Euler Lagrange :

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

(car L est indépendant de θ) donc $p(t) = cste$ donc le mouvement $\theta(t)$ est déterminé par:

$$\dot{\theta} = \frac{p + R m \dot{L}}{R^2 m + I}$$

3.1.3 Exemple : particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère une particule de charge électrique q soumise à un champ électrique $\vec{E}(X, t)$ et magnétique $\vec{B}(X, t)$. (rappel X sont les coordonnées spatiales), dans le cadre de la mécanique non relativiste classique (non quantique).

On a déjà établi en (1.9) page 15 que le Hamiltonien est

$$H(X, P, t) = \frac{1}{2m} |P - qA(X, t)|^2 + qU(X, t)$$

et l'impulsion

$$P = mV + qA$$

D'après la relation (3.7) on déduit que le Lagrangien est

$$L(X, V, t) = PV - H = mV^2 + qA \cdot V - \frac{1}{2}mV^2 - qU$$

soit

$$L(X, V, t) = \frac{1}{2}m|V|^2 - qU(X, t) + q\vec{A}(X, t) \cdot \vec{V}$$

D'après la théorie générale établie, les équations de mouvement de Newton (1.11) ou de Hamilton (1.9) sont aussi équivalentes aux équations de Lagrange (3.3) avec ce Lagrangien.

3.2 Principe variationnel et mécanique relativiste

Introduction : Dans cette section nous présentons une idée de base en relativité : la trajectoire suivie par une particule est une courbe dans l'espace temps (appelée ligne d'univers) qui rend extrémale une certaine "action". Dans cette formulation la gravitation n'est plus une force mais son effet se trouve contenue dans la géométrie de l'espace temps (dans le tenseur métrique g).

3.2.1 L'espace temps

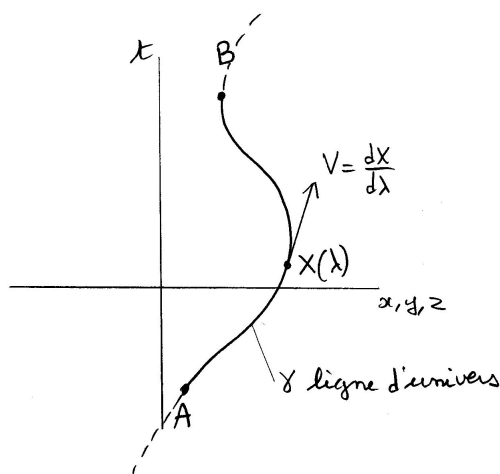
- L'espace temps \mathcal{E} est de dimension quatre. On peut considérer un système de coordonnées (x, y, z, t) .
- Un **évènement** est un point X de l'espace temps caractérisé par ses coordonnées $X \equiv (x, y, z, t)$.
- La trajectoire d'une particule (ou objet ponctuel) est caractérisée par $x(t), y(t), z(t)$ et cela décrit une courbe γ dans l'espace temps qui est appelée **ligne d'univers de la particule**. Choisissons un paramétrage quelconque $\lambda \in \mathbb{R}$ le long de cette courbe et notons

$$X(\lambda) \equiv (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda)) \in \gamma$$

Notons

$$\begin{aligned} V &= \frac{dX}{d\lambda} \\ &\equiv (V_x, V_y, V_z, V_t) \\ &\equiv \left(\frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dy(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dz(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dt(\lambda)}{d\lambda} \right) \end{aligned}$$

le **vecteur tangent** à la courbe au point $X(\lambda)$. Comme ce vecteur a quatre composantes, on l'appelle aussi **quadri-vecteur**.



3.2.2 La métrique de l'espace temps

- Dans l'espace temps il y a une **métrique** (ou tenseur métrique) qui associe un nombre à chaque vecteur tangent noté $g(V, V)$. Dans le cas d'un **espace-temps plat** l'expression de cette métrique est :

$$g(V, V) = V_t^2 - \frac{1}{c^2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \quad (3.9)$$

appelée **métrique de Minkowski**. On dit aussi que le système de coordonnées (x, y, z, t) est un **référentiel inertiel de Minkowski**. Ici $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ est la **vitesse de la lumière**. Remarquer que cette expression ressemble à la métrique euclidienne dans \mathbb{R}^4 : $\|V\|^2 = V_t^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ qui donne le carré de la norme d'un vecteur. La différence essentielle dans (3.9) est le signe (-1) . Ainsi a priori on peut avoir $g(V, V) > 0$ ou $g(V, V) = 0$ ou $g(V, V) < 0$ pour des vecteurs V non nuls.

- Pour comprendre le sens de cette métrique, un premier principe est que pour tout vecteur tangent $V = \frac{dX}{d\lambda}$ à une ligne d'univers d'une particule de masse $m > 0$, on a

$$g(V, V) > 0$$

Cela s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 &> \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 \right) \\ \Leftrightarrow &\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right) < c^2 \\ \Leftrightarrow &\|v\| < c \end{aligned}$$

où $v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ est le vecteur vitesse de la particule mesurée dans le référentiel inertiel (x, y, z, t) . On a montré que ce principe $g(V, V)$ signifie que la vitesse de la particule est strictement inférieure à la vitesse de la lumière.

- Si A et B sont deux évènements successifs sur la ligne d'univers d'une particule, alors **le temps propre écoulé** entre A et B est

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{g(V, V)} d\lambda, \quad V = \frac{dX}{d\lambda}$$

où $X(\lambda)$ est la ligne d'univers de la particule paramétrée par λ , qui est un paramétrage arbitraire. On peut aussi dire que $\tau_{AB} = \int d\tau$ est le temps écoulé, perçu par la particule avec $d\tau = \sqrt{g\left(\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\lambda}\right)} d\lambda$. Pour voir que cette définition a un sens, on montre que le résultat de l'intégrale ne dépend pas du paramétrage : si $X(\lambda')$ est un autre paramétrage alors $\frac{dX}{d\lambda} = \frac{dX}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda}$ et observons d'abord d'après (3.9) que $g\left(\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\lambda}\right) = \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda}\right)^2 g\left(\frac{dX}{d\lambda'}, \frac{dX}{d\lambda'}\right)$. Par ailleurs $d\lambda = \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda}\right) d\lambda'$ donc

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{g\left(\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\lambda}\right)} d\lambda = \int_A^B \sqrt{g\left(\frac{dX}{d\lambda'}, \frac{dX}{d\lambda'}\right)} d\lambda'$$

à la même expression pour les deux paramétrisations. (C'est comme en géométrie Euclidienne où la longueur d'une courbe $X(t)$ est

$$L = \int dl = \int \left\| \frac{dX}{dt} \right\| dt$$

et ne dépend pas de la vitesse à laquelle on la parcourt.)

- En général, l'espace temps n'est pas "plat". Le tenseur métrique g a une forme à la forme générale :

$$g(V, V) = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu}(X) V^\mu V^\nu \quad (3.10)$$

où pour simplifier les notations, l'indice $\mu = x, y, z, t$. Le tenseur métrique g est une forme quadratique non dégénérée symétrique ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Les coefficients $g_{\mu\nu}(X)$ dépendent du point X de l'espace temps. Les équations d'Einstein déterminent ce tenseur g en fonction de la présence de matière et d'énergie (étoiles, galaxies).

3.2.3 Exemples de temps propres

Particule immobile : Pour une particule immobile dans un référentiel (au point $x = y = z = 0$) on a

$$X(\lambda) = ((x, y, z) = 0, t(\lambda))$$

donc

$$V = \frac{dX}{d\lambda} = \left(0, \frac{dt}{d\lambda}\right)$$

et avec la métrique (3.9)

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{\left(\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - 0\right)} d\lambda = \int_A^B dt = t_B - t_A$$

donc le temps propre est égal à la durée $t_B - t_A$ mesurée dans le référentiel.

Particule ayant une vitesse constante : Si la particule se déplace à vitesse constante (disons selon l'axe x), $v = \frac{dx}{dt} < c$ alors le même calcul donne

$$X(\lambda) = (x(\lambda) = vt(\lambda), t(\lambda))$$

donc

$$V = \frac{dX}{d\lambda} = \left(v \frac{dt}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda}\right)$$

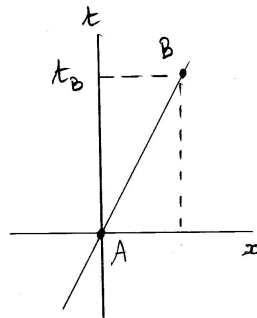
et

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{\left(\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(v \frac{dt}{d\lambda}\right)^2\right)} d\lambda = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \int_A^B dt = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (t_B - t_A) \quad (3.11)$$

La durée $(t_B - t_A)$ mesurée dans le référentiel où la particule se déplace est maintenant différente du temps propre, augmentée par le facteur

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1$$

Cela s'appelle le **phénomène de dilatation du temps**. Remarquer que si v est très proche de la vitesse de la lumière c alors γ peut être très grand ($\gamma \rightarrow \infty$ pour $v \rightarrow c$).



Désintégration des muons atmosphériques : Comme exemple concret, le muon est une “particule élémentaire”. Des muons sont créés dans l’atmosphère à l’altitude $h = 10\text{km}$ à la suite de collisions entre particules cosmiques et molécules de l’atmosphère. Certains de ces muons se dirigent vers le sol à une vitesse $v \simeq c$ (facteur γ très grand). Alors dans le référentiel terrestre, si A est l’évènement qui désigne la création du muon et B son impact sur le sol (ou sa détection) on déduit que sa durée de vol est

$$(t_B - t_A) \simeq \frac{h}{c} = 3.10^{-5}\text{s}$$

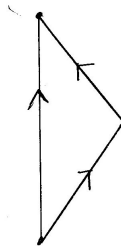
On détecte en effet des muons sur le sol. Le paradoxe est que d’après des expériences de laboratoire, on sait que le muon a une **durée de vie moyenne**

$$\tau_{vie} = 2.10^{-6}\text{s} \ll (t_B - t_A)$$

ensuite il se désintègre. Pourquoi le muon atteint le sol avant de se désintégrer ? L’explication est que le temps propre écoulé entre A et B pour le muon est d’après (3.11) $\tau_{AB} = \frac{1}{\gamma}(t_B - t_A)$ très court (car γ est très grand), plus court que sa durée de vie τ_{vie} . Il a donc eu le temps d’atteindre le sol avant de se désintégrer. (exercice : quelle vitesse minimale v faut il pour avoir $\tau_{AB} < \tau_{vie}$?)

