

Notes de Cours sur les
Interactions entre les rayonnements et la matière
Université Joseph Fourier, Grenoble
Maitrise Science Physique 2002-2003.

Frédéric Faure
www.lpm2c.polycnrs-gre.fr/faure

17 novembre 2002

Table des matières

1 Mécanismes microscopiques	4
1.1 Equations de Maxwell et lois de Newton	4
1.1.1 Equations de mouvement d'une particule	4
1.1.2 Equation de Maxwell du champ électromagnétique	6
1.1.3 Potentiels, Jauge de Coulomb (*)	8
1.1.4 Lois de conservation, énergie et impulsion du champ	10
1.1.5 Rayonnement dans le vide : ondes planes progressives	13
1.2 Action du rayonnement sur un atome	18
1.2.1 Modèle classique de la polarisabilité	18
1.2.2 Etude de la polarisabilité	21
1.2.3 Ordres de grandeur de α pour l'atome H	23
1.2.4 Causalité, et relations de Kramer-Krönig (*)	25
1.3 Rayonnement d'un atome oscillant	25
1.3.1 L'approximation dipolaire électrique (TD).	26
1.3.2 Expression de \vec{A} à l'aide du moment dipolaire	27
1.3.3 Champs électriques et magnétiques	28
1.3.4 Flux d'énergie, et Puissance rayonnée	29
1.3.5 Ordres de grandeur pour l'atome d'hydrogène	30
1.4 Diffusion du rayonnement par un atome	31
1.4.1 Section efficace de diffusion	32
1.4.2 Etude de la section efficace de diffusion	33
2 Phénomènes collectifs	36
2.1 Diffusion par une assemblée d'atomes	36
2.1.1 Facteur de structure	36
2.1.2 Cas de la diffusion sur un cristal parfait (TD)	38
2.1.3 Diffusion sur un cristal imparfait : diff Brillouin	39
2.2 Cas d'un milieu dilué : diffusion de la lumière dans un gaz	39
2.2.1 Longueur d'atténuation (TD)	39
2.3 Cas d'un milieu dense ; équations de Maxwell macroscopiques	42
2.3.1 Moyennisation des fluctuations microscopiques du champ	42
2.3.2 Schéma du problème ; décomposition des champs	43

2.3.3	Propriétés macroscopiques à partir des propriétés microscopiques : relation de Clausius-Mossotti	46
2.3.4	Champ de dépolarisation, charges et courants de polarisation	48
2.3.5	Equations de Maxwell macroscopiques	52
2.3.6	Champ à la frontière de deux diélectriques (*)	53
2.4	Propagation des ondes dans la matière	53
2.4.1	Equation de Helmholtz	54
2.4.2	Atténuation de l'onde	55
2.4.3	Indice de réfraction	56
2.4.4	Ondes dans un métal	57
A	Formulaire	62

Introduction

Dans une description partielle de la nature qui nous environne, on considère qu'il y a deux types "d'éléments" qui cohabitent et interagissent en permanence : **la matière** qui est constituée par un assemblage d'atomes. Chaque atome est constitué d'un noyau nucléaire et d'électrons qui gravitent autour, et **le rayonnement**, que l'on décrit par un champ électromagnétique (un champ électrique et un champ magnétique magnétique). On utilisera donc le terme rayonnement pour décrire d'une part les ondes électromagnétique qui se propagent à la vitesse $c = 300.000 \text{ km/s}$ (dans le vide), que sont les ondes radio, la lumière infra-rouge visible et ultraviolette, les rayons X, mais aussi (et de façon abusive) les champs électriques et magnétiques statiques comme le champ électrique autour d'une charge électrique, ou le champ magnétique terrestre.

Il faut savoir que cette description est incomplète et même se révèle incohérente parfois : une vraie description de la matière nécessite la mécanique quantique où les atomes sont décrits aussi par des ondes : des ondes quantiques de matière. Par ailleurs, le champ électromagnétique lui aussi doit être décrit par la mécanique quantique. Mais la description non quantique (dite "classique") que nous adoptons est plus simple et suffit pour décrire les phénomènes qui nous intéressent dans ce cours.

La matière et le rayonnement interagissent en permanence. Les **équations de Newtons** décrivent le comportement de la matière : elle décrivent comment une particule chargée se déplace à cause de l'action des champ électriques et magnétiques qui l'environnent. **Les équations de Maxwell** décrivent le comportement du rayonnement : comment une particule chargée modifie autour d'elle le champ électromagnétique. Ce sont les équations fondamentales que l'on rappelle dans la section 1.1.

Dans le chapitre 1, à partir de ces équations fondamentales, on décrit comment un atome qui recoit une onde électromagnétique incidente, se met en mouvement, et émet à son tour une onde électromagnétique. On parle de diffusion de l'onde.

Dans le chapitre 2, on décrit le même phénomène pour une assemblée d'atome, que peut être un gaz ou un matériau. Cela permet de comprendre comment la lumière, les ondes radios ou les rayons X se comportent sur un matériau ou un gaz : s'ils sont réfléchis, ou pénètrent dans eux, avec de la diffraction ou de l'absorption. On en déduit des propriétés de base de l'optique.

(tableau de Laval[?] pIII.)

	Radio AM	Radio FM-TV	Micro-ondes	Infra rouge
Frequence ν (Hz)	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}
Longueur d'onde λ	300 m		3cm	
Transitions	Spin nucléaire	Spin électronique	Rotation	Vibration
Sources	Semi-conducteurs	Tubes électroniques	Masers	Lasers
	Visible	U.V.	X	Gamma
ν (Hz)	10^{15}	10^{16}	10^{18}	$> 10^{19}$
λ	$0.5\mu\text{m}$		3AA	
Transitions	Electroniques	idem		nucléaires
Sources	lasers	Rayonn synchrotron	idem	

Chapitre 1

Mécanismes microscopiques

1.1 Equations de Maxwell et lois de Newton

=====
TD :

obtenir les equations globales à partir de Maxwell.par intégrations.
Eq de conservation locale d'énergie. Ex Feynmann 27-5.

=====
références : Laval [?] chap1

Feynmann : mécanique, chap 9. (8...14), électromagnétisme, chap 1,
Jackson chap 6

Dans tout le cours, on utilise les unités MKSA (voir Jackson p811).

1.1.1 Equations de mouvement d'une particule

La matière est constituée d'un grand nombre de particules. Considérons une particule de masse m , et de charge q . (Par exemple l'électron a $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg = 0,5 MeV/c^2$ et $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$.)

Appelons $\vec{x}(t) = (x, y, z)$ **la position** de la particule à l'instant t . Et $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$ **sa vitesse**, et $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ son **accélération**.

On note $\vec{E}(\vec{x}, t)$ la valeur du champ électrique à l'emplacement de la particule. Alors ce champ exerce **une force électrique** sur la particule donnée par

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

De même, notons $\vec{B}(\vec{x}, t)$ la valeur du champ magnétique à l'emplacement de la particule. Alors ce champ exerce **une force magnétique** (dite force de Lorentz) sur la particule donnée par

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La particule subit d'autres forces comme la force de gravitation \vec{F}_G . On va supposer que l'effet de cette dernière force est négligeable devant les forces électriques et magnétiques, ce qui est généralement vrai pour les particules chargées.

La loi de Newton dit que le mouvement de la particule est déterminé par les forces qui agissent sur elle, d'après **l'équation de Newton** :

$$m\vec{a} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$$

1.1.1.1 Solutions particulières

- Si \vec{E} est constant et $\vec{B} = \vec{0}$, le mouvement de la particule est accéléré uniformément.
- Si $\vec{E} = \vec{0}$ et \vec{B} est constant, la trajectoire de la particule est une hélice.

1.1.1.2 Remarques

- Dans un traitement plus correct, pour des particules microscopiques, il faut décrire la particule par une onde quantique, et l'équation de Newton est remplacée par l'équation de Schrödinger établie dans les années 1920.
- L'équation de Newton a été établie en 1675, pour décrire les mouvement d'objets macroscopiques soumis à la force de gravitation (chute des corps, mouvement des planètes). Les notions de forces électriques et magnétiques datent du 19ème siècle.

1.1.1.3 Densité volumique de charges et de courant

Considérons une assemblée de particules identiques, de densité volumique N . Chaque particule a une charge q , et se déplace à la vitesse \vec{v} .

On définit la **densité volumique de charge** ρ (en C/m^3), et la densité volumique de courant des charges \vec{j} par :

$$\rho = Nq \tag{1.1}$$

$$\vec{j} = Nq\vec{v} \tag{1.2}$$

Si la densité $N(\vec{x}, t)$ et la vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$ dépendent de l'emplacement \vec{x} et du temps t , alors il en est de même pour $\rho(\vec{x}, t)$ et $\vec{j}(\vec{x}, t)$.

Voici comment les densités ρ, \vec{j} permettent d'obtenir des charges et des courants :

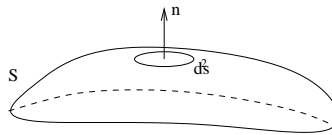
La charge contenue dans un volume V est

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}) d^3\vec{x}$$

et le courant à travers une surface S est

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s$$

où \vec{n} est un vecteur normal à la surface et d^2s un élément de surface.



1.1.2 Equation de Maxwell du champ électromagnétique

cf Jackson section 6.4.

Feynmann chap 18.

Au cours du 19ème siècle, les physiciens et ingénieurs ont découvert l'existence des forces électriques et magnétiques, et le fait que la lumière est constituée d'un champ électrique et magnétique qui oscille et se propage. Ces concepts ont été unifiés par Maxwell en 1885.

Le champ électromagnétique est un objet assez complexe, puisqu'il est décrit par la donnée d'un vecteur électrique $\vec{E}(\vec{x}, t)$ et d'un vecteur magnétique $\vec{B}(\vec{x}, t)$ en tout point de l'espace \vec{x} , et à chaque instant t . On parle de **champ vectoriel**.

Ces deux champs ne sont pas indépendants et pas quelconques, puisqu'ils satisfont **les premières équations de Maxwell** :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{rot} \vec{E} \quad (1.3)$$

$$div \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

Ils sont aussi déterminés par la présence et le mouvement de particules chargées, d'après les deuxièmes équations de Maxwell :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \overrightarrow{rot} \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} \quad (1.5)$$

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

où $\rho(\vec{x}, t)$ est la densité volumique de charge (en C/m^3), et $\vec{j}(\vec{x}, t)$ est la densité volumique de courant des charges. Voir eq.(1.1).

Et :

$$c = 2.99 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \text{ vitesse de la lumire}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} c^2} \text{ permittivite du vide}$$

On a

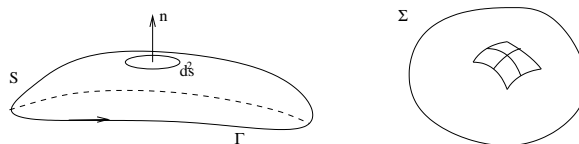
$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ (V.m/C)}$$

(Remarque sur l'origine et sens des valeurs : cf Feynmann chap 4-2. EM1, Jackson p811.)

1.1.2.1 Remarques (*) :

– A partir des équations de maxwell locales, on déduit des lois globales : loi de Gauss, de Faraday et d'Ampère) (voir TD) qui ont des interprétations physiques précises. Considérons S une surface de bord Γ et Σ est une surface fermée. Alors :

1. Circulation de \vec{E} sur $\Gamma = -\frac{\partial}{\partial t}$ (flux de \vec{B} par S) : **Loi de Faraday**
2. Flux de \vec{B} par Σ est nul.
3. c^2 (circulation de \vec{B} sur Γ) = $\frac{\partial}{\partial t}$ (Flux de \vec{E} par S) + $\frac{1}{\epsilon_0}$ (Flux de \vec{j} par S) : **Loi d'Ampère.**
4. Flux de \vec{E} par $\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0}$ (Charge totale dans Σ) : **Loi de Gauss.**



1.1.2.2 Equation de conservation de la charge

ref : Cohen Tad. “photons atomes”, Feynmann Chap 27-1.
Des équations de Maxwell on déduit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0} \quad (1.7)$$

appelée **équation de conservation des charges** car cette équation exprime **la conservation de la charge totale** :

$$Q(t) = \int_{\text{Volume}} d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t) : \text{Charge totale contenue dans le volume}$$

on a :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3\vec{x} \partial_t \rho = - \int_V d^3\vec{x} \text{div}(\vec{j}) = - \int_{\text{Surface}} \vec{j} d\vec{s}$$

cad la variation de charge dans le volume est seulement due au flux de courant \vec{j} à travers la surface (échange de charge avec l’extérieur). Il n’y a pas création ou disparition de charge dans le volume.

1.1.2.3 Densités j et ρ pour des charges ponctuelles (*)

ref : Laval p61 [?].

si $\vec{X}(t)$ et $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{X}}{dt}$ sont la position et la vitesse d’une particule ponctuelle de charge q , alors

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= q \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= q \vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)) \end{aligned}$$

1.1.2.4 Solution particulières des équations de Maxwell

- Si charge statique q en $\vec{x} = \vec{0}$, on a la solution de Coulomb $\vec{B} = \vec{0}$, et $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x}|^2}$, obtenu par la loi de Gauss.
- Si un fil neutre est parcouru par un courant I , alors avec la loi d’Ampère, on déduit, $\vec{E} = \vec{0}$ et \vec{B} est orthoradial, et $B(r) = \frac{I}{\epsilon_0 c^2 2\pi r}$.
- Autres exemples : dipôles électrique,... voir Feynmann EM, chap 6,7, chap 14.

1.1.3 Potentiels, Jauge de Coulomb (*)

ref : Feynmann chap 18-6, Cohen T. “photons et atomes tome 1” ,

D’après l’équation (1.4), il existe un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{x}, t)$ (à priori pas unique) appelé **potentiel vectoriel**, tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (1.8)$$

alors l'équation (1.3) s'écrit $\overrightarrow{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} \right) = \vec{0}$, et on déduit aussi qu'il existe un champ scalaire $V(\vec{x}, t)$ (à priori pas unique), appelé **potentiel scalaire** tel que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \quad (1.9)$$

Remarquons que les champs \vec{A} et V déterminent les champs \vec{E} et \vec{B} , mais que inversement ils ne sont pas uniquement déterminés. En effet si $u(\vec{x}, t)$ est un champ scalaire quelconque, et si l'on pose

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \overrightarrow{grad} u \\ V' &= V - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

alors on vérifie que les champs modifiés \vec{A}' et V' satisfont aussi les équations (??) et (??). On dit que l'on a modifié les potentiels par une **transformation de Jauge**, et que les champs \vec{E} et \vec{B} sont **invariants de Jauge**.

(cela généralise la propriété en électrostatique que le potentiel électrique V est déterminé à une constante près).

1.1.3.1 Jauge de Coulomb

Jackson p221, Cohen T. p12, Laval p18 [?].