Les jumeaux de Langevin : Imaginons deux frères jumeaux Pierre et Paul. Pierre reste sur Terre alors que Paul part dans l’espace et fait un voyage aller-retour à une vitesse $v \simeq c$. Appelons A l’évènement qui est son départ et B son arrivée. Alors la durée du voyage pour Pierre (immobile sur Terre) est son temps propre $t_B - t_A$ alors que pour le voyageur Paul la durée du voyage est d’après (3.11) plus courte : $\tau_{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (t_B - t_A) \ll (t_B - t_A)$.

(Cet effet est mesuré avec grande précision entre deux horloges atomiques, une restée sur Terre et l’autre embarquée dans un avion qui effectue un voyage. Dans ce cas $v \ll c$ et la différence est bien sûr minime).



3.2.4 Principe variationnel

Dans la théorie de la relativité, tous les phénomènes sont **locaux** dans l’espace temps. Il n’y a pas d’influence à distance comme la force de gravitation de Newton entre deux planètes, ou la force de Coulomb entre particules chargées. Tous les effets sont localisés

dans l'espace temps et se propagent à une vitesse égale (ou inférieure) à la vitesse de la lumière.

En 1885 Maxwell a montré que les forces électromagnétiques sont “véhiculées” par le champ électromagnétique (équations de Maxwell). Ainsi la force de Coulomb entre deux charges est en fait le résultat de l'action de la charge 1 sur le champ électromagnétique dans son voisinage, qui se propage à la vitesse c et influence ensuite la particule 2. Le résultat est similaire à la force de Coulomb.

De même la force de gravité de Newton doit être abandonnée en relativité. Einstein a montré que l'effet est en fait provoqué par le tenseur g de l'espace temps qui est modifié localement par la planète 1, se propage vers la planète 2 qui la subit (et inversement). Le champ de tenseur g pour la gravitation est similaire au champ électromagnétique pour les forces électromagnétiques. Dans la suite, on considère donc qu'il y a une métrique g dans l'espace temps (mais pas de force de gravitation).

Proposition 29. *Supposons que une particule ne soit soumise à aucune force électromagnétique. Alors sa ligne d'univers entre deux évènements A et B est telle que l'action*

$$\begin{aligned} S &= \int_A^B d\tau \\ &= \int_A^B \sqrt{g\left(\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\lambda}\right)} d\lambda \end{aligned}$$

*est extrémale (maximale en fait) par rapport à toutes les variations passant par A et B . On dit que la ligne d'univers est une **géodésique** de l'espace temps.*

On montre qu'une formulation équivalente (et plus pratique) est

$$\mathcal{E} = \int_A^B g\left(\frac{dX}{d\lambda}, \frac{dX}{d\lambda}\right) d\lambda \quad (3.12)$$

est extrémale (pour une paramétrisation $X(\lambda)$ arbitraire).

Remarquons que grâce au théorème (3.3) on peut formuler la condition ci-dessus grâce aux équations de Euler-Lagrange. Nous traitons ci-dessous le cas de l'espace temps plat, donnant des géodésiques qui sont des lignes droites.

Dans le TD, nous traitons le cas de l'espace temps courbé par une étoile (ou un trou noir) appelé **métrique de Schwartzchild** et nous montrons que les géodésiques éloignées de l'étoiles, sont des ellipses identiques aux solutions de l'équation de Newton avec la force de gravitation de Newton.

Exemple de géodésique : Dans l'espace temps plat de Minkowski (3.9), la condition (3.12) fait intervenir le Lagrangien

$$\begin{aligned} L(X, V) &= g(V, V) \\ &= V_t^2 - \frac{1}{c^2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \end{aligned}$$

Les équations de Euler-Lagrange sont (on écrit ici pour la composante t) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial V_t} \right) &= \frac{\partial L}{\partial X_t} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dV_t}{d\lambda} &= 0 \\ \Leftrightarrow V_t &= \frac{dt}{d\lambda} = C_t = \text{cste} \end{aligned}$$

donc

$$t(\lambda) = C_t \lambda$$

de même on a $x(\lambda) = C_x \lambda$ etc. On a obtenu l'équation paramétrée d'une droite dans l'espace temps (x, y, z, t) . Cette ligne d'univers (droite) correspond à un déplacement à vitesse constante $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{C_x}{C_t}$, etc.

Equation de Hamilton On a vu en (3.7) que en général le principe variationnel s'exprime de façon équivalente par les équation de Hamilton. En relativité, d'après (3.12) et (3.10) le Lagrangien est (on rajoute un facteur 1/2 qu est sans importance)

$$L(X, V) = \frac{1}{2} g(V, V) = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu}(X) V^\mu V^\nu$$

Alors les impulsions sont

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial V^\mu} = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} V^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

et le Hamiltonien est

$$\begin{aligned} H(X, P) &= PV - L = \sum_\mu \left(\sum_\nu g_{\mu\nu} V^\nu \right) V^\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu}(X) V^\mu V^\nu \\ &= \frac{1}{2} g(V, V) \end{aligned}$$

où il faut remplacer V par P .

Remarque : en algèbre linéaire (voir cours de M1 @@), on montre que P est le vecteur dual métrique du vecteur V et que $H(X, P) = \frac{1}{2} (g^{-1})(P, P)$ est la métrique induite sur l'espace cotangent, ici exprimés en coordonnées.

Comme le H est indépendant du paramètre λ , sa valeur est conservée le long de la ligne d'univers : $g(V, V) = \text{cste}$.

En choisissant le paramètre égal au temps propre $\lambda = \tau$ le long de la trajectoire, on a $\sqrt{g\left(\frac{dX}{d\tau}, \frac{dX}{d\tau}\right)} d\tau = d\tau$ donc $g\left(\frac{dX}{d\tau}, \frac{dX}{d\tau}\right) = 1$.

@@ finir @@

Chapitre 4

Formalisme Hamiltonien de la mécanique

D'après le théorème 28 page 51, les équations de Hamilton sont équivalentes aux équations de Euler-Lagrange ou au principe variationnel. Pourtant le formalisme Hamiltonien est préférable pour exprimer les équations de mouvement car il est plus adapté pour les étudier et les résoudre ou pour effectuer des approximations. C'est ce que l'on développe dans ce chapitre.

Il est habituel et naturel d'utiliser la 2-forme symplectique pour la géométrie Hamiltonienne. Mais cela nécessite une introduction à la géométrie différentielle. On va donc seulement utiliser les crochets de Poisson. Néanmoins on fera un paragraphe sur les champs de vecteurs et le flot qu'ils génèrent.

4.1 Transport de fonctions sur l'espace de phase

Dans cette section on présente des notions fondamentales sur les champs de vecteur, les trajectoires et le transport qu'il génère (ce sont des notions de géométrie différentielle, voir [7, 9, 10]). On va l'appliquer au cas d'un champ de vecteur Hamiltonien sur l'espace de phase, mais ce qui est présenté ici est bien entendu plus général.

On considère l'espace \mathbb{R}^d de dimension d . Un point $x \in \mathbb{R}^d$ a des coordonnées $x \equiv (x^1, \dots, x^d)$. Par exemple (le cas qui nous intéresse) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est un espace de phase à n degrés de libertés de dimension $d = 2n$, alors $x^1 = X^1, \dots, x^n = X^n$ sont les variables de position et $x^{n+1} = P^1, \dots, x^{2n} = P^n$ sont les variables impulsion.

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow f(x) \end{cases}$$

une **fonction** sur l'espace \mathbb{R}^d que l'on pourrait appeler "**observable**".

Par exemple sur l'espace de phase $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{2n}$, la coordonnées X^j (indice j fixé) est une

fonction appelée “**fonction position**” :

$$x = (X^1, \dots, X^n, P^1, \dots, P^n) \rightarrow X^j$$

De même la coordonnée P^k est une “**fonction impulsion**”. Autre exemple, le Hamiltonien $H(X, P) = \frac{P^2}{2m} + U(X)$ est une fonction sur \mathcal{P} qui est la “**fonction énergie**”.

Notation : $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est l’espace des fonctions infiniment dérivables sur \mathcal{P} . On écrit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Définition 30. Un **champ de vecteur** V sur l’espace $\mathcal{P} = \mathbb{R}^d$ est un vecteur de coordonnées $(V^1(x), \dots, V^d(x))$ en chaque point $x \in \mathcal{P}$. Ce champ de vecteur détermine des **équations du mouvement** :

$$\frac{dx(t)}{dt} = V(x(t))$$

c’est à dire :

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = V^1(x(t)), \quad \dots, \quad \frac{dx^d(t)}{dt} = V^d(x(t))$$

La solution de ces équations $x(t) = (x^1(t), \dots, x^d(t))$ passant par un point donné $x(0) = (x^1(0), \dots, x^d(0)) \in \mathcal{P}$, est **une trajectoire** paramétrée par $t \in \mathbb{R}$. (En tout points V est le “**vecteur vitesse**” de cette trajectoire, ou que cette trajectoire est une “**ligne de champ**”). Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, l’application :

$$\phi_t : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow \phi_t(x) = x(t) \in \mathbb{R}^d$$

s’appelle **le flot au temps t** généré par le champ de vecteur V . Remarquer que

$$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}, \quad \forall t_1, t_2 \quad (4.1)$$

Par exemple sur l’espace de phase $(X, P) \in \mathbb{R}^2$ (ou plus généralement \mathbb{R}^{2n}), la fonction Hamiltonien $H(X, P)$ détermine **le champ de vecteur Hamiltonien** $V = (V^X, V^P) = (\frac{\partial H}{\partial P}, -\frac{\partial H}{\partial X})$ et les “équations de mouvement de Hamilton” sont :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V^X = \frac{\partial H}{\partial P} \\ \frac{dP}{dt} &= V^P = -\frac{\partial H}{\partial X} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Par exemple si $H(X, P) = \frac{1}{2m}P^2$ (particule libre) alors

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V^X = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \frac{dP}{dt} &= V^P = -\frac{\partial H}{\partial X} = 0 \end{aligned}$$

donc le **flot Hamiltonien** est

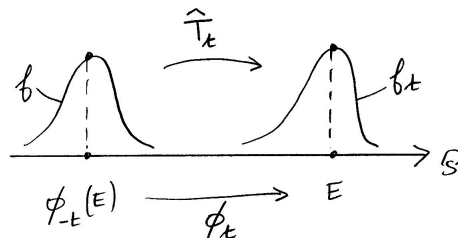
$$\phi_t : (X(0), P(0)) \rightarrow \left(X(t) = X(0) + \frac{P(0)}{m}t, P(t) = P(0) \right)$$

les trajectoires sont des droites parcourues à vitesse constante.

Définition 31. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. La fonction f transportée par le flot ϕ_t est définie par

$$f_t(x) = f(\phi_{-t}(x)) \tag{4.3}$$

Voir figure @@ pour justifier cette définition.



La proposition suivante établit l'équation de mouvement pour la fonction transportée $f_t(x) = f(\phi_{-t}(x))$.

Proposition 32. Soit ϕ_t est le flot généré par un champ de vecteur V . Une fonction f transportée par le flot ϕ_t , donnée par

$$f_t(x) = f(\phi_{-t}(x))$$

satisfait l'équation de transport :

$$\frac{df_t}{dt} = -V(f_t) \quad (4.4)$$

où

$$V = \sum_i V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.5)$$

est l'opérateur différentiel associé au champ de vecteur V (même notation). On dit que V est le **générateur** du transport des fonctions par le flot. De plus

$$\begin{aligned} f_t(x) &= f(\phi_{-t}(x)) \\ &= (\exp(-tV)f)(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

On appelle

$$\hat{T}_t := \exp(-tV) : C^\infty(\mathcal{P}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{P})$$

l'opérateur de transfert.

Démonstration. Soit $x(t) = \phi_t(x)$ une trajectoire partant de x . Par définition on a

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = V^i(x(t))$$

et d'après (4.1)

$$f_{t+s}(x) = f(\phi_{-t}(\phi_{-s}(x))) = f_t(\phi_{-s}(x)) = f_t(x(-s))$$

donc

$$\left(\frac{df_{t+s}}{ds}\right)_{s=0}(x) = \left(\frac{d(f_t(x(-s)))}{ds}\right)_{s=0} = -\sum_i \left(\frac{\partial f_t}{\partial x^i}\right) \frac{dx^i}{ds} = -\sum_i V^i(x) \frac{\partial f_t}{\partial x^i} = -\mathbf{V}(f_t)(x)$$

on a montré que

$$\frac{df_t}{dt} = -\mathbf{V}(f_t)$$

où

$$\mathbf{V} = \sum_i V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Montrons maintenant que cette équation a une solution “formelle” qui est

$$f_t(x) = (\exp(-t\mathbf{V})f)(x)$$

où par définition de l’exponentielle

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

donc ici

$$\exp(-t\mathbf{V})f = \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbf{V}^n}{n!} f = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{V}(\dots \mathbf{V}(f)))}_n$$

En effet, posons $\tilde{f}_t = \exp(-t\mathbf{V})f$. On veut montrer que $\tilde{f}_t = f_t$. On a

$$\frac{d\tilde{f}_t}{dt} = -\mathbf{V} \exp(-t\mathbf{V})f = -\mathbf{V}(\tilde{f}_t)$$

Comme $\tilde{f}_0 = f_0 = f$ est \tilde{f}_t et f_t satisfont la même équation différentielle du premier ordre, on déduit que $\tilde{f}_t = f_t, \forall t$ d’après l’unicité de la solution. \square

Remarques

- La signification de $\mathbf{V}(f) = \sum V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ est de mesurer la variation de la fonction f dans la direction du vecteur $V = (V^1, \dots, V^d)$ (on parle aussi de **dérivée directionnelle**).
- (*) En mathématiques, (4.5) sert de définition : un champ de vecteur est défini comme étant un opérateur différentiel d’ordre 1.
- L’écriture (4.5) est très utile pour calculer les coordonnées d’un champ de vecteur si on change de système de coordonnées sur l’espace. Par exemple entre coordonnées cartésiennes et polaires :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

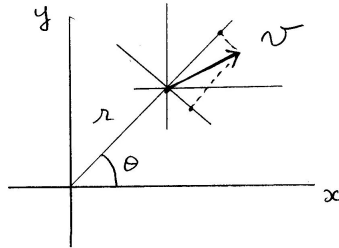
Alors si (V_r, V_θ) sont les coordonnées polaires d’un champ de vecteur V , et que l’on cherche ses coordonnées cartésiennes (V_x, V_y) on écrit :

$$\begin{aligned} V &= V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= V_r \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + V_\theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\ &= V_r \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) + V_\theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} V_x &= V_r \cos \theta - r \sin \theta V_\theta \\ V_y &= V_r \sin \theta + r \cos \theta V_\theta \end{aligned}$$

Solution que l'on peut deviner graphiquement :



4.1.1 Exemple simple de la translation en x sur l'espace \mathbb{R} :

Soit le champ de vecteur constant de composante $V_x = 1$, c'est à dire

$$V = \frac{d}{dx}$$

L'équation différentielle du mouvement est

$$\frac{dx}{dt} = V_x = 1$$

la solution $x(t) = x(0) + t$. Donc le flot :

$$\phi_t : x \rightarrow x + t$$

qui est une translation en x . Soit $f_0(x)$ une fonction à $t = 0$. Alors

$$f_t(x) = f_0(\phi_{-t}(x)) = f_0(x - t)$$

On va vérifier directement (4.6). On utilise la formule de Taylor du développement limité en $t = 0$ à la 2eme ligne :

$$\begin{aligned} f_t(x) &= f_0(x - t) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n f_0}{dx^n} = \left(e^{-t \frac{d}{dx}} f_0 \right) (x) = (e^{-tV} f_0) (x) \end{aligned}$$

Remarquons que l'équation de transport infinitésimal (4.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{df_t}{dt} &= -\frac{df}{dx} \\ \Leftrightarrow i\hbar \frac{df_t}{dt} &= -i\hbar \frac{df}{dx} = \hat{p}_x(f) \end{aligned}$$

où on a introduit la constante de Planck \hbar et l'opérateur impulsion $\hat{p}_x := -i\hbar \frac{d}{dx}$ de la mécanique quantique. Cela montre que l'opérateur impulsion \hat{p}_x est le générateur des translations de fonctions dans la direction x . (de même on peut montrer que l'opérateur $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ en coordonnées sphériques est le générateur des rotations autour de l'axe z . Plus généralement voir exercice de TD)

4.1.2 Exemples de champs de vecteurs et leur flot (*)

Pour chaque exemple, on écrit le champ de vecteur, l'équation différentielle associée (dans un système de coordonnées) et la solution, qui est l'expression du flot.

- Sur \mathbb{R} , avec la coordonnée $x \in \mathbb{R}$:

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_t : x(t) = x(0) + t$$

$$V = x \frac{\partial}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = x \quad \phi_t : x(t) = e^t x(0)$$

- Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, avec les coordonnées polaires r, θ :

$$V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \end{cases} \quad \phi_t : \begin{cases} r(t) = r(0) \\ \theta(t) = \theta(0) + \frac{t}{r} \end{cases}$$

c'est une rotation à vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}$. Les trajectoires sont des cercles.

- Sur \mathbb{R}^2 , tracer le champ de vecteur $V = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ et déterminer le flot ϕ_t associé et la forme des trajectoires.
- Dans les exemples ci-dessus on trouve facilement les trajectoires (le flot) à partir de l'expression du champ de vecteur. Le théorème de Poincaré Bendixon montre que plus généralement en dimension 2, il est possible d'intégrer un champ de vecteur pour trouver les trajectoires, qui ont un comportement "simple". Par contre à partir de la dimension 3, il est en général impossible de trouver les trajectoires explicitement, bien que elles soient "déterminées". Une expression simple de champ de vecteur peut générer des trajectoire d'apparence "très complexes et aléatoires". Ce problème est à la base de **la théorie du chaos déterministe**. La raison est un phénomène de "sensibilité aux conditions initiales".