Puisqu'il y a un arbitraire dans le choix des potentiels, certains choix sont préférés, comme celui de Coulomb car il simplifie l'écriture des équations de Maxwell : Le choix de Coulomb, ou **Jauge de Coulomb**, consiste à choisir $u(\vec{x}, t)$ tel que

$$div(\vec{A}) = 0$$

(cela est possible en choisissant u tel que $\Delta u = div \vec{A}'$). Alors, l'eq(1.6) donne :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ équation de Poisson}$$

1.1.3.2 Jauge de Lorentz

Jackson p221, Cohen T p11, Laval p17 [?].

On choisit $u(\vec{x}, t)$ tel que

$$\text{div}(\vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

(cela est possible en choisissant u , cf Jack p221). Alors l'éq. (1.5,1.6) deviennent (utiliser $\overrightarrow{\text{rotrot}}(\vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}$)

$$\square V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.11)$$

$$\square \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} \quad (1.12)$$

avec l'opérateur **Dalembertien**

$$\square(f)(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f$$

1.1.4 Lois de conservation, énergie et impulsion du champ

Jackson p236, Cohen p10,p63, Feynmann chap 27.

Suposons que l'espace contienne un champs électromagnétique \vec{E}, \vec{B} ainsi que des charges pontuelles indicée par $\alpha = 1, 2, \dots$, de masse m_α , position \vec{x}_α , et vitesse \vec{v}_α . Considérons alors les termes :

$$H_{tot}(t) = \sum_{\alpha} H_{\alpha} + \int d^3\vec{x} u(\vec{x}) \quad : \text{ énergie totale}$$

$$u(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2(\vec{x}, t) + c^2 B^2(\vec{x}, t)) \quad \text{densité d'énergie du champ}$$

$$H_{\alpha} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{\alpha}|^2 \quad \text{énergie cinétique d'une particule}$$

$$\vec{P}_{tot}(t) = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} + \frac{1}{c^2} \int d^3\vec{x} \vec{S}(\vec{x}) \quad : \quad \text{impulsion totale} \quad (1.13)$$

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = c^2 \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) \quad \text{vecteur de Poynting} \quad (1.14)$$

$$\vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad \text{impulsion d'une particule} \quad (1.15)$$

$$\vec{J}_{tot}(t) = \sum_{\alpha} \vec{x}_{\alpha} \wedge \vec{p}_{\alpha} + \frac{1}{c^2} \int d^3\vec{x} \vec{x} \wedge \vec{S}(\vec{x}, t) \quad \text{moment cinétique total}$$

1.1.4.1 Propriété de conservation :

$H_{tot}, \vec{P}_{tot}, \vec{J}_{tot}$ sont constants au cours du temps.

Interprétation : il peut y avoir transfert de l'énergie cinétique des particules vers l'énergie du champs, mais la somme est constante. Par exemple lorsqu'une lampe brille, il y a un transfert du champ électrique-magnétique dans le fil vers l'énergie cinétique des électrons dans le fil, puis vers l'énergie du champ lumineux rayonné par le fil.

1.1.4.2 Loi de conservation locale et preuve des lois de conservation(TD)

(Jack p237, Laval p14 [?], feynmann chap 27-2, 27-3)

La loi de conservation locale de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0$$

et s'interprète en disant que la variation locale de densité d'énergie est due d'une part à la perte par **le flux d'énergie** donné par le vecteur

$$\vec{f}_{\text{energie}} = \vec{S} \quad (1.16)$$

et aussi par la conversion d'énergie du champ en énergie des particules; En effet la puissance développée par la force électro-magn. par unité de volume est

$$N \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = N \vec{F} \cdot \vec{v} = N q \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

preuve (TD) :

$$\dot{u} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \dot{\vec{E}} + c^2 \vec{B} \dot{\vec{B}} \right) = \varepsilon_0 \left(c^2 \vec{E} \operatorname{rot}(\vec{B}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{E} \vec{j} - c^2 \vec{B} \operatorname{rot}(\vec{E}) \right) = -\varepsilon_0 c^2 \operatorname{div} \left(\vec{E} \wedge \vec{B} \right) - \vec{E} \vec{j}$$

d'après (??).

Ensuite pour la conservation d'énergie, (Cohen p63.)

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \int d^3x \left(N \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) + \frac{du}{dt} \right) \\ &= \int d^3x \left(\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{du}{dt} \right) \\ &= -\varepsilon_0 c^2 \int d^3x \operatorname{div} \left(\vec{E} \wedge \vec{B} \right) = - \int_{\text{surface}} \vec{S} \cdot d^2\vec{s} \end{aligned}$$

Montrant que la variation d'énergie totale dans un volume est due aux flux d'énergie à travers la surface frontière. Si il n'y a pas de flux (i.e. si le volume contient toute la matière et tout le rayonnement,) alors l'énergie est constante.

Remarques :

- Ainsi \vec{S} représente à la fois la densité d'impulsion et le flux d'énergie, voir Feynmann chap 27-6. Cela résulte d'un résultat général en théorie des champs relativistes sur la symétrie du tenseur $T_{\mu\nu}$.
- A partir de la relation relativiste $E = pc$, on a $S = \text{flux énergie} = E \cdot c = pc^2$ donc en effet $p \equiv \frac{S}{c^2}$.
- Voir Feynmann chap 27-5 pour l'exemple intéressant du flux d'énergie dans un fil conducteur.

1.1.4.3 L'énergie de Coulomb (TD)

cf Feynmann chap EM p143.

En électrostatique, considérons une distribution de charges $\rho(\vec{x})$, créant un champ $\vec{E}(\vec{x})$, dérivant d'un potentiel $V(\vec{x})$.

Propriété : L'énergie totale électrostatique est

$$H = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) V(\vec{x})$$

preuve :

on a $-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta V$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho V &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x V (\Delta V) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \text{grad}(V) \cdot \text{grad}(V) \text{ (par parties)} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x |\vec{E}|^2 = H \end{aligned}$$

en particulier, pour deux charges ponctuelles q_1, q_2 distantes de r , l'énergie totale est

$$H = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = q_1 V_2(\vec{x}_1) = q_2 V_1(\vec{x}_2) = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

où V_i est le potentiel créé par la charge q_i seulement.

remarque : Il y a un problème fondamental en physique : pour une charge ponctuelle (ou plusieurs) l'énergie du champ est infinie. cf Feynmann EM1, chap 8-6.

1.1.5 Rayonnement dans le vide : ondes planes progressives

Jackson p269-273, Cohen p13,p30,p34 Feynmann chap 20.

Les équations de Maxwell couplent les champs \vec{E}, \vec{B} avec les densité de charge et de courant ρ, \vec{j} . Ce sont des équations aux dérivées partielles, *linéaires*, et à *coefficients constants*. Pour cette raison, il est très approprié de considérer les solutions de ces équations sous la forme d'ondes planes, c'est à dire dont la dépendance spatiale (\vec{x}) et temporelle (t) est de la forme :

$$e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$. Plus correctement, on dit que l'on peut résoudre ces équations dans "l'espace réciproque" c'est à dire par transformée de Fourier.

Du fait de la dépendance en $e^{-i\omega t}$ on dit que l'onde est **monochromatique**.

Du fait de la dépendance en $e^{i\vec{k}\vec{x}}$, on dit que l'onde est **plane**. (voir ci-dessous l'illustration).

1.1.5.1 Notation complexe

Supposons donc les formes

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \Re \left(\vec{\mathbf{E}}_{\vec{k}, \omega} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right), \quad \vec{\mathbf{E}}_{\vec{k}, \omega} \in \mathbb{C}^3 \quad (1.17)$$

(car les champs physiques sont réels) et de même pour \vec{B}, \vec{j}, ρ .

L'amplitude complexe $\vec{E}_{\vec{k}, \omega}$ caractérise donc le champ $\vec{E}(\vec{x}, t)$.

La partie réelle est nécessaire car le champ physique est réel. Seulement pour les calculs il est pratique d'utiliser les nombres complexes. Les composantes sont complexes à cause du déphasage possible.

1.1.5.2 Onde scalaire à une dimension

Supposons que le vecteur \vec{k} soit selon x , et considérons par exemple la composante

$$E_y(x, t) = \Re \left(\mathbf{E}_{y, \vec{k}, \omega} e^{-i\omega t} e^{ikx} \right) = |\mathbf{E}_y| \cos(kx - \omega t - \alpha)$$

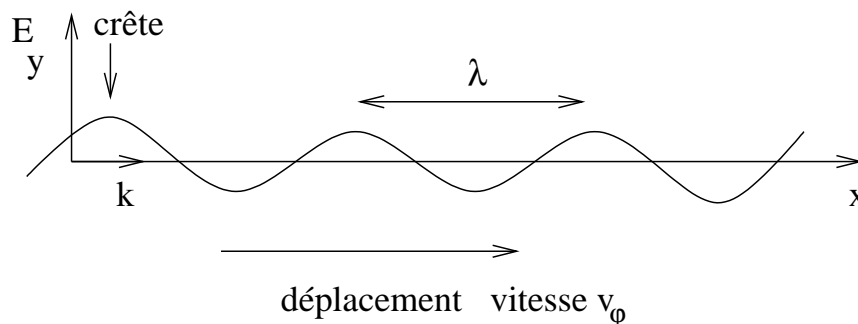
avec $\alpha = -\arg(\mathbf{E}_{y, \vec{k}, \omega})$.

La phase 0 (les crêtes) se trouvent en $x = (\alpha + \omega t + 2\pi n) / k$, $n \in \mathbb{Z}$, et se déplacent donc à la **vitesse de phase**

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} : \text{vitesse de phase}$$

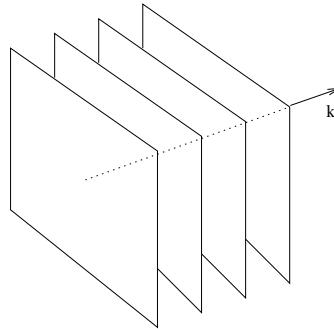
(qui peut être négative). La longueur d'onde est $\lambda = 2\pi/k_x$, et la période $T = 2\pi/\omega$.

Voici donc l'aspect de cette onde :



1.1.5.3 Onde scalaire à 3 dimensions

Supposons toujours pour simplifier que \vec{k} soit selon \vec{x} ; alors les expressions ci-dessus sont valables et ne dépendent pas de y, z , l'onde se propage selon la direction x . L'emplacement des crêtes forment des plans parallèles ($x = (\alpha + \omega t + 2\pi n) / k$, $n \in \mathbb{Z}$ et y, z quelconques). Pour cela on dit que E_y est une onde plane.



1.1.5.4 Onde vectorielle à une dimension

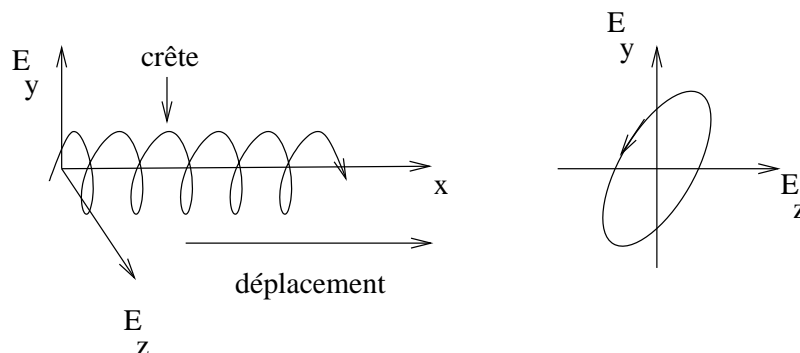
Supposons toujours pour simplifier que \vec{k} soit selon \vec{x} , et que la composante E_x soit nulle. (Ce sera le cas dans la suite). Alors

$$E_y(x, t) = \Re \left(\mathbf{E}_{y, \vec{k}, \omega} e^{-i\omega t} e^{ikx} \right) = |\mathbf{E}_y| \cos(kx - \omega t - \alpha)$$

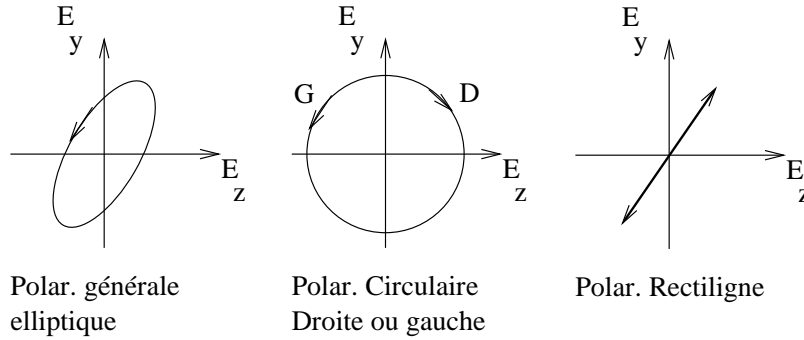
$$E_z(x, t) = \Re \left(\mathbf{E}_{z, \vec{k}, \omega} e^{-i\omega t} e^{ikx} \right) = |\mathbf{E}_z| \cos(kx - \omega t - \beta)$$

avec $\alpha = -\arg(\mathbf{E}_{y, \vec{k}, \omega})$, et $\beta = -\arg(\mathbf{E}_{z, \vec{k}, \omega})$.

Pour x fixé et t variable, le vecteur $\vec{E}(x, t)$ décrit donc une ellipse dans le plan (E_y, E_z) . La forme de l'ellipse et le sens de parcourt dépend des valeurs $|\mathbf{E}_x|, |\mathbf{E}_y|, \alpha, \beta$. On parle de **polarisation du champ**. cf feynmann Méca chap 33. (Ne pas confondre avec la polarisation des charges introduite plus loin !)



Voici des cas particuliers de polarisation.



On remarque qu'une polarisation elliptique quelconque, s'exprime comme superposition de deux polarisations de bases : par exemple circulaire droite/gauche ou rectiligne y/z.

1.1.5.5 Écriture des équations de Maxwell dans l'espace réciproque

Pour l'onde plane (1.17), on a les relations utiles suivantes :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = \Re \left((i\vec{k} \cdot \vec{E}) e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right), \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = \Re \left(i\vec{k} \wedge \vec{E} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right)}$$

En effet (on omet les indices \vec{k}, ω) $\operatorname{div}(\vec{E}) = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \Re \left((ik_x \mathbf{E}_x + ik_y \mathbf{E}_y + ik_z \mathbf{E}_z) e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right)$

$$\text{et } \operatorname{rot}(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \Re \left(i\vec{k} \wedge \vec{E} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right).$$

Alors les équations de Maxwell donnent en notation complexe :

$$\begin{aligned} \omega \vec{B} &= \vec{k} \wedge \vec{E} \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

$$-i\omega \vec{E} = i c^2 \vec{k} \wedge \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} \tag{1.18}$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.19}$$

qui sont beaucoup plus simples car il n'y a plus de dérivées partielles.