4.1.3 Propriété de groupe du flot (*)

Les relations suivantes montrent que le flot ϕ_t et l'opérateur de transfert \hat{T}_t forment un groupe à 1 dimension. On a

$$\phi_{t_1}(\phi_{t_2}(E)) = \phi_{t_1+t_2}(E)$$

$$\phi_{t=0}(E) = E$$

et

$$\begin{aligned} e^{-t_1 \mathcal{V}} (e^{-t_2 \mathcal{V}} f) &= e^{-(t_1+t_2) \mathcal{V}} f \\ \Leftrightarrow \hat{T}_{t_1} \hat{T}_{t_2} &= \hat{T}_{t_1+t_2} \\ \hat{T}_{t=0} &= Id \end{aligned}$$

4.1.4 Evolution de fonctions et de points et de distributions (*) :

A la limite où la fonction f_0 est très “concentrée” près d’un point E_0 alors $f_t = \hat{T}_t (f_0)$ décrit l’évolution du point $E_t = \phi_t(E_0)$. Plus précisément, un point est bien décrit par une distribution de Dirac δ_{E_0} (on rappelle que la **distribution de Dirac** au point E_0 est par définition une fonctionnelle qui donne la valeur d’une fonction au point E_0 : $\delta_{E_0}(f) = f(E_0)$). On écrit aussi $\langle \delta_{E_0} | f \rangle = f(E)$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \delta_{E_0} | \hat{T}_t f_0 \rangle &= \left(\hat{T}_t f_0 \right) (E_0) = f_0(\phi_{-t}(E_0)) \\ &= \langle \delta_{\phi_{-t}(E_0)} | f_0 \rangle \end{aligned}$$

mais aussi

$$\langle \delta_{E_0} | \hat{T}_t f_0 \rangle = \langle \hat{T}_t^* \delta_{E_0} | f_0 \rangle$$

donc

$$\hat{T}_t^* \delta_{E_0} = \delta_{\phi_{-t}(E_0)}$$

ou

$$\hat{T}_{-t}^* \delta_{E_0} = \delta_{\phi_t(E_0)}$$

ce qui montre que l’opérateur dual \hat{T}_{-t}^* fait évoluer une distribution de Dirac sur la trajectoire du point $\phi_t(E_0)$.

4.1.5 Non commutativité du flot : (*)

Proposition 33. Soient V_1, V_2 deux champs de vecteurs générant les flots $\phi_{t_1}^{(1)}, \phi_{t_2}^{(2)}$ respectivement. Si $V_1 V_2 = V_2 V_1$ alors

$$\phi_{t_1}^{(1)} \left(\phi_{t_2}^{(2)}(E) \right) = \phi_{t_2}^{(2)} \left(\phi_{t_1}^{(1)}(E) \right), \quad \forall t_1, t_2, E$$

Démonstration. Soit $\hat{T}_{t_1}^{(1)} = e^{-t_1 V_1}, \hat{T}_{t_2}^{(2)} = e^{-t_2 V_2}$ les opérateurs de transfert associés. Si $V_1 V_2 = V_2 V_1$ alors on déduit que $\hat{T}_{t_1}^{(1)} \hat{T}_{t_2}^{(2)} = \hat{T}_{t_2}^{(2)} \hat{T}_{t_1}^{(1)}$ donc

$$f \left(\phi_{t_1}^{(1)} \left(\phi_{t_2}^{(2)}(E) \right) \right) = f \left(\phi_{t_2}^{(2)} \left(\phi_{t_1}^{(1)}(E) \right) \right), \quad \forall t_1, t_2, E, f$$

et on déduit le résultat. \square

Proposition 34. Si V et W sont deux champs de vecteurs alors $[V, W] = VW - WV$ est un champ de vecteur appelé **crochet de Lie** des champs de vecteur.

Démonstration. Soit $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $W = \sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ et $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ alors

$$(VW - WV)f = \sum_{i,j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(W^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(V^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) + V^i W^j \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &\quad - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W^i V^j \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_i V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

donc $Z = VW - WV$ est un champ de vecteur de composantes

$$Z_j = \left(\sum_i V^i \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) - W^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \right)$$

□

Exercice 35. Sur $M = \mathbb{R}^2$, soit $V = x \frac{\partial}{\partial y}$ et $W = y \frac{\partial}{\partial x}$. Calculer et représenter le champ de vecteur $Z = [V, W]$ ainsi que ses trajectoires.

Solution : $Z = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$. Ses trajectoires sont des hyperboles (voir ex. + haut).

4.2 Les crochets de Poisson

On note $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ l'espace de phase pour n degrés de liberté, et $(X, P) \in \mathcal{P} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ les coordonnées position X et impulsion P .

Définition 36. Soit $f(X, P), g(X, P) \in C^\infty(\mathcal{P})$ deux fonctions sur l'espace de phase. On définit

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \in C^\infty(\mathcal{P}) \quad (4.9)$$

le **crochet de Poisson** de f et g (c'est aussi une fonction sur \mathcal{P}).

Remarques :

- Le crochet de Poisson est antisymétrique (cela est clair d'après (4.9)) :

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (4.10)$$

donc

$$\{f, f\} = 0 \quad (4.11)$$

- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes, on a la propriété de linéarité à droite :

$$\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda \{f, g\} + \mu \{f, h\}$$

et de même à gauche.

- On a

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h$$

On va maintenant voir la relation entre le crochet de Poisson et les champs de vecteur Hamiltonien. Rappelons que si $H(X, P)$ une fonction sur \mathcal{P} (un Hamiltonien indépendant de t) alors d'après (4.2) le **champ de vecteur Hamiltonien** associé à H est

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_H &= \mathcal{V}^X \frac{\partial}{\partial X} + \mathcal{V}^P \frac{\partial}{\partial P} \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right) \frac{\partial}{\partial X} - \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial P} \end{aligned}$$

Proposition 37. *Pour deux fonctions $f, g \in C^\infty(\mathcal{P})$ on a*

$$\mathcal{V}_g(f) = -\{g, f\} = -\mathcal{V}_f(g) \quad (4.12)$$

où \mathcal{V}_f est le champ de vecteur Hamiltonien associé à la fonction f (et de même pour g). Aussi on a la relation suivante entre les crochets de Lie et les crochets de Poisson pour des champs de vecteurs Hamiltonien (par définition $[\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_g] = \mathcal{V}_f \mathcal{V}_g - \mathcal{V}_g \mathcal{V}_f$) :

$$[\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_g] = -\mathcal{V}_{\{f, g\}}$$

On déduit la **relation de Jacobi** entre trois fonctions f, g, h :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Remarque (*) : cela montre que $(C^\infty(\mathcal{P}), \{.,.\})$ est une algèbre de Lie.

Démonstration. On a $\mathcal{V}_g = \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P}$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_g(f) &= \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial f}{\partial X} - \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial P} \\ &= -\{g, f\} \end{aligned}$$

Et d'après (4.10), on a

$$-\{g, f\} = \{f, g\} = -\mathcal{V}_f(g)$$

(suite en TD)(*) On va maintenant calculer $[\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_g] = \mathcal{V}_f\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_g\mathcal{V}_f$. On utilise le calcul fait en (4.7) qui a montré que le crochet de Lie est un opérateur diff d'ordre 1, donc inutile de garder les opérateurs d'ordre 2. On a $\mathcal{V}_f = \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P}$ et de même $\mathcal{V}_g = \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P}$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_f\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_g\mathcal{V}_f &= \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \right) - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \right) \\ &\quad - \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \right) + \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial P} \right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \frac{\partial}{\partial P} \right) - \frac{\partial f}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial P^2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial^2 g}{\partial X \partial P} \frac{\partial}{\partial P} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial g}{\partial P} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \frac{\partial}{\partial P} \right) + \frac{\partial g}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial P} \frac{\partial}{\partial P} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial P} \right) \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial P} \right) \frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{\partial \{g, f\}}{\partial P} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial \{g, f\}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial P} \\ &= \mathcal{V}_{\{g, f\}} \end{aligned}$$

On déduit que si $h \in C^\infty(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned} &[\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_g]h = -\mathcal{V}_{\{f, g\}}h \\ \Leftrightarrow &\mathcal{V}_f(\mathcal{V}_g h) - \mathcal{V}_g(\mathcal{V}_f h) = -\mathcal{V}_{\{f, g\}}h \\ \Leftrightarrow &\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} \\ \Leftrightarrow &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \end{aligned}$$

On pourrait montrer la relation de Jacobi directement (sans passer par les champs de vecteur). \square

Proposition 38. Notons ϕ_t le flot Hamiltonien (??) généré par le Hamiltonien H . Soit $f_0 \in C^\infty(\mathcal{P})$ et $f_t = \hat{T}_t(f_0) = f_0(\phi_{-t})$ la fonction f_0 transportée par le flot Hamiltonien. L'équation de transport infinitésimale s'écrit :

$$\frac{df_t}{dt} = \{H, f_t\} = -\mathcal{V}_H(f_t) \quad (4.13)$$

Démonstration. On a déjà vu en (4.4) que $\frac{df_t}{dt} = -\mathcal{V}_H(f_t)$ et aussi $\{H, f_t\} = -\mathcal{V}_H(f_t)$ en (4.12). \square

On rappelle la notation du **symbole de kronecker** :

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Proposition 39. *Concernant les fonctions coordonnées X^j, P^k , on a pour tous j, k*

$$\{X^j, P^k\} = \delta_{j,k}, \quad \{X^j, X^k\} = 0, \quad \{P^j, P^k\} = 0$$

*On dit que $(X^1, \dots, X^n, P^1, \dots, P^n)$ sont des **coordonnées canoniques** sur l'espace de phase \mathcal{P} .*

Démonstration. On applique la définition des crochets de Poisson. Par exemple

$$\begin{aligned} \{X^j, P^k\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial X^i} \frac{\partial P^k}{\partial P_i} - \frac{\partial X^j}{\partial P_i} \frac{\partial P^k}{\partial X_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_{i,j} \delta_{k,i} - 0 = \delta_{j,k} \end{aligned}$$

etc pour les autres termes. \square

Remarque (*) Si X^i, P^j désignent les fonctions coordonnées position et impulsion, alors leur valeur évolue d'après

$$X^i(t) := X^i(\phi_t(E)), \quad P^j(t) := P^j(\phi_t(E))$$

ou avec l'équation infinitésimale (4.13) (attention il y a un changement du signe de t) on peut écrire :

$$\frac{dX^i(t)}{dt} = -\{H, X^i\}, \quad \frac{dP^j(t)}{dt} = -\{H, P^j\} \quad (4.14)$$

Ces équations sont en fait équivalentes aux équations de mouvement de Hamilton (??).

On peut vérifier (4.14) directement (exercice TD).