(Preuve : on invoque le fait que les égalités obtenues sont vraies pour tout \vec{x}, t , ce qui permet d'enlever la partie réelle)

1.1.5.6 Evolution d'une onde plane dans le vide

Jack p269, Cohen p30,34

Si l'espace est vide de toutes charges, c'est à dire $\rho = 0, j = 0$, alors les deux équations (1.18) (1.19) donnent

$$\frac{-\omega}{c^2} \vec{E} = \vec{k} \wedge \vec{B} \quad (1.20)$$

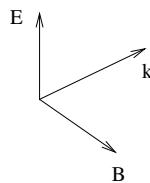
$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.21)$$

Des quatres équations de Maxwell, on déduit que $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ forment une base orthogonale directe, et que

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \wedge \vec{E} \right)$$



Il reste comme paramètre libre les phases α, β décrivant la polarisation du champ \vec{E} comme décrit ci-dessus.

On a vu qu'il y a deux polarisations "de base" du champ électromagnétique. Par exemple polarisation Droite/Gauche ou rectiligne y/z.

Le champ \vec{B} oscille donc avec le champ \vec{E} .

1.1.5.7 Forces électriques et magnétiques

On remarque le facteur $1/c$ pour l'intensité du champ \vec{B} par rapport au champ \vec{E} . Cela a la conséquence suivante : pour une particule de charge e , de vitesse v , l'intensité des forces électriques et magnétiques sont : $F_E = eE$,

$$F_B = |e\vec{v} \wedge \vec{B}| = evB = e\frac{v}{c}E = F_E \cdot \left(\frac{v}{c}\right)$$

Donc pour des vitesses non relativistes $v \ll c$, **la force magnétique est négligeable :**

$$F_B \ll F_E$$

1.1.5.8 Flux d'énergie

Le vecteur de Poynting $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} = c \epsilon_0 \left| \vec{E} \right|^2 \frac{\vec{k}}{k}$ est colinéaire à \vec{k} , et oscille aussi à la fréquence ω . En moyenne sur une période $T = 2\pi/\omega$, d'après (1.22)

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{c \epsilon_0}{2} |\vec{E}_\omega|^2$$

Propriété (TD) : en notation complexes, si $A = \Re(\mathbf{A}e^{-i\omega t})$ et $B = \Re(\mathbf{B}e^{-i\omega t})$, alors en moyenne sur une période :

$$\langle AB \rangle_{periode} = \frac{1}{T} \int dt \frac{1}{2} (\mathbf{A}e^{-i\omega t} + \overline{\mathbf{A}}e^{i\omega t}) \frac{1}{2} (\mathbf{B}e^{-i\omega t} + \overline{\mathbf{B}}e^{i\omega t}) \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{4} (\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{A}}\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \Re(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{B}) \quad (1.23)$$

1.2 Action du rayonnement sur un atome

*modèle classique de l'atome, Laval p107 [?], Jackson p155-158, p285-288.

Feynmann EM, chap11-1, 11-2,11-3, Meca chap 31-2.

=====
 TD : Loi de Curie : effet de T sur la pol. de mol polaires, et sur l'indice.
 calcul de moments dipolaires.
 =====

Dans cette section, nous allons préciser comment un rayonnement électromagnétique de fréquence ω (une onde plane qui est constitué d'un champ électrique et magnétique oscillants) passant sur un atome, lui impose un mouvement de vibration à la même fréquence ω . Nous allons montrer que les charges et par conséquent le moment dipolaire électrique de l'atome, se mettent à osciller dans la direction du champ électrique de l'onde incidente ; voir figure 1.1.

1.2.1 Modèle classique de la polarisabilité

Pour commencer, nous allons considérer le cas de l'atome Hydrogène, contenant un noyau de charge $+e$, et un électron de charge $-e$. Nous modélisons ici l'atome par la mécanique classique de façon schématique.

Lorsque l'atome est isolé (sans force extérieure), l'électron tourne autour du noyau, et la position moyenne de l'électron (dans l'état de plus basse énergie) est située au centre de l'atome. Par contre si il y a une force extérieure, comme $\vec{F} = (-e)\vec{E}$ due à un champ électrique, la position moyenne de l'électron est décalée d'une quantité que l'on notera \vec{X} . Voir figure 1.2.

Notons \vec{X} le **déplacement de la position moyenne de l'électron** par rapport au noyau, et m la masse de l'électron. Le noyau exerce une force de rappel sur l'électron,

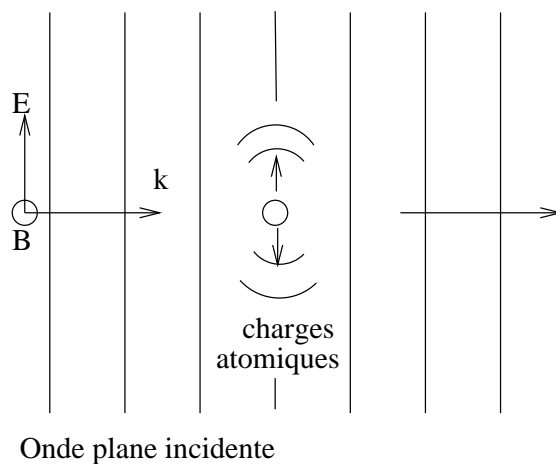


FIG. 1.1 – Action d’une onde plane incidente sur un atome : son moment dipolaire se met à osciller dans la direction du champ électrique incident.

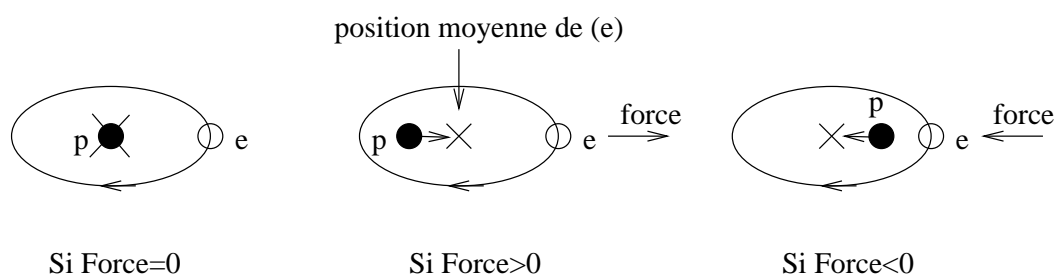


FIG. 1.2 – Schéma de la position moyenne de l’électron dans l’atome d’hydrogène, selon la force extérieure appliquée.

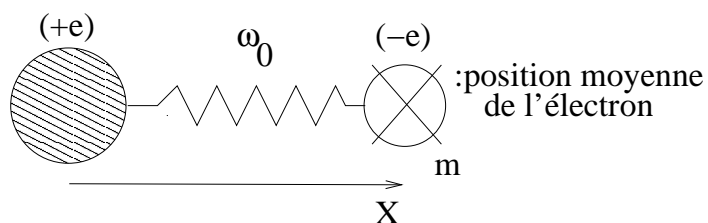


FIG. 1.3 – Modèle classique de l’atome comme un dipôle oscillant, constitué d’un noyau lourd et d’un électron de masse m et charge $(-e)$.

l'empêchant de s'échapper, de sa position d'équilibre. Cette force est la force de Coulomb, mais dans notre modèle, on écrit que la force de rappel effective sur la position moyenne est

$$\vec{F}_{rappel} = -k\vec{X}$$

, comme si le noyau et la position moyenne de l'électron étaient reliés par un ressort de raideur k .

Le champ électrique extérieur \vec{E} exerce une force

$$\vec{F}_E = (-e)\vec{E}$$

sur l'électron. Nous négligeons la force F_B exercée par le champ magnétique, pour la raison expliquée dans la section précédente.

Finalement, comme dans tout système physique il y a de la dissipation : l'atome considéré n'est pas un système parfaitement isolé, il peut échanger de l'énergie avec son environnement. Pour un atome isolé, cette dissipation provient du couplage avec le champ électromagnétique : l'atome perd son énergie en rayonnement (Feynmann méca, chap32-3). Dans un gaz, cette dissipation (ou relaxation) provient de la collision entre les molécules. Dans un gaz à très basse pression, où les collisions deviennent rares, ce sera plutôt les chocs avec les parois qui détermineront la dissipation. Dans un solide ou un liquide, ce sera un échange d'énergie avec le réseau ou le milieu environant. Cf Laval [?] p.85. On introduit ici cette dissipation par une force de frottement

$$\vec{F}_{dissip} = -m\gamma\frac{d\vec{X}}{dt}$$

Alors la loi de Newton appliquée au déplacement \vec{X} , selon l'axe du champ électrique donne :

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - m\gamma\frac{dX}{dt} - eE(t) \quad (1.24)$$

Or $E(t) = \Re(\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t})$. Posons aussi

$$X(t) = \Re(\mathbf{X}_\omega e^{-i\omega t})$$

en régime stationnaire. Soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation naturelle de l'atome. Alors :

$$\mathbf{X}_\omega = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)}\mathbf{E}_\omega$$

En général la dissipation est très faible, ce qui signifie que γ est très petit devant la fréquence de résonance ω_0 (Voir Jackson p285, Feyn méca 32-3).

Il s'agit d'oscillations forcées, et on remarque que si la fréquence de la force extérieure ω , est proche de la fréquence naturelle de l'atome ω_0 , alors l'amplitude $|\mathbf{X}_{\omega_0}| = \left| \frac{e\mathbf{E}_{\omega_0}}{m\gamma\omega_0} \right|$ peut

être très grande (car $\gamma \ll \omega_0$ petit); on parle de **résonance**. Ainsi, près de la résonance les effets de dissipation sont importants pour limiter cette amplitude. Loin de la résonance, les effets de dissipation sont négligeables, on peut négliger le terme $i\gamma\omega$.

L'atome forme un dipole électrique, et son **moment dipolaire électrique** est :

$$\vec{p}(t) = (-e) \vec{X}(t) : \text{moment dipolaire} \quad (1.25)$$

On déduit que le moment dipolaire oscille aussi : $\vec{p}(t) = \Re(\vec{p}_\omega e^{-i\omega t})$, avec l'amplitude

$$\vec{p}_\omega = \varepsilon_0 \alpha_\omega \vec{E}_\omega \quad (1.26)$$

avec le coefficient qui peut être complexe, est appelé **polarisabilité**, et dont l'expression est alors :

$$\alpha_\omega = \frac{(e^2/\varepsilon_0)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} : \text{polarisabilité} \quad (1.27)$$

1.2.2 Etude de la polarisabilité

L'unité de la polarisabilité α est (longueur)³. (Utiliser la formule de Coulomb $E = e/(4\pi\varepsilon_0 r)$ pour le vérifier).

1.2.2.1 Graphe de $\text{Re}(\alpha)$ et $\text{Im}(\alpha)$

(avec maple polar.mws), (cf Jackson p286). On verra que $\Im(\alpha)$ donne l'énergie dissipée, et aura une importance pour l'indice de réfraction d'un milieu en optique. On calcule que pour $\omega \simeq \omega_0$ et si $\gamma \ll \omega_0$

$$\Im(\alpha(\omega)) = \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0 m \gamma \omega_0} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{2(\omega_0 - \omega)}{\gamma} \right)^2}$$

qui est une lorentzienne de largeur $\Delta\omega \simeq \gamma/2$

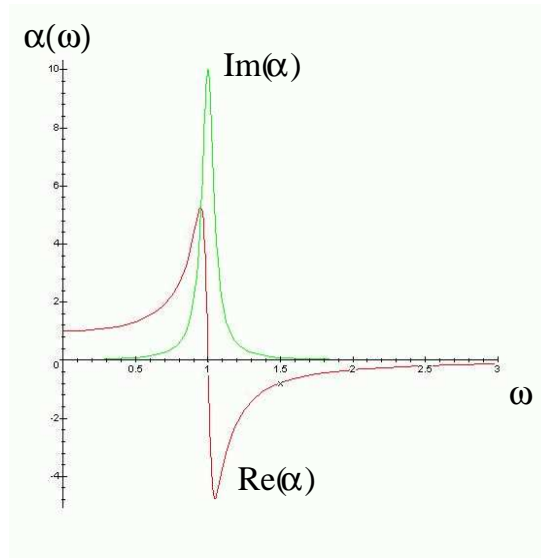


FIG. 1.4 – Graphe de la polarisabilité d’un atome $\alpha(\omega)$, au voisinage d’une résonance.

1.2.2.2 Comportement basse fréquences

pour $\omega \ll \omega_0$ alors

$$\alpha_\omega \simeq \frac{(e^2/\varepsilon_0)}{m\omega_0^2} = \alpha_0 : \text{constante} \quad (1.28)$$

Dans ce cas, le mouvement du champ est suffisamment lent pour que la position de l’électron s’ajuste “instantanément” au champ (ce sera important pour expliquer la diffusion Rayleigh)

1.2.2.3 Comportement hautes fréquences

pour $\omega \gg \omega_0$ alors

$$\alpha_\omega \simeq \frac{(e^2/\varepsilon_0)}{-m\omega^2} \quad (1.29)$$

Dans ce cas la force de rappel $\vec{F} = -k\vec{X}$ semble négligeable, et l’électron se comporte comme une particule libre soumise seulement à la force électrique. (sera important pour la diffusion Thomson)

1.2.2.4 Bilan d’énergie (TD)

cf Laval p116-117 [?].

L'énergie interne du dipole oscillant (le Hamiltonien) est définie par

$$H = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2$$

mais H n'est pas conservée à cause de la force externe F_E et de la dissipation F_{dissip} . En effet :

$$\frac{dH}{dt} = -m\gamma\dot{X}^2 - eE\dot{X} = -\mathcal{P}_{dissip} + \mathcal{P}_{Recue}$$

avec la puissance dissipée $\mathcal{P}_{dissip} = m\gamma\dot{X}^2 > 0$ et la puissance reçue du rayonnement incident $\mathcal{P}_{recue} = -eE\dot{X}$.

En régime stationnaire, en moyenne sur une période, $\langle dH/dt \rangle = 0$ donc

$$\mathcal{P}_{dissip} = \mathcal{P}_{Recue} \geq 0$$

D'après (1.22) $\langle \mathcal{P}_{dissip} \rangle = \langle \mathcal{P}_{recue} \rangle = -\frac{e\omega}{2}\Im(\bar{\mathbf{E}}\mathbf{X})$. Or $\mathbf{p} = -e\mathbf{X} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}$ donc

$$\langle \mathcal{P}_{dissip} \rangle = \frac{\omega\varepsilon_0}{2}\Im(\alpha_\omega) \left| \vec{\mathbf{E}}_\omega \right|^2$$

donc $\Im(\alpha)$ informe sur la puissance que l'atome recoit et dissipe.