4.3 Transformation canoniques et coordonnées canoniques

Définition 40. Supposons que

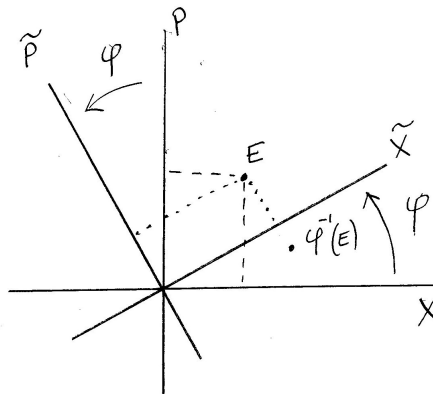
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \mathcal{P} \\ E & \rightarrow \varphi(E) \end{cases}$$

soit une transformation bijective sur l'espace de phase (un difféomorphisme avec inverse φ^{-1}). Soit

$$\tilde{X}^i := X^i \circ \varphi^{-1}, \quad \tilde{P}^j := P^j \circ \varphi^{-1}$$

les nouvelles fonctions coordonnées sur \mathcal{P} , résultant de la transformation φ . On dit que les coordonnées \tilde{X}^i, \tilde{P}^j sont des **coordonnées canoniques** et que φ est une **transformation canonique** si

$$\{\tilde{X}^i, \tilde{P}^j\} = \delta_{i,j}, \quad \{\tilde{X}^j, \tilde{X}^k\} = 0, \quad \{\tilde{P}^j, \tilde{P}^k\} = 0 \quad (4.15)$$



Remarque : on dit aussi que φ est une **transformation symplectique** ou un **symplectomorphisme**.

Rappels : On note $(D\varphi)(X, P)$ la **différentielle** de la transformation φ . En coordonnées, si $(\tilde{X}, \tilde{P}) = \varphi(X, P)$ alors $D\varphi$ est donnée par la matrice appelée **matrice Jacobiennne**

$$(D\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial X} & \frac{\partial \tilde{X}}{\partial P} \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} & \frac{\partial \tilde{P}}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Le déterminant $\det(D\varphi)(X, P)$ au point (X, P) informe si φ augmente l'élément de volume $dV = (dXdP)$ ou le diminue d'après la formule (utilisée dans les changements de variables dans une intégrale multiple) :

$$d\tilde{V} = |\det(D\varphi)| dV, \quad \text{avec } dV = (dXdP), \quad d\tilde{V} = (d\tilde{X}d\tilde{P})$$

Si $\det(D\varphi) > 0$ alors φ préserve l'orientation.

Proposition 41. *A un degré de liberté ($n = 1$) une transformation $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est canonique si et seulement si*

$$\det(D\varphi)(X, P) = 1, \quad \forall X, P$$

cad qu'elle préserve l'aire et l'orientation en tout points.

Démonstration. On calcule

$$\{\tilde{X}, \tilde{P}\} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial P} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial P} = \text{Det}(D\varphi) = 1$$

et $\{\tilde{X}, \tilde{X}\} = \{\tilde{P}, \tilde{P}\} = 0$ d'après (4.11). □

Remarque (*) On peut montrer que pour n degré de liberté, si φ est une transformation canonique alors $\det(D\varphi) = 1$, et donc φ préserve le volume et l'orientation (c'est le théorème de Liouville), mais la réciproque n'est pas vraie si $n \geq 2$. Il faut que la somme des aires sur chaque couples de variables (X^1, P^1) , (X^2, P^2) etc.. soient conservées.

C'est le paradoxe du "chameau symplectique" ou "Théorème de non-tassement de Gromov" 1985, voir wikipedia : si il suffisait que le volume soit conservé, alors on imagine un flot incompressible. Par un flot incompressible on peut faire passer un gros volume (une boule) par un petit trou. Gromov a montré que c'est impossible par un flot Hamiltonien (qui est une transformation canonique).

Exemples de transformations canoniques à 1 degré de liberté :

$$\varphi : (X, P) \rightarrow \left(2X, \frac{1}{2}P\right), \quad D\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(D\varphi) = 1.$$

$$\varphi : (X, P) \rightarrow (P, -X), \quad D\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(D\varphi) = 1.$$

mais par contre

$$\varphi : (X, P) \rightarrow (2X, 2P),, \quad D\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(D\varphi) = 4.$$

n'est pas une transformation canonique.

La proposition suivante montre que les équations de mouvement de Hamilton et les crochets de Poisson ont toujours la même forme lorsqu'elles sont exprimées avec des coordonnées canoniques.

Proposition 42. Soit $(\tilde{X}, \tilde{P}) = \varphi(X, P)$ des coordonnées canoniques sur l'espace de phase \mathcal{P} obtenues par une transformation canonique φ à partir de variables canoniques (X, P) . Soit $f(X, P), g(X, P)$ deux fonctions que l'on exprime dans les nouvelles variables par $f(\varphi^{-1}(\tilde{X}, \tilde{P}))$ et $g(\varphi^{-1}(\tilde{X}, \tilde{P}))$. Alors les crochets de Poisson sont

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}_i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{P}_i} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}_i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{X}_i} \quad (4.16)$$

En particulier pour une fonction $H(X, P)$ (Hamiltonien) les équations de mouvement (1.8) s'écrivent

$$\frac{d\tilde{X}^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{P}^j}, \quad \frac{d\tilde{P}^j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{X}^j} \quad (4.17)$$

Démonstration. Il suffit de montrer (4.16) et (4.17) en découle d'après (4.14). On effectue le changement de variable

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \\ &= \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{X}^j} \frac{\partial \tilde{X}^j}{\partial X^i} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}^j} \frac{\partial \tilde{P}^j}{\partial X^i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{X}^k} \frac{\partial \tilde{X}^k}{\partial P^i} + \frac{\partial g}{\partial \tilde{P}^k} \frac{\partial \tilde{P}^k}{\partial P^i} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{X}^j} \frac{\partial \tilde{X}^j}{\partial P^i} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}^j} \frac{\partial \tilde{P}^j}{\partial P^i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{X}^k} \frac{\partial \tilde{X}^k}{\partial X^i} + \frac{\partial g}{\partial \tilde{P}^k} \frac{\partial \tilde{P}^k}{\partial X^i} \right) \\ &= \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{X}^j} \frac{\partial g}{\partial \tilde{X}^k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{X}^j}{\partial X^i} \frac{\partial \tilde{X}^k}{\partial P^i} - \frac{\partial \tilde{X}^j}{\partial P^i} \frac{\partial \tilde{X}^k}{\partial X^i} \right) + \dots \\ &= \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{X}^j} \frac{\partial g}{\partial \tilde{X}^k} \right) \{ \tilde{X}^j, \tilde{X}^k \} + \dots \end{aligned}$$

or d'après la définition (4.15) seuls les termes $\{\tilde{X}^j, \tilde{P}^j\} = 1$ sont non nuls. Il reste

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \tilde{X}^i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{P}^i} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{P}^i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{X}^i}$$

□

Remarques importantes :

- l'intérêt principal des transformations canoniques est le suivant :
 - partant de $H(X, P)$ donné définissant un champ de vecteur Hamiltonien \mathcal{V}_H on aimerait trouver le flot ϕ_t (les trajectoires).
 - on va effectuer des transformations canoniques (changement de coordonnées sur \mathcal{P}) de façon à simplifier l'expression de H donnant ainsi des équations de mouvement équivalentes mais plus simples à résoudre (voir technique des "formes normales" plus loin)
- Pour définir une dynamique Hamiltonienne sur un espace de phase \mathcal{P} (ou "espace d'états"), il faut un crochet de Poisson sur l'algèbre des fonctions et une fonction particulière H qui génère la dynamique par

$$\frac{df_t}{dt} = \{H, f_t\}$$

Voici une façon très utile pour effectuer une transformation canonique (on l'utilisera pour les méthodes d'approximation en théorie des formes normales)

Proposition 43. Soit $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ une fonction (quelconque) et \mathcal{V}_f le champ de vecteur Hamiltonien associé générant le flot Hamiltonien $\phi_s : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $s \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, ϕ_s est une transformation canonique sur \mathcal{P} (noter que s est un paramètre et pas forcément le temps physique).

Démonstration. Il faut vérifier que les nouvelles coordonnées $\tilde{X}^{i,s} := X^i \circ \phi_{-s}$, $\tilde{P}^{i,s} := P^i \circ \phi_{-s}$ sont canoniques. Soient i, j fixés. Posons pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$C_s := \{\tilde{X}^{i,s}, \tilde{P}^{j,s}\} \in C^\infty(\mathcal{P})$$

qui est une fonction sur \mathcal{P} . On veut montrer que $C_s = \delta_{i,j}$. Pour cela, on va montrer que

$$\frac{dC_s}{ds} = \{f, C_s\}$$

On pourra déduire d'après (4.13) que

$$C_s(X, P) = C_0(\phi_{-s}(X, P))$$

or $C_0 = \delta_{i,j}$ donc cela donnera $C_s = \delta_{i,j}$. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_s}{ds} &= \left\{ \frac{d\tilde{X}^{i,s}}{ds}, \tilde{P}^{j,s} \right\} + \left\{ \tilde{X}^{i,s}, \frac{d\tilde{P}^{j,s}}{ds} \right\} \\
 &= \left\{ \left\{ f, \tilde{X}^{i,s} \right\}, \tilde{P}^{j,s} \right\} + \left\{ \tilde{X}^{i,s}, \left\{ f, \tilde{P}^{j,s} \right\} \right\} \\
 &= \left\{ \tilde{P}^{j,s}, \left\{ \tilde{X}^{i,s}, f \right\} \right\} + \left\{ \tilde{X}^{i,s}, \left\{ f, \tilde{P}^{j,s} \right\} \right\} \text{ d'après antisym.} \\
 &= - \left\{ f, \left\{ \tilde{P}^{j,s}, \tilde{X}^{i,s} \right\} \right\} = \left\{ f, \left\{ \tilde{X}^{i,s}, \tilde{P}^{j,s} \right\} \right\} \text{ d'après Jacobi} \\
 &= \left\{ f, C_s \right\}
 \end{aligned}$$

On fait de même pour les autres relations. Dans cette preuve on a montré précisément que le flot Hamiltonien ϕ_s préserve la structure de crochet de Poisson sur l'espace de phase \mathcal{P} . \square

4.4 Variables angle-action à un degré de liberté

Dans cette section, on considère un Hamiltonien $H(x, p)$ **indépendant du temps et à un degré de liberté** $(x, p) \in \mathbb{R}^2$. On a déjà étudié ce cas en Section 1.4 page 23.