On verra ensuite que l'atome rayonne à son tour. Une partie de l'énergie recue est donc diffusée; si cette partie est négligeable, le calcul présent est encore valable (cf laval p121 [?]) : $\mathcal{P}_{diff} \ll \mathcal{P}_{dissip}$; sinon un traitement de la force de rayonnement, montre (cf Cohen T1) que les formules précédentes sont valable, mais γ correspond alors à la partie rayonnée.

Dans un traitement quantique, on peut avoir des situations où $\mathcal{P}_{recue} < 0$ lorsqu'il y a **inversion de populations** des niveaux d'énergie de l'atome. Cela a pour conséquence que l'atome fournie de l'énergie au champ incident, et l'amplifie. On parle de **émission stimulée**. ce mécanisme est à la base du **laser**. cf laval p119. (modèle classique possible @@?)

1.2.3 Ordres de grandeur de α pour l'atome H

Les niveaux d'énergie de l'électron dans l'atome H sont discrets, et l'écart entre les deux premiers niveaux ($n=1, n=2$) est de l'ordre de

$$E \simeq \frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \simeq \frac{mc^2}{2}\alpha^2 = 13,6 \text{ eV}$$

avec la **constante de structure fine**

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

qui est sans dimension est caractérise l'intensité de la force électromagnétique.

si l'on veut interpréter le mouvement de l'électron comme une oscillation de fréquence ω_0 , il faut poser $E = \hbar\omega_0$, soit $\omega_0 = \frac{E}{\hbar} = 2.06 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$, correspondant à $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 10^{-2} \mu\text{m}$ (domaine des rayons X). Cela donne une polarisabilité à basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) :

$$\alpha_H \simeq 4a_0^3 \simeq 0.592 \text{ \AA}^3 \quad (1.30)$$

avec le **Rayon de Bohr** :

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)} = \frac{\hbar}{\alpha mc}$$

1.2.3.1 Remarques :

- l'expérience qui consiste à mesurer l'indice d'un gaz (car on verra que l'indice dépend de la constante diélectrique, qui dépend de la polarisabilité) donne $\alpha_H = 0.66 \text{ \AA}^3$.
- Pour la plupart des atomes et molécules simples, la polarisabilité se situe entre 10 et 1000 \AA^3 . (Laval p110)
- La condition $\omega \ll \omega_0$ correspond à la condition $\lambda \gg \frac{4\pi}{\alpha} a_0 \simeq 0.1 \mu\text{m}$.
- Nous avons traité approximativement le cas de l'atome H. Mais notre traitement est plus général. Pour une molécule, appelons \vec{X} la position du barycentre des charges négatives par rapport à celui des charges positives. Alors on distingue deux classes d'atomes ou molécules concernant la polarisabilité :

1. Les **molécules non polaires** qui ont un moment dipolaire nul si il n'y a pas de champ extérieur. C'est le cas de l'oxygène O_2 , ou des molécules monoatomiques comme l'Hydrogène étudié ci-dessus. La polarisation est créée par l'application du champ \vec{E} extérieur comme ci-dessus. On parle de **polarisation électronique** pour le déplacement du nuage d'électrons. Mais les noyaux sont aussi sensibles au champ \vec{E} . Dans ce cas, il faut appliquer le modèle précédent avec la masse des noyaux m , qui est notablement plus grande que celle de l'électron. Par conséquent, la fréquence de résonance est plus faible. Cela s'interprète en disant que à cause de leur grande inertie, les noyaux ont du mal à suivre les variations du champ électrique dans les hautes fréquences. On parle de **polarisation moléculaire**. En général dans un atome ou une molécule non polaire, la polarisabilité provient surtout des électrons de valence qui sont peu liés, et donc très sensibles au champ électrique extérieur.
2. Les **molécules polaires** qui possèdent un **moment dipolaire permanent** (sans la présence d'un champ extérieur), car le barycentre des charges négatives et positives n'est pas au même endroit, c'est à dire $\vec{X} = \vec{X}_0 \neq \vec{0}$, même si $E = 0$. C'est le cas de l'eau (H_2O) par exemple. La molécule a alors un moment dipolaire permanent $\vec{p}_0 = (-e)\vec{X}_0$. Comme ci-dessus, le champ électrique agit sur les charges et donne une force $\vec{F}_E = -e\vec{E}$ qui a tendance à aligner le dipôle dans la direction du champ \vec{E} .
Mais à température ambiante, la direction du moment dipolaire permanent d'une molécule d'un gaz ou liquide fluctue à cause de l'agitation thermique.

Voir TD pour le calcul de la polarisation moyenne, sous l'effet d'un champ électrique constant. on trouve :

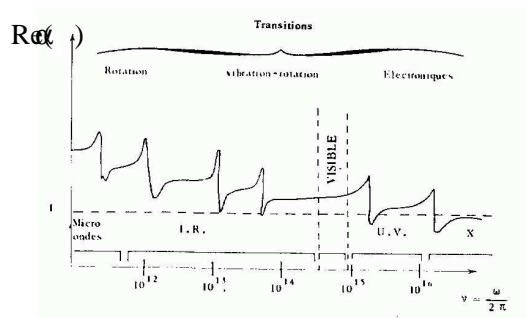
$$\langle p \rangle = \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} E$$

La dépendance en $1/T$ s'appelle **la loi de Curie**. cf Jackson p157, Feynmann chap 11-3 p182.

- Modèle quantique (TD) : Un traitement plus correct mais plus technique, consiste à traiter l'atome en mécanique quantique. On obtient une expression de la polarisabilité hors résonance α similaire à eq(1.27), mais faisant intervenir plusieurs fréquences ω_{j0} qui correspondent aux fréquences de transition entre les niveaux d'énergie quantifiés E_j et le niveau fondamental E_0 de l'atome :

$$\omega_{j0} = \frac{1}{\hbar} (E_j - E_0)$$

La courbe $\Re(\alpha)(\omega)$ présente alors des résonances à chacune de ces fréquences.



1.2.4 Causalité, et relations de Kramer-Krönig (*)

cf Laval p182-195, Jackson p311,331

Relation de causalité pour α_ω @@

===== Faire @@@=====

Tenseur de polarisabilité, cf viano, pour CO2.

1.3 Rayonnement d'un atome oscillant

ref : Laval chap 3. Jackson chap 9, p391, chap 12 p601, chap 14 p654

Cohen ex6 p73

Feynmann EM1 21-4.

=====

TD :

*retrouver le résultat du dipole statique directement.

*calcul d'une antenne, et propriétés.Exemple de l'antenne @@ cf Jackson p396.

Les équations de Maxwell (1.5) et (1.6) suggèrent que la matière peut créer du rayonnement électromagnétique, à condition que cette matière soit chargée ou ait une densité volumique de courant non nulle \vec{j} .

C'est le cas de l'atome de la section précédente puisque les charges oscillent sous l'influence d'un champ électromagnétique incident, et créent donc un courant local qui oscille. Dans cette section, nous allons étudier le champ électromagnétique "secondaire" créé par cet atome oscillant.

On suppose que de la matière chargée est localisée dans l'espace dans un volume qui a une taille inférieure à d , caractérisée par ρ, \vec{j} .

Par exemple, imaginer une "antenne" contenant des électrons libres dans un fil conducteur, qui a une taille $d \simeq \text{quelques cm}$, ou imaginer un atome contenant un noyau chargé (+) et des électrons chargés (-) qui a une taille $d \simeq \text{quelques \AA}$, comme dans la section précédente.

On va supposer que la matière chargée oscille à la fréquence ω (à cause d'une force extérieure, voir section suivante). On va montrer qu'il y a création d'un rayonnement électromagnétique, à la même fréquence ω , et donc de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. On va caractériser ce rayonnement, en montrant qu'il est polarisé, et directionnel.

Dans la suite, on va supposer que la taille d du système est très petite devant la (ou les) longueur(s) d'onde émise λ :

$$d \ll \lambda \quad (1.31)$$

Cela suppose que la fréquence est assez petite. Nous supposons aussi que les charges ont des vitesses non relativistes $v \ll c$

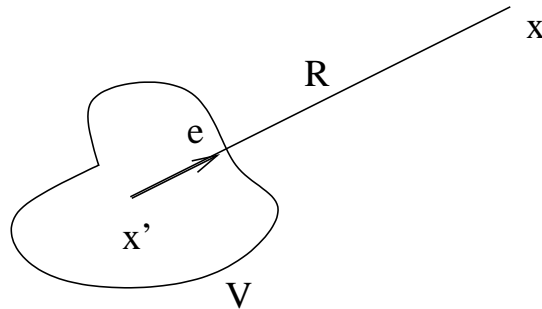
1.3.1 L'approximation dipolaire électrique (TD).

En supposant l'hypothèse 1.31, en partant des équations de Maxwell, on peut établir que le rayonnement créé par les charges en mouvement, au point \vec{x} , à l'instant t , est en Jauge de Lorentz (voir eq(??)) :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \simeq \frac{1}{c^2 4\pi\epsilon_0 R} \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{R}{c}\right) \quad (1.32)$$

où \vec{j} est la densité de courant à l'emplacement des charges, contenues dans le volume V , et R est la distance entre les charges et le point d'observation \vec{x} .

Voir schéma.



Pour justifier (??) : il faut partir de (1.12), et utiliser la fonction de Green retardée. cf Jackson p226.

1.3.2 Expression de \vec{A} à l'aide du moment dipolaire

cf Laval p.50 [?], Jackson p391 [?]. Feynmann EM2 chap 21-4.

Avec une intégration par parties (rem : $\text{div}(\vec{x}\vec{j}) = j_x + x\text{div}(\vec{j})$), et utilisant la conservation de la charge (1.7) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{x}' \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{R}{c}\right) &= - \int_V d^3\vec{x}' \text{div}(\vec{j})\vec{x}' \\ &= \int_V d^3\vec{x}' \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) \vec{x}' \end{aligned}$$

Il est donc naturel d'introduire le vecteur $\vec{p}(t)$, appelé **moment dipolaire électrique de la distribution de charges**, associé à la distribution de charges :

$$\vec{p}(t) = \int_V d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}', t) \vec{x}' : \text{moment dipolaire de la distribution de charges}$$

alors :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2 4\pi\epsilon_0 R} \frac{d\vec{p}(t - \frac{R}{c})}{dt}$$

1.3.2.1 Remarques

– La valeur de \vec{p} dépend du choix de l'origine de l'espace, mais $d\vec{p}/dt$ n'en dépend pas.

- Ce sont des ondes sphériques, car dépendent de R , mais pas de la direction.
- \vec{p} est une généralisation pour des charges continues, du moment dipolaire introduit en (1.25) pour deux charges ponctuelles : $\vec{p} = Q\vec{X}$. Dans ce cas, on obtient directement le résultat précédent : $\int \vec{j} = Q\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et $\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{Q\vec{v}}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}}{R}$, cf Feynmann EM1, chap 21-4.

1.3.2.2 Source monochromatique

Si les charges oscillent à la fréquence ω , c'est à dire $\vec{p}(t) = \Re(\vec{p}_\omega e^{-i\omega t})$, alors :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \Re\left(\vec{A}_\omega(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}\right)$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) = -\frac{i\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3 (kR)} e^{ikR} \vec{p}_\omega$$

avec

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

1.3.3 Champs électriques et magnétiques

On obtient le champ magnétique d'après eq.(1.8) :

$$\vec{B}_\omega = \overrightarrow{rot}(\vec{A}_\omega) = \frac{\omega^3}{4\pi\epsilon_0 c^4 (kR)} e^{ikR} \left(1 - \frac{1}{ikR}\right) (\vec{e}_r \wedge \vec{p}_\omega)$$

$\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ est un vecteur unitaire. On a utilisé les formules (A.3) et (A.1).

Le champ électrique s'obtient avec (1.5), donnant (en régime monochromatique ω , et dans le vide $\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\vec{E}_\omega = \frac{ic^2}{\omega} \overrightarrow{rot} \vec{B}_\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \omega^2 \frac{1}{R} e^{ikR} ((\vec{e}_r \wedge \vec{p}_\omega) \wedge \vec{e}_r) + (3(\vec{e}_r \cdot \vec{p}) \vec{e}_r - \vec{p}) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2}\right) e^{ikR}$$

en utilisant (A.3), (A.1).

En supposant que $R \gg \lambda$, (c'est à dire que le point d'observation est à plusieurs longueurs d'ondes, $1/(kR) \ll 1$) qui correspond à la **zone "lointaine" dite de zone radiation**, alors

$$\vec{\mathbf{B}}_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^3}{c^4} \frac{1}{(kR)} e^{ikR} (\vec{e}_r \wedge \vec{\mathbf{p}}_\omega) \quad (1.33)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) = c\vec{\mathbf{B}}_\omega(\vec{x}) \wedge \vec{e}_r \quad (1.34)$$

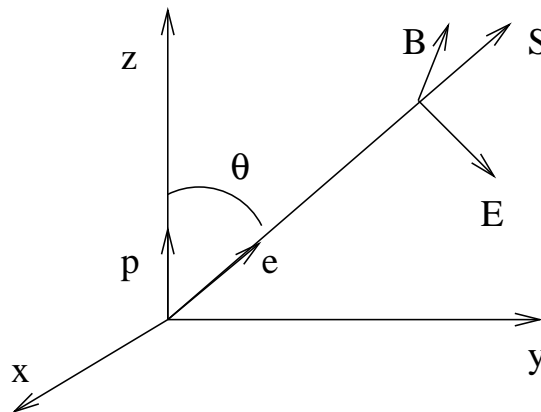
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \Re \left(\vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \right) \quad (1.35)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \Re \left(\vec{\mathbf{B}}_\omega(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \right) \quad (1.36)$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad R = |\vec{x}| \quad (1.37)$$

qui est le comportement typique des champs de rayonnement (1.20), car en effet pour $kR \gg 1$, une onde sphérique (de grand rayon R) est localement plane.

FIG. 1.5 – Champs rayonnés par un dipôle oscillant.



La polarisation du champ rayonné est indiquée sur la figure (1.5). **Remarquons pour la suite, que \vec{E} est dans le plan (\vec{e}, \vec{p}) .**

1.3.4 Flux d'énergie, et Puissance rayonnée

cf Feynmann méca chap 32-2.

– Le flux d'énergie est donné par (1.16), donc par la norme du vecteur de Poynting eq.(1.13) $|\vec{S}| = c^2\epsilon_0 |\vec{E} \wedge \vec{B}| = c^3\epsilon_0 |\vec{B}|^2$ qui oscille lui aussi. En moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ d'après (1.22), **le flux d'énergie**, qui est aussi la puissance rayonnée

par unité de surface, est

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{ds^2} = \langle \text{flux energie} \rangle &= \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{c^3 \varepsilon_0}{2} |\vec{\mathbf{B}}_\omega|^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2 32 \pi^2} \frac{\omega^4}{c R^2} |\vec{e}_r \wedge \vec{\mathbf{p}}_\omega|^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2 32 \pi^2} \frac{\omega^4}{c R^2} |\vec{\mathbf{p}}_\omega|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{e}_r, \vec{\mathbf{p}}_\omega)}$.