Dans une zone où les trajectoires γ sont fermées on va définir un nouveau système de coordonnées sur l'espace de phase appelé variables angle-action. On note $S(\gamma)$ la surface contenue dans la trajectoire γ et H son énergie (valeur du Hamiltonien $H(x, p)$ sur γ). On note $T(\gamma)$ la période de la trajectoire fermée γ .

Pour cela on choisit arbitrairement (mais continuellement) un point de référence M_0 sur chaque trajectoire γ . Par exemple on choisit les points en $x = 0, p > 0$.

À un point $M = (x, p)$ quelconque appartenant à une trajectoire γ , on note t_M le temps qu'il faut à un point pour aller du point de référence au point M le long de la trajectoire γ . Remarque que $0 \leq t_M < T(\gamma)$.

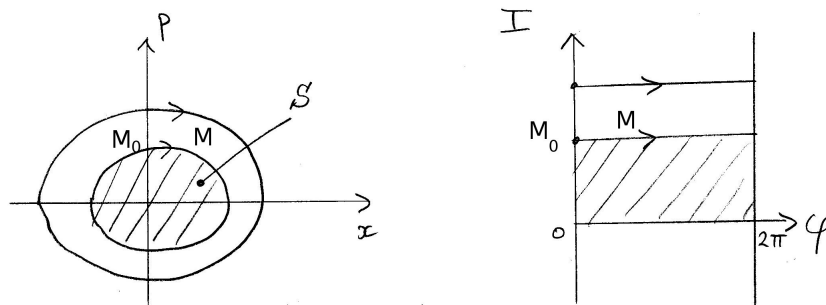
Pour ce point M on pose :

$$\begin{aligned}
 \varphi &:= 2\pi \left(\frac{t_M}{T(\gamma)} \right) \quad \text{variable angle} \in [0, 2\pi[\\
 I &:= \frac{S(\gamma)}{2\pi} \quad \text{variable action}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

On observe que (φ, I) caractérise le point M , on dit que (φ, I) forme un système de coordonnées. En effet I (comme S ou H) caractérise la trajectoire γ et φ (comme t_M) caractérise la position du point M sur la trajectoire.

Rappelons la relation (1.23) qui donne la fréquence d'une trajectoire :

$$\omega(\gamma) = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{dH}{dS} = \frac{dH}{dI}$$



Proposition 44. Pour un Hamiltonien $H(x, p)$ à un degré de liberté indépendant du temps, les variables **angle-action** (φ, I) forment un système de **coordonnées canoniques** dans une zone où les trajectoires sont fermées. Le Hamiltonien s'exprime en fonction de I seulement, $H(I)$. Par conséquent les équations de mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

dont la solution est (le flot)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \omega(I)t + \varphi(0) \\ I(t) &= I(0) \end{aligned} \quad (4.20)$$

on remarque que $I(t)$ est une quantité conservée (comme H) et que φ évolue à vitesse angulaire constante $\omega(I)$.

Démonstration. Il ne reste que à vérifier que (φ, I) sont des coordonnées canoniques, c'est à dire d'après (4.15) que $\{\varphi, I\} = 1$. Pour cela on va d'abord observer que (t_M, H) définis plus haut forment un système de coordonnées canonique :

$$\begin{aligned} \{t_M, H\} &= \frac{\partial t_M}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial t_M}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial t_M}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial t_M}{\partial p} \left(\frac{dp}{dt} \right) \\ &= \frac{dt_M}{dt} = 1 \end{aligned}$$

On déduit ensuite en utilisant (4.16)

$$\begin{aligned}\{\varphi, I\} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t_M} \frac{\partial I}{\partial H} - \frac{\partial \varphi}{\partial H} \frac{\partial I}{\partial t_M} \\ &= \omega(I) \frac{1}{\omega(I)} - 0 = 1\end{aligned}$$

□

4.4.1 Exemple de l'oscillateur harmonique

On reprends l'exemple simple (1.19) :

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2$$

On pose $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$. On fait le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{\frac{\omega}{K}}x = \frac{1}{(Km)^{1/4}}x \\ P &= \sqrt{\omega m}p = (Km)^{1/4}p\end{aligned}$$

alors $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial p} = 1$. Ce sont donc des variables canoniques. Avec ces variables l'expression de H est plus simple :

$$H(Q, P) = \omega \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \quad (4.21)$$

(dans les coordonnées Q, P les trajectoires sont les lignes de niveau de H , ce sont des cercles). On rappelle que d'après les équations de mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \omega P \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\omega Q\end{aligned}$$

que l'on résoud en posant $Z = Q + iP$ donnant

$$\frac{dZ}{dt} = \omega P + i(-\omega Q) = -i\omega Z$$

donc

$$Z(t) = Z(0) e^{-i\omega t}$$

ces cercles sont donc parcourus à la fréquence ω dans le sens indirect.

Considérons les coordonnées polaires (r, θ) (c'est à dire que $Q = r \cos \theta$ et $P = r \sin \theta$). On a d'une part

$$\theta(t) = \theta(0) - \omega t$$

et on déduit d'après (4.20) que $\varphi = -\theta$ est la variable angle. D'autre part la trajectoire de rayon r , a une surface $S = \pi r^2$ et une énergie $H = \frac{\omega}{2} r^2 = \frac{\omega}{2\pi} S = \omega I$ d'après (4.21) et (4.18). En résumé, pour l'oscillateur harmonique, les variables angles action sont

$$\varphi = -\theta, \quad I = \frac{1}{2} r^2$$

et le Hamiltonien est

$$H(I) = \omega I$$

Exercice 45. Trouver les variables angle-action pour le problème de Kepler (voir [4] Gutzwiller p.77, et article de Sivardiere)

Chapitre 5

Théorie des perturbations et théorie adiabatique

Référence : [2] p.144. et [1].

5.1 Méthode de la moyenne

Dans ce paragraphe on considère des équations de mouvement en variables (φ, I) avec un angle $\varphi \in [0, 2\pi[$, $I \in \mathbb{R}$ se présentant sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon) \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)\end{aligned}\tag{5.1}$$

où $\varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre et f, g sont des fonctions quelconques. Dans le cas $\varepsilon = 0$ on reconnaît les équations simples (4.19) de solution (4.20). On cherche à connaître la solution si $\varepsilon \neq 0$.

Remarquer que ce ne sont pas des équations de mouvement de type Hamiltonien si $\varepsilon \neq 0$. On considèrera le cas Hamiltonien qui est particulier au paragraphe suivant.

$\varphi(t)$ tourne toujours à une fréquence proche de ω . $I(t)$ n'est plus constant mais va varier lentement. L'idée est que $I(t)$ oscille peu autour d'une variable $J(t)$ qui **ressentirait une force moyennée** :

$$G(J) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(J, \varphi, 0) d\varphi\tag{5.2}$$

et suivrait un **mouvement moyenné** d'équation :

$$\frac{dJ}{dt} = \varepsilon G(J)\tag{5.3}$$

Remarquer l'intérêt : c'est un problème à une variable $J(t)$ seulement qui se résoud facilement.

Voici le résultat précis :

Théorème 46. “de la moyenne”. Si $\omega(I) \neq 0$ et si $J(0) = I(0)$ alors pour tout $t \in [0, T/\varepsilon[$ (où T est une constante) on a

$$|I(t) - J(t)| \leq C\varepsilon \quad (5.4)$$

où C est une constante.

Cela signifie que sur un intervalle de temps très long ($T/\varepsilon \gg 1$), $I(t)$ s'écarte très peu de la variable moyennée $J(t)$ (reste à une distance ε).

Démonstration. On cherche un changement de variable $(\varphi, I) \rightarrow (\varphi, P)$ proche de l'identité de la forme

$$P = I + \varepsilon h(I, \varphi)$$

où h est une fonction inconnue, qui simplifie les équation de mouvement. On a à l'ordre ε :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{dI}{dt} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial I} \frac{dI}{dt} \\ &= \varepsilon \left(g(I, \varphi, 0) + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \omega \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On souhaiterait simplifier voire annuler le terme en ε , donc (en supposant $\omega \neq 0$)

$$\begin{aligned} g(I, \varphi, 0) + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \omega &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{\omega} g(I, \varphi, 0) \end{aligned}$$

(cette équation s'appelle “l'équation homologique”). Posons :

$$\tilde{g}(I, \varphi, 0) = g(I, \varphi, 0) - G(I)$$

qui est la partie oscillante de g et qui vérifie donc $\int_0^{2\pi} \tilde{g} d\varphi = 0$. Posons

$$h(\varphi, I) = -\frac{1}{\omega} \int_0^\varphi \tilde{g}(I, \psi, 0) d\psi$$

qui est bien défini car $h(\varphi + 2\pi, I) = h(\varphi, I) - \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \tilde{g} d\psi = h(\varphi, I)$. On obtient $\left(g(I, \varphi, 0) + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \omega \right) = \tilde{g} + G - \tilde{g} = G$ donc

$$\frac{dP}{dt} = \varepsilon G(P) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Soit

$$\delta(t) = J(t) - P(t)$$

qui est la différence entre le mouvement moyenné $J(t)$ et le vrai mouvement $P(t)$. On a

$$\frac{d\delta}{dt} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

donc si $t \in [0, T/\varepsilon[$ alors $|\delta(t)| \leq \int_0^t \left| \frac{d\delta}{dt} \right| dt \leq \mathcal{O}(\varepsilon)$. Donc $|J(t) - P(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Or $|P(t) - I(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ donc

$$|I(t) - J(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

□

5.1.1 Exemple simple

Considérons

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \neq 0 \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon(a + b \cos \varphi) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \ll 1$. La solution exacte est (si $\varphi(0) = 0$) :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \omega t \\ I(t) &= \varepsilon at + \varepsilon b \int_0^t \cos(\omega t') dt' + I(0) \\ &= \varepsilon at + \varepsilon b \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + I(0) \end{aligned}$$

Le premier terme augmente lentement mais linéairement. Il atteint la valeur finie a au temps $t = 1/\varepsilon$. Le deuxième terme oscille avec une petite amplitude de l'ordre de ε .