– La **puissance moyenne rayonnée par unité d'angle solide** est alors

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{dP}{ds^2} R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2 32 \pi^2} \frac{\omega^4}{c} |\vec{\mathbf{p}}_\omega|^2 \sin^2 \theta \quad (1.38)$$

où $d\Omega = \frac{ds^2}{R^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$ est l'élément d'angle solide. Ce dernier résultat montre que le rayonnement est maximum dans une direction orthogonale à $\vec{\mathbf{p}}_\omega$ et nul dans la direction de $\vec{\mathbf{p}}_\omega$.

– La **puissance moyenne totale rayonnée** (à travers une sphère de rayon R centrée sur la source) est (car $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int \langle \vec{S} \rangle R^2 d\Omega \\ &= \frac{\omega^4}{4\pi \varepsilon_0 c^3 3} |\vec{\mathbf{p}}_\omega|^2 \end{aligned}$$

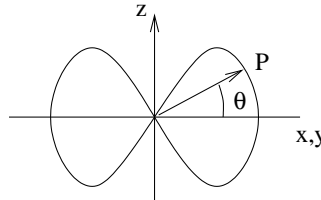


FIG. 1.6 – Puissance rayonnée \mathcal{P} en fonction de la direction θ .

1.3.5 Ordres de grandeur pour l'atome d'hydrogène

cf Laval p60, Chartier p445-446.

Si on prend l'ordre de grandeur

$$p \simeq ea_0$$

alors le temps pour qu'un état excité d'énergie E relaxe vers l'état fondamental en perdant son énergie sous forme de rayonnement est :

$$\tau = \frac{E}{\mathcal{P}}$$

que l'on peut comparer à la période de l'électron sur son orbite qui est de l'ordre de $T = 2\pi/\omega \simeq 3.10^{-16} s$, avec $E \simeq \hbar\omega$:

$$\frac{\tau}{T} \simeq \frac{\hbar\omega^2}{\mathcal{P}2\pi} = \frac{6}{\alpha^3} = 1.5 \cdot 10^7$$

donc τ est très long ($\tau \simeq 4.10^{-9} s$) relativement à T .

En fait pour un atome, τ^{-1} est la probabilité d'émission d'un photon par unité de temps.

(rem : en mécanique classique, l'état fondamental de l'électron a une énergie $-\infty$ ce qui crée un problème que seule la mécanique quantique résoud grâce au principe d'incertitude).

Exemples concrets pour la polarisation... (arva ?)@@

Exemple de l'antenne @@ cf Jackson p396.

Rem sur termes quad elect et dipol magn. @@.

1.4 Diffusion du rayonnement par un atome

Diffusion : Laval p114, Jackson p 411.

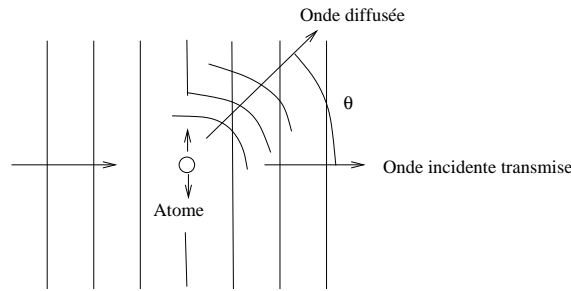
Cohen ex7 p76. @@

Feynmann méca chap 32-5.

=====

On va maintenant combiner les deux sections précédentes, pour décrire la diffusion d'un rayonnement par un atome.

On considère un rayonnement incident monochromatique sur un atome $\vec{E}_i(\vec{x}, t) = \Re(\vec{E}_{i,\omega,\vec{k}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}})$. On suppose que cette onde incidente est **une onde plane**. D'après la section 1.2, cela induit un moment dipolaire de l'atome $\vec{p}(t) = \Re(\vec{p}_\omega e^{-i\omega t})$, qui à son tour va créer un rayonnement étudié à la section 1.3, que l'on notera $\vec{A}_d, \vec{E}_d, \vec{B}_d$. Au total, on observe donc un rayonnement secondaire comme réponse au rayonnement incident. Noter que les directions du rayonnement secondaire sont différentes de celles du rayonnement incident. On dit que **l'atome diffuse le rayonnement**. Nous allons caractériser cette diffusion.



1.4.1 Section efficace de diffusion

En combinant les résultats (1.38) et (?), on obtient, que la puissance moyenne diffusée dans la direction θ (où θ : angle avec la direction du champ incident) est proportionnelle à l'intensité I de l'onde incidente.

On pose :

$$\frac{d\mathcal{P}_d}{d\Omega} = I \cdot \frac{d\sigma_d}{d\Omega} \quad (1.39)$$

où

$$\begin{aligned} I &= \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\vec{\mathbf{E}}_\omega|^2 \\ &= \text{flux d'énergie incident} \\ &= \text{puissance incidente /unité de surface transverse} \end{aligned}$$

et avec

$$\frac{d\sigma_d}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} k^4 |\alpha_\omega|^2 \sin^2 \theta : \text{section efficace différentielle de diffusion.}$$

avec $k = \omega/c$.

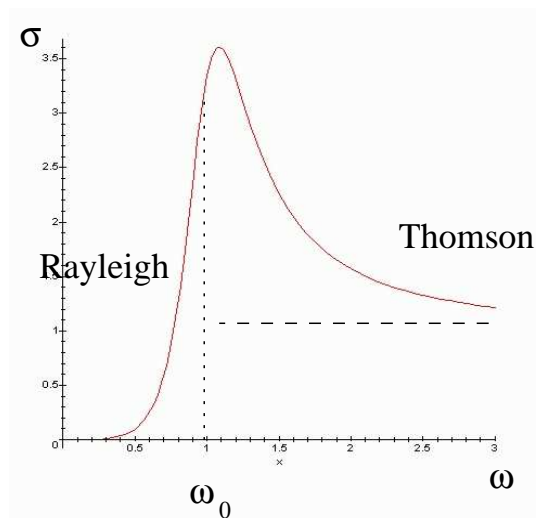
Si on intègre sur toutes les directions observées, on obtient la **puissance moyenne totale diffusée**

$$\mathcal{P} = I \cdot \sigma_d$$

avec la **section efficace totale de diffusion** :

$$\sigma_d = \frac{1}{6\pi} k^4 |\alpha_\omega|^2$$

$$= \frac{1}{6\pi} \frac{e^4}{\varepsilon_0^2 c^4 m^2} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)}$$



où on a utilisé l'expression (1.27) de α_ω .

1.4.2 Etude de la section efficace de diffusion

1.4.2.1 Remarques

- La section efficace a **l'unité d'une surface**, car $\sigma = \mathcal{P}/I$, or $P \equiv J/s$ et $I \equiv J/s/L^2$. On peut interpréter σ_d comme la surface effective que rencontre le rayon incident et qui l'empêche de continuer, et le diffuse donc dans d'autres directions.
- La diffusion est donc caractérisée par la polarisabilité α_ω de l'atome qui diffuse.
- Cette diffusion change la direction du rayonnement, mais pas sa fréquence. On parle de **diffusion élastique**.

1.4.2.2 Comportement basse fréquences

pour $\omega \ll \omega_0$ (ω_0 : fréquences de résonances de l'atome) alors eq.(??) donnait $\alpha_\omega \simeq \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0)}{m\omega_0^2} = \alpha_0$: constante. Alors l'intensité diffusée varie comme k^4 , soit ω^4 , ou λ^{-4} :

$$\sigma_d = \frac{1}{6\pi} k^4 |\alpha_0|^2 \quad (1.40)$$

C'est la **loi de Rayleigh** qui montre que les petites longueurs d'ondes sont plus diffusées que les grandes. Cela explique **la couleur bleue du ciel**, voir plus loin. Plus généralement, cette loi est valable tant que la taille du diffuseur (ici l'atome) est petite devant la longueur d'onde du rayonnement incident. Le terme "diffusion de Rayleigh" est réservé pour la diffusion incohérente sur de petits diffuseurs, voir plus loin.

1.4.2.3 Comportement hautes fréquences

pour $\omega \gg \omega_0$ alors eq.(1.29) donnait $\alpha_\omega \simeq \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0)}{-m\omega^2}$. Alors

$$\sigma_d = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m^4} = \frac{1}{6\pi} r_e^2$$

appelée **section efficace Thomson**,
avec le rayon classique de l'électron @@

$$r_e = \frac{e^2}{\epsilon_0 m c^2}$$

Dans le régime haute fréquence on a vu que l'électron se comporte comme une particule libre cf (1.29).

Remarques (*)

- Noter que si l'atome contient Z électrons, alors pour des fréquences supérieures aux fréquences propres, la section efficace est la somme des sections Thomson

$$\sigma = Z \sigma_T$$

Cette situation se rencontre pour des rayons X d'énergie $\simeq 100\text{keV}$ ($\lambda \simeq 0.1\text{\AA}$). ref Laval p161.

- Pour des fréquences plus élevées, si $h\nu \geq mc^2$, il faut tenir compte de la nature corpusculaire du rayonnement (les photons), donnant une diffusion inélastique des photons sur les électrons : **la diffusion Compton**. cf Cohen T. tome 2 [?], p.89. Voir aussi le cours de relativité.

1.4.2.4 Cas de l'atome d'hydrogène

Pour l'atome H, on a calculé l'expression de α "à basse fréquences" $\omega \ll \omega_0$, voir (??). Cela donne une section efficace totale, (suivant la loi de Rayleigh) :

$$\sigma_d = 9 \cdot (2\pi)^5 \cdot \left(\frac{a_0}{\lambda}\right)^4 a_0^2$$

qui est donc très inférieur au carré du rayon de Bohr (surface apparente de l'atome) car $\lambda \gg a_0$.

=====FAIRE=====

Si rayonnement incohérent, raie d'absorption p122-124.

émission spontanée, non classique, pour expliquer l'équilibre thermique, importante à hte fréquence. p125,127.

émission spontanée, responsable des sources thermiques, p131.

Chapitre 2

Phénomènes collectifs

=====FAIRE=====

Pb de différencier l'absorption et la diffusion, créant tous deux n imaginaire. @@ cf Born etolf.

=====

TD : attirance des objets dielect par champ E intense : cf feynmann EM1 p176. Rem : pour le magnétisme il y a deux signes, cf FeynEM2p257.

diffusion sur un cristal parfait.

=====

Dans le chapitre précédent , nous avons décrit la diffusion d'une onde sur un atome isolé. Pour comprendre l'interaction entre la matière (assemblée de plusieurs atomes) et le rayonnement, il faut tenir compte du fait que les rayonnements diffusés par des atomes différents interfèrent, et aussi que l'absorption diminue l'intensité de l'onde incidente au cours de son trajet dans la matière.

Dans ce chapitre, nous allons donc étudier la diffusion sur une assemblée d'atomes. Nous obtiendrons les équations de Maxwell macroscopiques, et déduirons le comportement des ondes dans la matière, avec la notion d'indice de réfraction importante en optique.

2.1 Diffusion par une assemblée d'atomes

2.1.1 Facteur de structure

cd Lavalp140

Jack p417, Ascroft et mermin p107, Kittel p56.

Soit un volume V contenant M atomes positionnés en \vec{x}_i , $i = 1, \dots, M$.

Supposons une onde plane monochromatique incidente sur le volume V de la forme (1.17). Chaque atome développe alors un moment dipolaire (1.26)

$$\vec{p}_i = \epsilon_0 \alpha_\omega \vec{E}(\vec{x}_i)$$

et à son tour émet une onde monochromatique (non plane mais sphérique) donnée par (1.33) : $\vec{E}_{d,i}, \vec{B}_{d,i}$.

Pour un point d'observation dans la direction \vec{e}_r (vecteur unitaire), et à une distance R très grande devant la taille de V , les différents champs diffusés auront même intensité mais une différence de phase donnée par $(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - k \vec{e}_r \cdot \vec{x}_i)$ (voir figure).

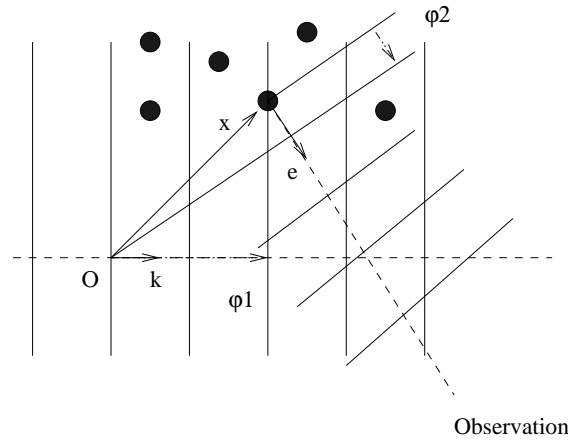


FIG. 2.1 – Déphase $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, avec $\varphi_1 = \vec{k} \cdot \vec{x}_i$ et $\varphi_2 = -k \vec{e} \cdot \vec{x}_i$.

Au total les amplitudes $A_i = |A| e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - k \vec{e}_r \cdot \vec{x}_i)}$ vont s'ajouter donnant $A_{tot} = \sum_i A_i$, et l'intensité mesurée $|A_{tot}|^2 = |A|^2 \left| \sum_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_i - k \vec{e}_r \cdot \vec{x}_i)} \right|^2$ fait alors apparaître un **facteur de structure** défini par

$$\begin{aligned}
 F(\vec{q}) &= \left| \sum_{i=1}^M e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_i} \right|^2 \\
 \vec{q} &= \vec{k} - k \vec{e}_r \\
 |A_{tot}|^2 &= |A|^2 F(\vec{q})
 \end{aligned}$$

où \vec{q} est le changement de vecteur d'onde pendant la diffusion. en résumé, le facteur de structure $F(\vec{q})$ donne l'intensité diffusée $I(\vec{e}_r)$ par l'assemblée d'atomes dans une direction donnée \vec{e}_r , à partir de la connaissance de l'intensité diffusée par un seul atome $|A|^2$. Ce facteur de structure tient compte des effets d'interférences entre les différents diffuseurs.