L'équation moyennée est d'après (5.3) :

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \cos \varphi) d\varphi = a$$

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \varepsilon G = \varepsilon a$$

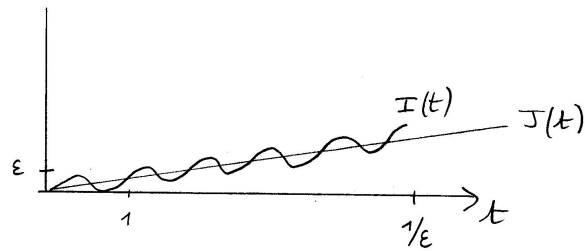
de solution :

$$J(t) = \varepsilon at + J(0)$$

Donc dans cet exemple on vérifie que (si $I(0) = J(0)$)

$$|I(t) - J(t)| = \varepsilon b \frac{1}{\omega} |\sin(\omega t)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

reste petit, de l'ordre de ε pour tous les temps.



5.1.2 Exemple où la méthode de la moyenne ne marche pas

[2, p.151] (il y a deux fréquences dans cet exemple et le phénomène important “d’ac-crochage des angles” ou “résonance”).

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= I_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= I_2 \\ \dot{I}_1 &= \varepsilon \\ \dot{I}_2 &= \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\end{aligned}$$

On considère l’état initial

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad I_1(0) = 1, \quad I_2(0) = 1$$

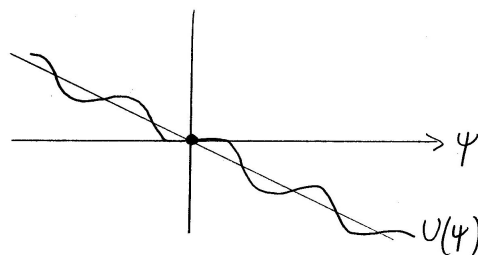
Dans cet exemple on peut trouver la solution exacte. Posons $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$. Alors

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \varepsilon(1 - \cos(\psi)) = -\frac{dU}{d\psi}$$

que l’on interprète comme une équation de mouvement de Newton, d’une particule dans un potentiel

$$U(\psi) = -\varepsilon\psi + \varepsilon \sin \psi$$

(voir dessin).



Or $\psi(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = I_1(0) - I_2(0) = 0$, donc la particule est sur un point fixe et y reste $\psi(t) = 0, \forall t$. Donc

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$$

(“accrochage des angles”) et $\dot{I}_2(t) = \varepsilon$ donc

$$I_2(t) = \varepsilon t + I_2(0) = 1 + \varepsilon t$$

Par ailleurs la solution moyennée est :

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \quad \dot{J}_2 = 0$$

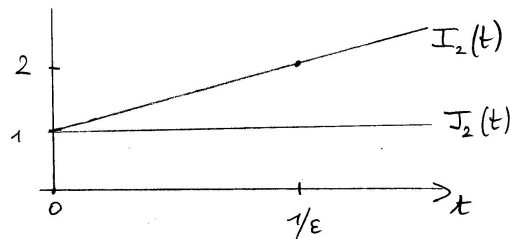
donc

$$J_1(t) = \varepsilon t + J_1(0) = I_1(t)$$

mais

$$J_2(t) = J_2(0) \neq I_2(t)$$

Le théorème de la moyenne ne fonctionne donc pas (montrant que la situation avec plusieurs angles est délicate).



5.2 Méthode de la moyenne pour un système Hamiltonien

5.2.1 Problème de perturbation Hamiltonien

(voir [2, p.162] ou [1]).

Considérons un Hamiltonien exprimé avec des variables canoniques (φ, I) , $\varphi \in [0, 2\pi[$ est un angle et $I \in \mathbb{R}$.

$$H(\varphi, I) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\varphi, I, \varepsilon) \tag{5.5}$$

où H_0 ne dépend que de I et $\varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre.

Les équations de mouvement sont donc

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \underbrace{\frac{dH_0}{dI}}_{\omega(I)} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \\ \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\varepsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Remarquer que si $\varepsilon = 0$, on obtient les équations (4.19) du problème angle-action, dont la solution est simple (4.20), et que ces équations pour $\varepsilon \neq 0$ sont un cas particulier du problème de perturbation (5.1). On a le résultat suivant :

Théorème 47. “adiabatique pour un Hamiltonien (5.5) avec perturbation”. *Si $\omega(I) \neq 0$ alors dans un intervalle de temps très long $t \in [0, T/\varepsilon]$ (où T est une constante)*

$$|I(t) - I(0)| \leq C\varepsilon$$

où C est une constante. C’est à dire que $I(t)$ est une “quantité presque conservée”. On dit que $I(t)$ est un “invariant adiabatique”.

Démonstration. On comparant (5.6) avec (5.1) on a

$$g(\varphi, I, \varepsilon) = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}$$

la moyenne (5.2) est donc

$$G(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \right) d\varphi = 0$$

Donc l’équation moyennée (5.3) donne $\dot{J} = 0$ donc $J(t) = J(0) = I(0)$ et le théorème de la moyenne (5.4) donne $|I(t) - I(0)| \leq C\varepsilon$. \square

Il faut retenir que pour un système Hamiltonien, ce qui est particulier est que la force moyennée $G(J)$ (5.2) est nulle.

5.2.2 Problème adiabatique : Hamiltonien variant lentement avec le temps

On va considérer un problème encore plus particulier mais important en pratique.

Supposons un Hamiltonien à un degré de liberté **qui dépend lentement du temps** :

$$H_0(x, p, \varepsilon t)$$

avec $\varepsilon \ll 1$ un petit paramètre. (Par exemple si $f(x) = \cos(x)$ alors $f(\varepsilon t) = \cos(\varepsilon t)$ varie lentement, sur une échelle de temps typique $\sim 1/\varepsilon$).

Rappel : rappelons d’après le théorème 44 page 80, que dans le cas $\varepsilon = 0$ (H est alors indépendant du temps), il existe des variables canoniques angle-action (φ, I) obtenues à partir de (x, p) par une transformation canonique. Pour ces variables le Hamiltonien est $H_0(I)$ et les équations de mouvements sont très simples.

Ici, comme H_0 dépend du temps, la transformation canonique

$$T_t : (x, p) \rightarrow (\varphi, I) \tag{5.7}$$

donnant les variables angle-action ci-dessus **dépend du temps**. La fonction $H_0(I, \varepsilon t)$ obtenue dépend du temps.

Remarque importante : les équations de mouvement en variable (x, p) sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_0}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Par contre, comme la transformation canonique $T_t : (x, p) \rightarrow (\varphi, I)$ dépend du temps, il est faux d'écrire les équations de mouvement en coordonnées (φ, I) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H_0}{\partial I} && : \text{FAUX} \\ \dot{I} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \varphi} = 0 && : \text{FAUX} \end{aligned}$$

(Pour cela il faudrait que la transformation canonique T_t soit indépendante du temps, ce qui est le cas ici si $\varepsilon = 0$).

Le théorème suivant nous informe sur les vraies équations du mouvement :

Théorème 48. *Il existe un Hamiltonien*

$$H(\varphi, I, \varepsilon t) = H_0(I, \varepsilon t) + \varepsilon H_1(\varphi, I, \varepsilon t)$$

(où la "perturbation" H_1 s'exprime à partir de H_0 et T_t), tel que les équation de mouvement (5.8) s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \\ \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Conséquence : d'après le théorème adiabatique 47, la variable action $I(t)$ est un invariant adiabatique.

Remarquer que au contraire l'énergie instantanée $\mathcal{E}(t) = H(x(t), p(t), \varepsilon t)$ n'est pas conservée mais n'est pas un invariant adiabatique non plus. Voir exemples ci-dessous.

Remarque : d'après le théorème KAM ΔJ est borné uniformément en temps. (?)

Démonstration. On utilise directement le théorème général 49 page 91. On obtient $H(\varphi, I, \varepsilon t) = H_0(I, \varepsilon t) + R(\varphi, I, \varepsilon t)$. Comme H_0 varie lentement avec t alors T_t varie lentement avec t et donc d'après son expression qui fait intervenir $\frac{\partial T_t}{\partial t}$ R est de l'ordre de ε . On note donc $R(\varphi, I, \varepsilon t) = \varepsilon H_1(\varphi, I, \varepsilon t)$ (à dire mieux ..@@). \square

Exemples

- Le pendule : voir TD
- Exemple d'une bille dans un guide de largeur étroite mais variable. Déduire les équations avec contrainte.
- Planète autour du Soleil perturbée par les autres planètes. Les variables actions sont des invariants adiabatiques. Il n'y a pas de "variation séculaire" (résoud une grande énigme historique).
- Dérive d'une particule chargée dans un champ magnétique variable.

5.2.3 Transformations canoniques dépendant du temps

Dans ce paragraphe, on considère un problème particulier mais très utile. On pose le problème, on le résoud avec une certaine généralité et on verra ensuite des applications.

Considérons un Hamiltonien $H(X, P, t)$ qui dépend du temps t , où $X \in \mathbb{R}^n, P \in \mathbb{R}^n$ sont des variables canoniques. Pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}$, on suppose que

$$T_t : (X, P) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{P})$$

est une transformation canonique qui dépend de t de façon C^∞ .