La puissance totale diffusée sur cette assemblée d'atomes est donc obtenue à partir de la puissance totale diffusée sur un unique atome (1.39)

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \left(\frac{dP_d}{d\Omega} \right) F(\vec{q})$$

2.1.2 Cas de la diffusion sur un cristal parfait (TD)

Laval p141, Jackson p418

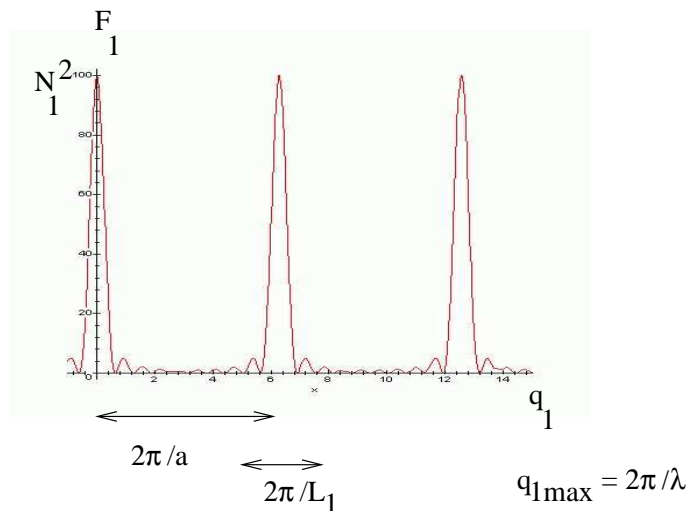
Calculons le facteur de structure $F(\vec{q})$ pour des atomes identiques disposés sur **un réseau cubique de maille a** , formant un cristal de côtés L_1, L_2, L_3 , on calcule

$$F(\vec{q}) = \prod_{i=x,y,z} \frac{\sin^2\left(\frac{L_i q_i}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{q_i a}{2}\right)}$$

preuve si les atomes sont en $x_l = l a$, avec $l = 0..N_1 - 1$, $N_1 = \frac{L_1}{a}$, et de même en y, z , alors $F = F_x F_y F_z$, avec

$$F_x = \left| \sum_{l=0}^{N_1-1} e^{i q_1 l a} \right|^2 = \left| \frac{1 - e^{i q_1 N_1 a}}{1 - e^{i q_1 a}} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{L_1 q_1}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{q_1 a}{2}\right)}$$

Remarques



- $F(\vec{q})$ a des pics lorsque **les conditions de Bragg** sont satisfaites : $q_i a = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Alors l'intensité des **pics de Bragg** est est $F = \left(\frac{L_1 L_2 L_3}{a^3}\right)^2 = M^2$, (M : nombre d'atomes). Voir figure (avec maple : bragg.mws). L'interprétation est que les interférences des diffusions sont destructrices sauf dans les directions de Bragg, où F est alors de l'ordre de M^2 . La largeur des pics de Bragg correspond à des angles $\simeq \lambda/L_i$ très petits.
- On a $\vec{q} = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u}_k - \vec{e})$ donc $0 < |\vec{q}| a < \frac{4\pi a}{\lambda}$. Donc les conditions de Bragg $n \neq 0$ ne peuvent se produire que à petite longueur d'onde $\lambda \ll a$, pour **la diffraction avec des rayons X**.
- Dans le visible, seul le pic $n = 0$ est possible, qui correspond à $\vec{k} \propto \vec{e}$ cad la direction avant. Cela explique la transparence et **la grande pureté des cristaux**.
Question : cas du verre qui est amorphe ? longueur d'atténuation=? cas des fibres optiques ?@@

2.1.3 Diffusion sur un cristal imparfait : diff Brillouin

Lavalp143-151, Kittel p61.

@@

2.2 Cas d'un milieu dilué : diffusion de la lumière dans un gaz

cf Jackson p422-427, Laval p151-160, Feynmann méca chap 32-5.

Dans un gaz dilué, les positions des atomes sont indépendantes les unes des autres, et par conséquent, en moyenne (moyenne sur une durée courte, mais assez longue pour que les atomes bougent d'une longueur d'onde) $\langle e^{i\vec{q}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Donc

$$\boxed{\langle F(\vec{q}) \rangle = M}$$

donc

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = M \frac{d\mathcal{P}_{diff. par un atome}}{d\Omega}$$

et intégré sur les directions :

$$P_{tot} = M P_{diff. par un atome}$$

qui s'interprète en disant que **les puissances s'ajoutent car les atomes diffusent indépendamment les uns des autres**.

2.2.1 Longueur d'atténuation (TD)

Jack p423, Laval p159. Chartier p602.

Considérons un volume unité de gaz. $N = \frac{M}{V}$ est la densité volumique d'atomes.

L'intensité transmise $I(x)$ du faisceau incident décroît en fonction de la longueur parcourue x puisqu'une partie est diffusée.

Considérons le faisceau incident traversant une épaisseur dx , de surface transverse unité, contenant $M = N dx$ atomes. La perte d'intensité dI correspond à la puissance diffusée

$$P_{tot} = -dI = M P_d = M \sigma_d I = \sigma_{vol} dx I$$

Soit

$$dI/I = -\sigma_{vol} dx$$

avec la **section efficace totale par unité de volume** qui est (dans le régime Rayleigh $\omega \ll \omega_0$), d'après (1.40)

$$\sigma_{vol} = N \sigma_d = \frac{N}{6\pi} k^4 |\alpha_0|^2$$

Donc après la traversée d'une épaisseur x large (somme de épaisseurs infinitésimales dx) **l'intensité transmise** diminue comme :

$$I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{\Lambda}}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sigma_{vol}} = \frac{1}{N \sigma_d}$$

où Λ qui est **la longueur d'atténuation**.

On verra en (2.27) que la polarisabilité α des atomes est reliée à l'indice n du gaz par

$$n = 1 + \frac{N\alpha}{2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\Lambda} = \sigma_{vol} = \frac{2}{3\pi} \frac{k^4 (n-1)^2}{N} \quad (2.1)$$

A cause du facteur k^4 dans σ_{vol} typique de la diffusion Rayleigh, on déduit que **le bleu est plus atténué que le rouge**.

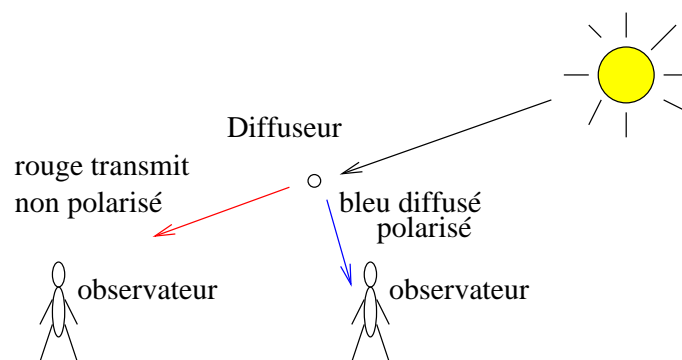
Précisément, pour l'atmosphère (cf Jack p423), $n \simeq 1 + 2.78 \cdot 10^{-4}$, $N = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ molecules/cm}^3$.

Couleur	Longueur atténuation Λ	Fraction transmise au Zenith	Fraction transmise au cou
Rouge $0,66 \mu m$	188 km	0.96	0.21
Vert $0.52 \mu m$	77 km	0.90	0.024
Bleu $0.66 \mu m$	30 km	0.76	$6.5 \cdot 10^{-5}$

En réalité l'atténuation est supérieure à cause de présence de vapeur d'eau, d'ozone, de poussières dans l'atmosphère....

Remarques cf Laval p156-160 ; Jack p422-425 ; Chartier p602.

- à partir de la formule (2.1), et de mesures de k , n , Λ , on peut déduire la valeur de N qui reflète la structure atomique, et déduire le nombre d'Avogadro. (C'est parait-il une remarque de Maxwell à Rayleigh.)
- La diffusion Rayleigh montre que sur des diffuseurs ponctuels que sont les molécules, le bleu est plus diffusé que le rouge. Cela explique pourquoi **le ciel parait bleu**, et que **le couché du soleil est rouge**. Particulièrement, un ciel couchant rouge indique que l'horizon est dégagé, et annonce donc du beau temps dans les heures qui suivent (car en France les vents dominants viennent de l'ouest).



- La **polarisation du ciel** se déduit de la figure (1.5). En effet en supposant que la lumière incidente du soleil n'est pas polarisée, il faut moyenner sur la direction du champ \vec{E} , et l'on déduit que la polarisation est nulle pour une diffusion dans la direction avant, et qu'elle est rectiligne totale, dans la direction orthogonale, car \vec{E} est dans le plan \vec{e}, \vec{p} . (la direction de polarisation du champ \vec{E} se trouve dans le plan orthogonal à la direction incidente). Tester avec un filtre polarisateur @@. Les photographes utilisent des filtres polarisants pour assombrir le ciel sur leurs photos.
- Nous avons parlé de la diffusion Rayleigh qui est le régime $\omega \ll \omega_0$ où la longueur d'onde est très grande devant la taille du diffuseur. Ce n'est pas le cas lorsque la lumière du soleil diffuse sur **les gouttes d'eau d'un nuage**. Dans ce cas (modèle de diffuseur de Mie, cf Laval p160 ; Jack p425), toutes les couleurs sont diffusées de manière comparables, et pour cela **le nuage apparait blanc**. Les objets blanc mat (comme la peinture, la neige,...) résultent aussi de ce phénomène.
- Des phénomènes plus subtils arrivent lorsque la lumière diffuse sur des objets de la taille comparable à la longueur d'onde : l'arc en ciel, ou la "gloire".
- Lorsque le milieu est assez dense, la diffusion de la lumière peut être multiple : on ne peut plus considérer que le rayonnement reçu est le résultat de la diffusion du rayonnement incident sur un centre diffuseur. Au contraire, on observe le résultat (l'interférence) de multitude de chemins qui ont subis de nombreuses diffusions.
- Effet de corrélations, Laval p154 ; Jack p425

2.3 Cas d'un milieu dense ; équations de Maxwell macroscopiques

LAval p173,

Ascro Mermin p536, Jack p226-235.

Cohen t1 p283.

Dans ce paragraphe on considère un matériau (gaz ou liquide ou cristal) de volume V . Dans ce matériau, le champ \vec{E} présente diverses origines : il est créé par le champ extérieur appliqué \vec{E}_{ext} (par exemple une onde plane incidente), mais aussi par les atomes de la matière qui sont polarisés sous l'effet de \vec{E}_{ext} .

Le but de ce paragraphe est de calculer ce champ \vec{E} , appelé **champ local microscopique**. Par définition, le **champ extérieur** \vec{E}_{ext} est le **champ qui serait présent sans la présence du matériau**.

2.3.1 Moyennisation des fluctuations microscopiques du champ

Dans la matière dense, les charges ponctuelles sont en mouvement incessant créant des variations du champ, sur des échelles de temps $10^{-12}s$ pour les noyaux, à $10^{-17}sec$ pour les électrons, et sur des échelles de distance de 1Å . Pour comprendre les effets collectifs à plus grande échelle de cette matière, nous allons **moyenner ces fluctuations sur une échelle de distance** R qui sera grande devant les distances inter-atomiques mais petites devant les longueurs d'ondes du rayonnement que l'on considèrera :

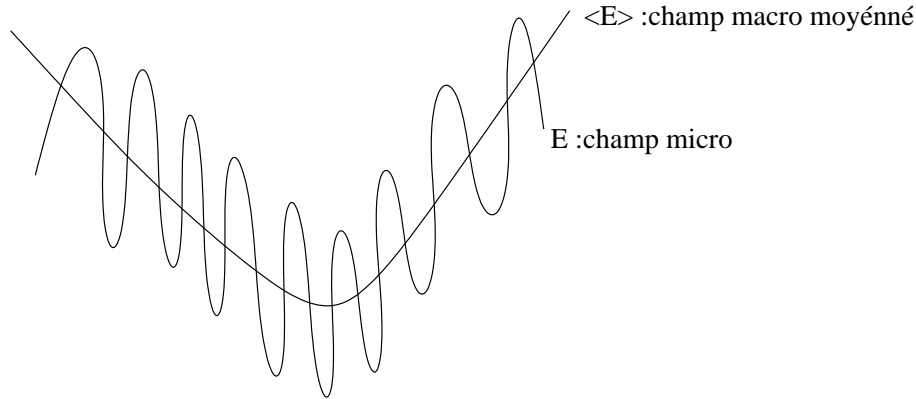
$$1 \text{Å} \ll R \ll \lambda \simeq 1000 \text{Å}$$

On notera $\langle \vec{E} \rangle(\vec{x}, t)$ le champ $\vec{E}(\vec{x}, t)$ ainsi moyenné, et de même on obtient $\langle \vec{B} \rangle, \langle \rho \rangle, \langle \vec{j} \rangle$. Voici précisément l'opération qui consiste à moyenner une fonction $f(x)$ à une dimension :

$$\langle f \rangle(x) = \int dx' f(x') w(x - x')$$

où $w(x) = \frac{1}{R\sqrt{\pi}} e^{-x^2/R^2}$ est une gaussienne d'intégrale unité.

$\vec{E}(\vec{x}, t)$ s'appelle le **champ microscopique**, et $\langle \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle$ le **champ macroscopique**.



En appliquant cette opération de moyenne aux équations de Maxwell, on remarque que **les champs moyennés vérifient aussi les équations de Maxwell**. (car ces équations sont linéaires) :

$$\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} = -\vec{rot} \langle \vec{E} \rangle \quad (2.2)$$

$$div \langle \vec{B} \rangle = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} = c^2 \vec{rot} \langle \vec{B} \rangle - \frac{1}{\epsilon_0} \langle \vec{j} \rangle \quad (2.4)$$

$$div \langle \vec{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + div \langle \vec{j} \rangle = 0 \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un champs oscillant monochromatique, cette opération n'est pertinente que si la longueur d'onde est grande devant R . Ce n'est donc **pas valable pour les rayons X**.

2.3.2 Schéma du problème ; décomposition des champs

Dans le matériau, au point \vec{x} , le champ extérieur $\vec{E}_{ext}(\vec{x})$ influence (polarise) les atomes qui créent un champ noté $\vec{E}_{interieur}(\vec{x})$. Le champ total "microscopique" est donc

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{interieur}(\vec{x})$$

Ce champ est le champ ressenti par les atomes qui sont polarisés ; Il y a donc un phénomène self-consistant :

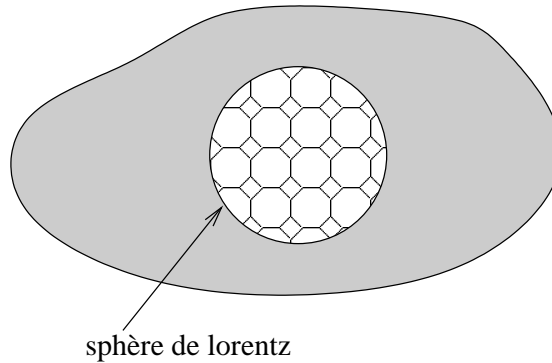
$$\vec{E}_{ext}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{interieur}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{p}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon_0 \alpha_\omega \vec{E}_\omega(\vec{x})$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \swarrow \\ & \vec{p}(\vec{x}') \text{ crée } \vec{E}_{interieur}(\vec{x}) & \end{array}$$

2.3.2.1 Simplification :

Pour estimer le champ $\vec{E}_{int}(\vec{x})$ créé par les dipôles situés en $\vec{x}' \neq \vec{x}$, on considère que ceux qui sont **loins** de \vec{x} ont une action diffuse, cad que l'on remplace ces dipôles par une distribution moyennée spatialement de dipôles.

On considère une sphère centrée en \vec{x} , de rayon R , grand par rapport aux échelles atomiques, appelée **sphère de Lorentz**. On décide que les \vec{x}' contenus dans la sphère sont proches, et ceux extérieurs sont loins.



Nous allons décomposer $\vec{E}_{interieur}$, le champ créé par ces atomes, en deux contributions :

$$\vec{E}_{interieur}(\vec{x}) = \vec{E}_{proche}(\vec{x}) + \vec{E}_{loin}(\vec{x})$$

\vec{E}_{proche} est le champ créé par les atomes voisins contenus dans la sphère, et dépend donc fortement de la configuration locale du matériau (structure du cristal par exemple).

\vec{E}_{loin} est le champ créé par les atomes en dehors de cette sphère. A cause de la distance, la structure atomique ne joue plus et on peut considérer la valeur moyennée qui est créée par la distribution moyennée des dipôles.

Définition : La polarisation $\vec{P}(\vec{x})$ est la densité volumique de moments dipolaires, moyennée spatialement :

$$\vec{P}(\vec{x}) = \left\langle \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \right\rangle$$

Comme exemple simple, si les moments dipolaires \vec{p} sont identiques, et qu'il y en a $N(\vec{x})$ par unité de volume, alors

$$\boxed{\vec{P}(\vec{x}) = N(\vec{x}) \vec{p}} \quad (2.7)$$

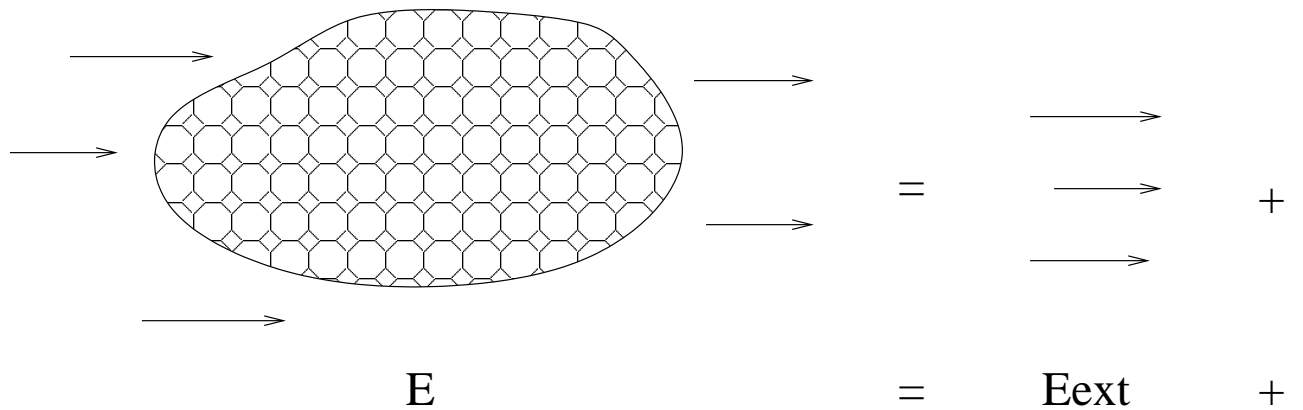
Définition : On notera $\vec{E}_{depolarisation}$ le champ créé par une distribution $\vec{P}(\vec{x})$ moyennée de dipôles, et appelé **champ de dépolarisation**. (Justification du nom, voir plus loin).

Par contre on tient en compte la position précise des dipôles proches de \vec{x} , situés par exemple sur un réseau cristallin.

On a alors la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{interieur}(\vec{x}) \\ &= \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{inter.loin}(\vec{x}) + \vec{E}_{inter.proche}(\vec{x}) \\ &\simeq \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{depol,(Vol-Sphere)}(\vec{x}) + \vec{E}_{proche}(\vec{x}) \\ &= \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{depol,(Vol)}(\vec{x}) - \vec{E}_{depol,Sphere}(\vec{x}) + \vec{E}_{proche}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Cette décomposition est illustrée sur la figure suivante.



Propriétés :

1. Dans le cas d'un **crystal cubique**, si \vec{x} est **positionné sur un atome du crystal**, alors

$$\vec{E}_{proche} = \vec{0} \quad (2.9)$$

dém : Kittel p406. Jackson p153. Par raison de symétrie. Pour un autre crystal, il peut en être autrement. Mais la relation (2.9) est aussi valable pour un liquide (@@? ?)(cf Feynmann 32.28, et 11.24 p187, Jackson p154).

2. On verra à la section suivante que

$$\vec{E}_{depol-sphere} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

3. Remarquons que

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle &= \langle \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{interieur}(\vec{x}) \rangle \\ &= \vec{E}_{ext}(\vec{x}) + \vec{E}_{depol,(Vol)}(\vec{x}) \end{aligned}$$

(attention de ne pas moyenner la dernière ligne de (??) car on ne connaît ses termes que pour les valeurs de \vec{x} sur un atome.)

On déduit dès à présent, des relations ci-dessus, que dans le cas d'un **crystal cubique**, si \vec{x} est **positionné sur un atome du crystal**, alors

$$\boxed{\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} : \text{relation de Lorentz}} \quad (2.10)$$

cette relation montre que par rapport au champ macroscopique moyenné, le champ microscopique a une fluctuation d'amplitude $\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ à l'emplacement d'un atome, dans un crystal cubique (Cette fluctuation sera donc d'amplitude opposée entre les atomes, et à cet endroit $\vec{E}_{proche} \neq \vec{0}$).

Dans l'étude précédente, seuls les champs \vec{E} et \vec{E}_{proche} ne sont pas moyennés, et fluctuent à l'échelle de l'atome.

2.3.3 Propriétés macroscopiques à partir des propriétés microscopiques : relation de Clausius-Mossotti

Notons \vec{p} le moment dipolaire d'un atome (ou molécule) situé en \vec{x} . Rappelons que dans le cas d'un atome sans moment dipolaire permanent, ce moment dipolaire est induit par le champ électrique local (1.26) :

$$\boxed{\vec{p}_\omega(\vec{x}) = \epsilon_0 \alpha_\omega \vec{E}_\omega(\vec{x})} \quad (2.11)$$

On déduit que $\vec{P}_\omega(\vec{x})$ doit être proportionnel à $\langle \vec{E}_\omega(\vec{x}) \rangle$, et on définit la **susceptibilité diélectrique** par :

$$\vec{P}_\omega(\vec{x}) = \epsilon_0 \chi_\omega \langle \vec{E}_\omega(\vec{x}) \rangle \quad (2.12)$$

$$\chi : \text{susceptibilité dielectrique} \quad (2.13)$$

nous allons chercher à relier χ_ω et α_ω .

Remarque : il est faux de dire que $\vec{P}_\omega(\vec{x}) = \epsilon_0 \langle N(\vec{x}) \alpha_\omega \rangle \langle \vec{E}_\omega(\vec{x}_i) \rangle$.

En utilisant, les résultats cidessus, on déduit une relation entre χ et α , appelée **relation de Clausius Mossotti**

$$\frac{\chi_\omega}{1 + \frac{1}{3}\chi_\omega} = N \alpha_\omega \quad (2.14)$$

ou encore

$$\chi_\omega = \frac{N \alpha_\omega}{1 - \frac{N \alpha_\omega}{3}}$$

Cette relation relie le paramètre microscopique polarisabilité α (caractérisant les atomes) avec le paramètre macroscopique (susceptibilité) χ caractérisant la réponse du matériau au champ appliqué.

Vérification expérimentale. cf Kittel p411, Feynammn EM1 p189.

Cas molécule polaire H2O, cf rem EM1 p189.

Cas d'un milieu dilué dans un milieu dilué comme un gaz de faible densité N , la relation de Clausius Mossotti se simplifie et donne au premier ordre :

$$\chi_\omega = N \alpha_\omega$$

cela correspond aussi à négliger $\vec{P} = n \vec{p}$ dans le relation de Lorentz (2.10), et à considérer donc que le champ microscopique \vec{E} agissant sur un atome, est égal au champ macroscopique $\langle \vec{E} \rangle$. Autrement dit, si le milieu est dilué, le champ créé par les atomes voisins est négligeable.

2.3.3.1 Les différents types de polarisabilité dans un matériau

On déduit la courbe de χ_ω à partir de celle de $\alpha(\omega)$. (??)
cf Courbe Kittel p410.

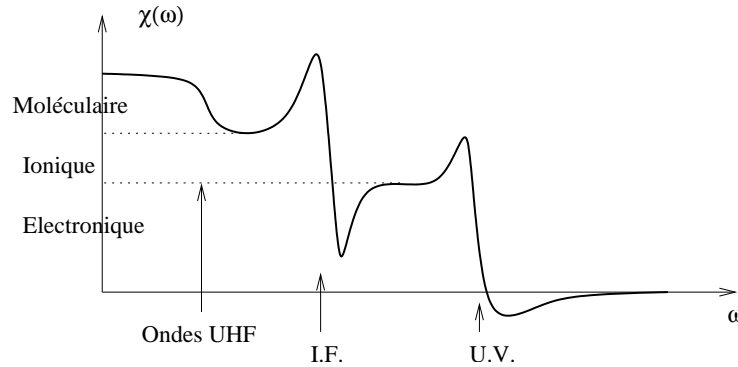


FIG. 2.2 –

2.3.4 Champ de dépolarisation, charges et courants de polarisation

2.3.4.1 Champ de dépolarisation, et charges de polarisation

Les dipôles de la matière sont responsables d'une partie du champ électrique présent \vec{E} .

Propriété :

Le champ \vec{E}_{depol} s'interprète comme étant créé par **des charges de polarisation de volume**

$$\rho_{pol} = -div\vec{P}$$

et **charges de polarisation de surface**

$$\sigma_{pol} = \vec{n} \cdot \vec{P}$$

(où \vec{n} est le vecteur normal à la surface de l'objet).

Preuve (TD) : (Kittel note 2 p402)

Le potentiel créé en O par un dipôle $\vec{p} = qd\vec{x}$ placé en x est (Feyn, EM1, 6-2)

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot grad\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)$$

remarque : il y aurait un signe (-) pour le potentiel créé en x par un dipôle situé en 0.

(cela s'obtient d'après le principe de superposition pour deux charges proches : $V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{x}+d\vec{x}|} - \frac{q}{|\vec{x}|} \right) = \frac{q d\vec{x}}{4\pi\epsilon_0} grad\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)$, car $f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = grad(f) \cdot d\vec{x}$.)

Donc pour une distribution volumique de polarisation $\vec{P}(\vec{x})$, d'après (A.4) :

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{x} \vec{P} \cdot grad\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{x} \left(div\left(\frac{1}{|\vec{x}|} \vec{P}\right) - \frac{1}{|\vec{x}|} div(\vec{P}) \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d^2s \vec{n} \cdot \vec{P} \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\vec{x}|} (-div(\vec{P})) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d^2s \sigma_{pol} \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\vec{x}|} \rho_{pol} \end{aligned}$$

2.3.4.2 Courant de polarisation

Si $\vec{P}(\vec{x}, t)$ varie au cours du temps, les charges ρ_{pol} engendrent un courant de polarisation

$$\boxed{\vec{j}_{pol} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \quad (2.15)$$

preuve : Avec (2.7) et (1.1), on a $\vec{P} = Nq\vec{x}$ et $\vec{j} = Nq\frac{d\vec{x}}{dt}$, voir Feynmann 32.10 , Laval p50,p178.

$$\text{car } div(\vec{j}_{pol}) + \frac{d\rho_{pol}}{dt} = 0.$$

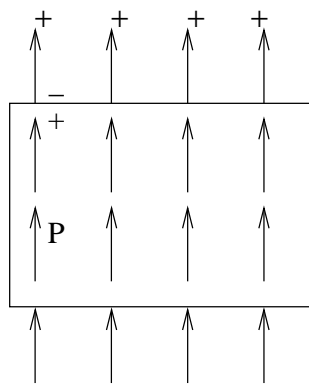
2.3.4.3 Illustration

Cohen T1 p283, Feynmann 32.9 p220, 10.16 p172.

Pour comprendre plus intuitivement le résultat précédent, pourquoi un champ de dipole est responsable d'une distribution de charges moyenne, considérons :

- le cas simple d'une polarisation \vec{P} homogène due à des dipoles identiques $p = qX$, et si \vec{P} est orthogonale aux faces d'un cube, et nulle à l'extérieur du cube, il y a des charges de surface qui sont $\sigma_{pol} = NqX = P$. Plus généralement, près de la surface de normale \vec{n} , il y a des **charges de surfaces** de densité

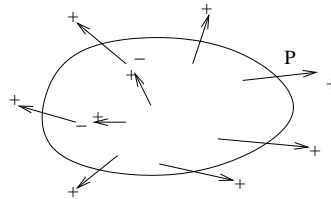
$$\sigma_{pol} = \vec{n} \cdot \vec{P} \quad (2.16)$$



- Dans le cas plus général où $\vec{P}(\vec{x})$ n'est pas uniforme, il y a une distribution volumique de charges de polarisation $\rho_{pol}(\vec{x})$:

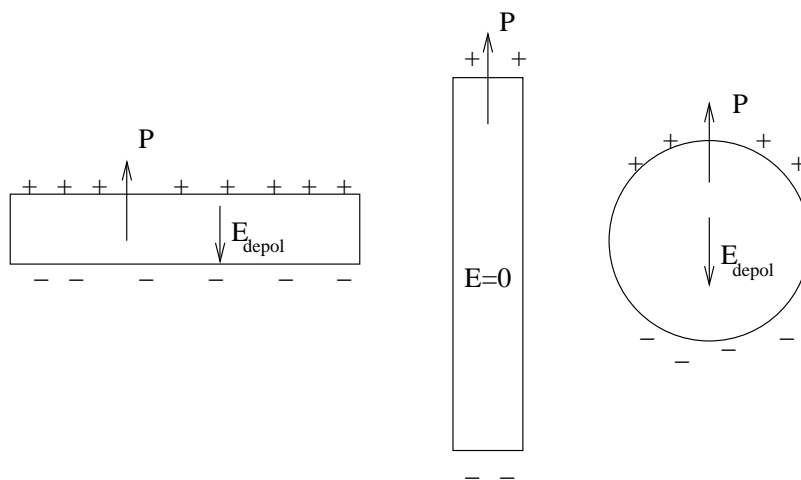
$$\rho_{pol}(\vec{x}) = -div(\vec{P}) \tag{2.17}$$

preuve : dans un volume V , la charges totale est $Q_{pol} = - \int_{surf} \sigma_{pol} \cdot d^2s = - \int_{surf} \vec{P} \cdot \vec{n} d^2s = - \int_V d^3\vec{x} div(\vec{P})$, or $Q_{pol} = \int_V d^3\vec{x} \rho_{pol}(\vec{x})$.