Dans le cas où la transformation T ne dépend pas de t on a vu dans la proposition 42 page 77 que les équations de mouvement peuvent s'écrire de la même façon avec les nouvelles variables et le même Hamiltonien $H(\tilde{X}, \tilde{P}, t) := H(T(X, P), t)$ exprimé dans les nouvelles variables. Dans le cas considéré ici où la transformation canonique T_t dépend du temps, ce résultat n'est plus vrai. La proposition suivante montre que pour obtenir la description du même mouvement avec les nouvelles variables, c'est à dire $(\tilde{X}(t), \tilde{P}(t)) = T_t(X(t), P(t))$ il faut modifier le Hamiltonien :

Théorème 49. Avec les nouvelles variables, les équations de mouvement s'écrivent de la façon habituelle :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}} \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{X}} \end{cases}$$

avec le Hamiltonien modifié :

$$\tilde{H}(\tilde{X}, \tilde{P}, t) := H(\tilde{X}, \tilde{P}, t) + R(\tilde{X}, \tilde{P}, t)$$

où la fonction $R(\tilde{X}, \tilde{P}, t)$ est déterminée par sa différentielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \tilde{X}} &= \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial R}{\partial \tilde{P}} &= \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial P} \right) \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial P} \right) \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

(Ici $\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial X}\right)$, $\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}\right)$ etc désignent les dérivées partielles de la transformation canonique $(\tilde{X}, \tilde{P}) = T_t(X, P)$).

Remarques

- Remarquer que si la transformation canonique ne dépend pas de t alors $R = 0$, comme attendu.
- Il devrait y avoir une formulation plus géométrique pour exprimer R à trouver ... @@
- Ecrire ces formules dans des cas particulier. Ex : changement de référentiel.

Démonstration. On a une transformation canonique dépendant du temps, il nous faudrait retrouver le formalisme des transformation canonique indépendant du temps. Pour cela on utilise une "astuce standard" : passer dans un **espace de phase étendu** qui contient le temps comme une variable canonique. On introduit les couples de variables canoniques $((t, \tau), (x, p)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et le **Hamiltonien étendu**

$$\mathbf{H}(t, \tau, x, p) := \tau + H(x, p, t)$$

Montrons tout d'abord que ce Hamiltonien \mathbf{H} donne bien les équations de mouvement de Hamilton attendues :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.9)$$

Les équations de mouvement avec \mathbf{H} s'écrivent (ici $s \in \mathbb{R}$ est le paramètre "temps étendu") :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \tau} = 1 \\ \frac{d\tau}{ds} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

La première équation implique que $t = s$ (à une constante près). Les deux dernières équations donnent alors les équations de Hamilton (5.9) attendues. La deuxième équation montre que l'énergie $H(t)$ qui varie au cours du temps est donnée par $H(t) = -\tau(t)$ (à une constante près).

Dans cet espace de phase étendu, on cherche à montrer que la famille de transformations canoniques $T_t : (x, p) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{p})$ dépendant de t , définit une transformation canonique qui est de la forme :

$$\mathbf{T} : ((t, \tau), (x, p)) \rightarrow ((\tilde{t}, \tilde{\tau}), (\tilde{x}, \tilde{p}))$$

avec

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\tau} = \tau - R(x, p, t), \quad (\tilde{x}, \tilde{p}) = T_t(x, p).$$

Avec $R(x, p, t)$ une fonction à trouver. La condition pour que \mathbf{T} soit une transformation canonique s'exprime en calculant tous les crochets de Poisson possibles :

$$\{\tilde{t}, \tilde{\tau}\} = \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau}\right) - \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t}\right)}_0 = 1, \quad \{\tilde{t}, \tilde{x}\} = \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tau}\right)}_0 - \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t}\right)}_0 = 0$$

$$\{\tilde{t}, \tilde{p}\} = 0,$$

$$\{\tilde{\tau}, \tilde{x}\} = \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tau}\right)}_0 - \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}\right)}_1 + \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right)$$

$$\{\tilde{\tau}, \tilde{p}\} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right)$$

$$\{\tilde{x}, \tilde{p}\} = \{x, p\} = 1$$

Les conditions à satisfaire sont donc $\{\tilde{\tau}, \tilde{x}\} = 0$ et $\{\tilde{\tau}, \tilde{p}\} = 0$ qui donnent

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \end{aligned}$$

Qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) \\ -\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \end{pmatrix}$$

On déduit grâce à (A.4) et du fait que la matrice est de déterminant $-\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) = \{\tilde{x}, \tilde{p}\} = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) \\ -\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right) & -\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right) & -\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \end{pmatrix}$$

On obtient les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial p}$. Ce sont la différentielle d'une fonction R si $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) = 0$. On vérifie donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) &= \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial p \partial x}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial p \partial t}\right) \dots \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\{\tilde{x}, \tilde{p}\} = 0 \end{aligned}$$

La fonction $R(x, p, t)$ existe donc et est donnée par une intégrale à t fixé qui ne dépend pas du chemin

$$R(x, p, t) = \int_0^{(x,p)} \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right) dp$$

On a donc montré que \mathbf{T} est une transformation canonique dans l'espace de phase élargi. D'après la proposition 42 page 77, les équations de mouvement s'écrivent de la même façon avec les nouvelles variables et le même Hamiltonien que l'on exprime avec les nouvelles variables

$$\mathbf{H} = \tau + H = \tilde{\tau} + \underbrace{R + H}_{\tilde{H}}$$

On déduit que le Hamiltonien $\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, t)$ est

$$\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, t) = H(\tilde{x}, \tilde{p}, t) + R(\tilde{x}, \tilde{p}, t)$$

□

Chapitre 6

Symétries et réductions

@@

Annexe A

Quelques formules

A.1 Analyse et intégrales

A.1.1 Intégrales Gaussiennes

Formule 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-X^2) dX = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.1})$$

preuve : @@

Formule 2 Soit

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$A, B, C \in \mathbb{C}$ et $\Re(A) > 0$ pour la convergence.

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Q(x)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-C + \frac{B^2}{4A}\right) \quad (\text{A.2})$$

Preuve : @@

Formule 3 @@

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^n e^{-X^2} dX = .. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Algèbre

A.2.1 Diagonalisation d'une matrice 2×2

Formule générale : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si $\Delta \neq 0$ alors la matrice A se diagonalise¹ :

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} a - d + \sqrt{\Delta} & a - d - \sqrt{\Delta} \\ 2c & 2c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix},$$

avec

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc$$

Remarque : la matrice P contient les vecteurs propres en colonne, et ils sont définis à la multiplication près par un nombre.

Cas particulier : Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} |b| & -|b| \\ \bar{b} & \bar{b} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} |b| & 0 \\ 0 & -|b| \end{pmatrix}$$

A.2.2 Inverse d'une matrice 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\text{Det}(A) = ad - bc \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.2.3 Relations sur les matrices

Pour une matrice A (ou un opérateur à Trace) on a :

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$$

A.3 Calcul différentiel dans \mathbb{R}^3

références : Jackson [5], début et fin.

$f(\vec{x})$ représente une fonction. $\vec{V}(\vec{x})$ représente un champ de vecteurs.

1. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans **xcas**, écrire : `A:=[[a,b],[c,d]]`; `D:=egv1(A)`; `P:=egv(A)`; On vérifiera que `simplify(P*D*inv(P))`; redonne bien la matrice **A**.

A.3.1 Rappels sur le calcul différentiel vectoriel.

Voir Feynmann "Electromagnétisme", chap 2.

si $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ sont les coordonnées du champ vectoriel $\vec{E}(\vec{x})$, alors le champ $\vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ W_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ W_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned}$$

on s'en rappelle en écrivant : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ avec "l'opérateur vectoriel" $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Et $\text{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$, qui se retient en écrivant $\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

Pour un champ scalaire $V(x, y, z)$, le champ vectoriel $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}V$ a pour coordonnées : $W_x = \frac{\partial V}{\partial x}, W_y = \frac{\partial V}{\partial y}, W_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. On écrit aussi : $\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V$.

Le **Laplacien** ΔV est le champ scalaire : $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Propriétés importantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \vec{0} \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= 0 \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \Delta V \\ \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a} \end{aligned}$$

Formules de Stokes Si γ est un chemin dont a, b sont les extrémités, alors

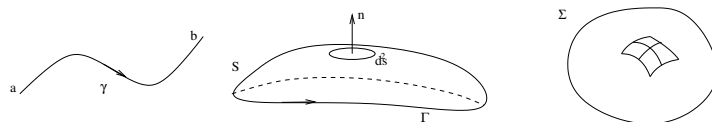
$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

Si S est une surface dont γ est le contour, alors

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot \vec{n} d^2s = \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

Si V est un volume dont le bord est la surface $S = \partial V$, alors

$$\int_V \text{div}(\vec{V}) d^3v = \int_{\Sigma=\partial V} \vec{V} \cdot \vec{n} d^2s$$



A.3.2 En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = (\partial_r f) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta f\right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi f\right) \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.5})$$

A.3.3 Relations

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} (\text{div } \vec{b}) - \vec{b} (\text{div } \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\text{div}} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{b}) \quad (\text{A.6})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (f \cdot \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{V} + f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{div} (f \vec{a}) = \text{grad} (f) \cdot \vec{a} + f \cdot \text{div}(\vec{a}) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{div}(\vec{e}_r) = \frac{2}{r}$$

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{e}_r = \frac{1}{r} (\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r) \equiv \frac{\vec{a}_\perp}{r}$$

Bibliographie

- [1] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.
- [2] V.I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer Verlag, 1988.
- [3] F. Faure. Films d'animations d'ondes quantiques. [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/animations](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/animations).
- [4] M. Gutzwiller. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
- [6] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [7] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [8] S. Tabachnikov. *Billards*. Soc. Math. de France, 1995.
- [9] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.
- [10] M. Dillard-Bleick Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette. *Analysis, manifolds and physics*. North-Holland, 1982.