Exemples (TD)

- Par exemple, si la polarisation \vec{P} est uniforme dans le volume V (et nulle en dehors), alors $\rho_{pol} = 0$, et le champ \vec{E}_{depol} créé par \vec{P} en un point \vec{x} est égal au champ créé seulement par des charges de surface au volume V , de densité surfacique : $\sigma_{pol} = \vec{n} \cdot \vec{P}$, eq.(2.16).



- en particulier, à l'aide du théorème de Gauss, et symétries, pour une tranche (très) fine, orthogonale à \vec{P} , on trouve (TD, Feyn 5-6)

$$\vec{E}_{depol} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

- pour une tranche (très) fine, parallèle à \vec{P} , on trouve (TD)

$$\vec{E}_{depol} = \vec{0}$$

- Pour une sphère, on trouve (TD)

$$\vec{E}_{depol} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \tag{2.18}$$

preuve partielle (1) : en coordonnées sphériques, $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$, et $E_z = -|\vec{E}| \cos \theta$, donc au centre de la sphère

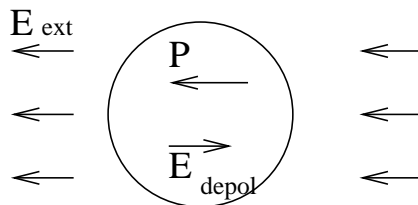
$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^2s \sigma_{pol} \frac{1}{R^2} \cos \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int (d\theta d\varphi \sin \theta R^2) (P \cos \theta) \cos \theta = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

car $\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$. Mais on n'a pas montré que \vec{E} est uniforme.

preuve totale (2) : (Feynmann EM1 6-4) : On remplace la sphère par deux sphères superposées décalées de dz , chacune étant chargée uniformément, de densité de charge respective ρ et $-\rho$. Alors la charge résultante est nulle à l'intérieur, et en surface elle vaut $\sigma_{pol} = \rho dz \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{n}$ avec $\vec{P} = \rho d\vec{z}$. Pour la sphère de charge ρ , d'après la loi de Gauss, le champ interne est $\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$. Le potentiel interne est donc $V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2$. Le champ externe est celui créé par une charge ponctuelle $Q = V\rho$. D'après le principe de superposition, le potentiel résultant à l'intérieur est $V_{tot}(\vec{x}) = V(\vec{x} - d\vec{z}) - V(\vec{x}) = -grad(V) \cdot d\vec{z} = +\frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r \cdot d\vec{z} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} z dz = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$. Le champ électrique est donc uniforme et vaut $E_z = -\frac{P}{3\epsilon_0}$.

- Plus généralement : **Propriété :** (cf Kittel) Si V est un ellipsoïde, et si \vec{P} est uniforme dans V et nul en dehors, alors \vec{E}_{depol} est uniforme dans V .

Remarquons que dans le cas d'une sphère diélectrique par exemple, si le champ \vec{E}_{ext} est statique, il induit un champ de polarisation \vec{P} parallèle et dans la même direction (d'après 1.28), et donc le champ de dépolarisation \vec{E}_{depol} créé par les dipôles induits, est opposé à \vec{E}_{ext} , ce qui explique son nom.



2.3.5 Equations de Maxwell macroscopiques

Voici en résumé les équations de l'électromagnétisme dans un matériau.

Décomposons tout d'abord la densité moyenne de charge $\langle \rho \rangle$ dans le matériau en charges libres et charges de polarisation :

$$\langle \rho \rangle = \rho_{libre} + \rho_{polar} = \rho_{libre} - \text{div} \vec{P}$$

Les **charges libres** correspondent aux porteurs libres dans un métal ou un semi-conducteur, alors que les **charges de polarisations** définies en (2.17), est la densité de charge apparaissant par effet de polarisation des molécules.

De même,

$$\langle \vec{j} \rangle = \vec{j}_{pol} + \vec{j}_{autres} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{j}_{autres}$$

Le second groupe des équations de Maxwell moyennées (??) donnent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} &= c^2 \vec{rot} \langle \vec{B} \rangle - \frac{1}{\epsilon_0} \langle \vec{j} \rangle \\ \text{div} \langle \vec{E} \rangle &= \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(-\text{div}(\vec{P}) + \rho_{libre} \right) \end{aligned}$$

soit en posant

$$\vec{D} = \epsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \vec{P}$$

On obtient le **premier et second groupe d'équ de Maxwell macroscopique** :

$$\frac{\partial \langle \vec{B} \rangle}{\partial t} = -\vec{rot} \langle \vec{E} \rangle \quad (2.19)$$

$$\text{div} \langle \vec{B} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{libre} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 c^2 \vec{rot} \langle \vec{B} \rangle - \vec{j}_{autres} \quad (2.22)$$

On a : $\text{div} \vec{j}_{autres} = \text{div} \langle \vec{j} \rangle - \frac{d \text{div}(\vec{P})}{dt} = -\langle \dot{\rho} \rangle + \dot{\rho}_{pol} = -\dot{\rho}_{libre}$ donc

$$\text{div} \vec{j}_{autres} = -\dot{\rho}_{libre}$$

Remarques :

- L'intérêt de la définition de \vec{D} est qu'il n'y a plus de référence à la polarisation, qui est le phénomène microscopique. C'est aussi pourquoi historiquement, les équations de "Maxwell macroscopiques" sont d'abord apparues.
- \vec{j}_{autres} contient le courant des charges libres \vec{j}_{libre} et un courant de magnétisation \vec{j}_{magn} , voir Cohen T1 p283. @@, Feynmann EM2 36-1. *On supposera ici que les effets magnétiques sont négligeables.* on pose aussi (en supposant les effets magnétiques négligeables)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \frac{c^2}{\epsilon_0} \vec{B}$$

2.3.5.1 Relations constitutives

Il est convenu de définir la permittivité di-électrique ϵ_ω par les relations constitutives qui relient les champs $\langle \vec{E} \rangle$ et \vec{D}

$$\epsilon_\omega \langle \vec{E}_\omega \rangle = \vec{D}_\omega$$

donc ϵ est relié à la susceptibilité χ par

$$\epsilon_\omega = \epsilon_0 (1 + \chi_\omega)$$

et la relation de Clausius Mossotti (2.14) reliant ϵ avec le paramètre microscopique (polarisabilité) α s'écrit aussi :

$$\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} = \frac{(N\alpha)}{2} \tag{2.23}$$

Remarque : dans un cristal non isotrope, ϵ_ω est en fait un tenseur.

2.3.6 Champ à la frontière de deux diélectriques (*)

cf Jackson, Laval, cf notes

2.4 Propagation des ondes dans la matière

Feynmann EM2 chap 32.

=====

TD : indice d'un mélange, fynamm EM2 p227.

TD : largeur des raies pour résistance au rayonnement, Feyn chap32-3, eq.(32.13)

=====

2.4.1 Equation de Helmholtz

A partir des équations de Maxwell macroscopiques (2.20,2.21), on déduit que pour une onde monochromatique de fréquence ω , et dans un milieu **sans charge** $\rho_{libre} = 0$, $j_{autre} = 0$, on obtient

$$\frac{-\omega^2}{c^2} \mathbf{D}_\omega = \varepsilon_0 \text{rot}(\dot{\mathbf{B}}) = -\varepsilon_0 \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E}))$$

donc

$$\text{rot rot } \vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_0} \vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) = \vec{0}$$

(où rappel : $\vec{E}(\vec{x}, t) = \Re(\vec{\mathbf{E}}_\omega e^{-i\omega t})$).

On suppose aussi que **le milieu est homogène**. Alors ε_ω ne dépend pas de \vec{x} . et

$$\text{div}(\vec{E}) = \text{div}\left(\frac{1}{\varepsilon} \vec{D}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}(\vec{D}) = 0$$

. On obtient **l'équation de Helmholtz** ou **équation des ondes**

$$\Delta \vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) + \frac{\omega^2 \varepsilon_\omega}{c^2 \varepsilon_0} \vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) = 0 : \quad \text{équation de Helmholtz} \quad (2.24)$$

Comme il s'agit d'une équation linéaire en $\vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x})$, à coefficients constants, on cherche des solutions sous forme d'ondes planes (1.17), i.e. $\vec{\mathbf{E}}_\omega(\vec{x}) = \vec{\mathbf{E}}_{\omega, \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}$. On écrit

$$\vec{k} = k \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire réel. Cela donne :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_0}}$$

d'après (2.20), $\vec{\mathbf{B}}$ est donné par

$$\vec{\mathbf{B}}_{\omega, \vec{k}} = \frac{k}{\omega} (\vec{u} \wedge \vec{\mathbf{E}}_{\omega, \vec{k}})$$

et donc \vec{u} , $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ sont orthogonaux.

2.4.2 Atténuation de l'onde

Feynmann mécanique chap 31-4.

Mais attention que ε est en général complexe, et donc il sera de même pour k . On décompose :

$$k = k' + ik''$$

k', k'' sont donc donnés par

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Re \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \quad (2.25)$$

$$2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \Im \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \quad (2.26)$$

ces équations relient k', k'' et ω .

donc si $\vec{\mathbf{E}}_{\vec{k}, \omega}$ est réel (pour éviter la discussion sur la polarisation),

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \left| \vec{\mathbf{E}}_{\vec{k}, \omega} \right| e^{-k'' \vec{u} \cdot \vec{x}} \cos(k' \vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

– montrant que la **vitesse de phase** est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

et la **longueur d'onde**

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'}$$

et que l'onde est atténuée dans le milieu sur une **longueur d'atténuation** de l'ordre de

$$\Lambda \simeq 1/k''$$

(on retrouve 2.1)@@?

- Si $k'' = 0$, le **milieu est transparent**.
- **La vitesse de groupe** est (@@ montrer)

$$v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk'}$$

et peut dépendre de la fréquence. La vitesse de groupe correspond à la vitesse de déplacement d'un paquet d'onde (et donc de l'énergie). Si $v_g(\omega)$ n'est pas constant, le paquet d'onde peut s'étaler au cours de sa propagation. Pour cette raison, on appelle les relations (2.25), **relations de dispersion**.

- Si $k'' \ll k'$ cad si $\Lambda \gg \lambda$, alors (Jackson p287)

$$k' \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\Re \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}$$

$$k'' \simeq k' \frac{\Im(\varepsilon)}{\Re(\varepsilon)}$$

qui montre que pour un milieu faiblement absorbant,

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\Re(\varepsilon)}{\Im(\varepsilon)}$$

qui est le rapport entre la longueur d'atténuation et la longueur d'onde.

2.4.3 Indice de réfraction

Laval p188-191, Jackson p284-298,p271.

Interpréter l'indice comme un retard @@.cf feynmann méca chap 31-2.

On définit l'**indice de réfraction** par

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1 + \chi_\omega} = \frac{c}{\omega} k$$

ainsi l'équation de Helmholtz (2.24) s'écrit

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \vec{\mathbf{E}} = 0$$

Remarques :

- l'indice n qui est sans dimension mesure la vitesse de phase

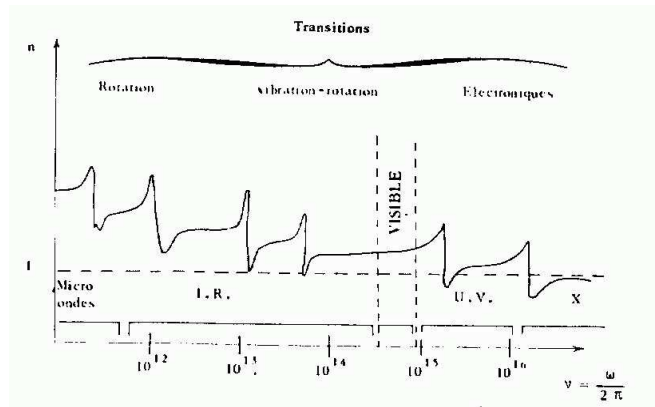
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

par rapport à la vitesse de la lumière. Donc en général $n = \frac{c}{v_\varphi} < 1$. (exception possible, car une vitesse de phase ne correspond pas à une vitesse de transport d'information, donc il est possible que $v_\varphi > c$).

- Dans un large domaine de fréquences ω , on peut négliger la partie complexe de ε . En effet ϵ est relié à α par (2.23), et α est réel sauf près des résonnances, voir figure (1.4). Dans ce cas l'indice est aussi réel.
- Pour un **gaz dilué**, on a $\chi_\omega \simeq N\alpha_\omega \ll 1$, et donc

$$n_\omega \simeq 1 + \frac{N\alpha_\omega}{2} \quad (2.27)$$

- L'allure de $\Re(n(\omega))$ se déduisant de $\Re(\alpha)$ est la suivante : Laval p192, feynmann chap31-3.



- Interprétation : si $k'' = 0$, on a $v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{c}{\omega \frac{dn}{d\omega} + n}$ Lorsque $n(\omega)$ est croissante, c'est une dispersion dite normale. Et si $dn/d\omega < 0$, on peut avoir $v_g < 0$, donnant une vitesse de groupe négative. Voir Jackson @@.
- Rappel : La valeur de l'indice $n \neq 1$, explique la réfraction et la réflexion de l'onde à une interface (si changement d'indice) ; voir figure feynmann méca chap 31-1 ; Loi de Ibn Sahl (le Caire, Xeme siècle, et plus tard Descartes, ou Snell XVIIeme) $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.
- Près des résonances de $n(\omega)$, k'' est important ; cela explique les **raies d'absorption** du soleil, qui permette de déduire la composition chimique de l'atmosphère solaire. Rem : la largeur de la raie est $\Delta\lambda = 2\pi c \Delta\omega / \omega^2 = 2\pi c \gamma / \omega_0^2$, est donc relié à γ qui intervient dans (1.24).
- Rem (*) : dans les domaines de dispersion normale, on peut montrer (par D.L.) la **loi empirique de Cauchy** (cf chartier p437) pour les milieux dont les raies d'absorption sont dans l'UV

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

et la **loi de Briot** pour les milieux dont les raies d'absorption sont dans l'UV et l'infra rouge (c'est le cas de l'eau, voir plus loin)

$$n = -A'\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

2.4.4 Ondes dans un métal

ref : Feynmann EM2 32-6. Jackson p287

L'analyse précédente est basée sur l'effet du champ électrique sur les électrons liés d'un matériau. c'est tout à fait valable pour un isolant (appelé aussi **diélectrique**). Mais **pour un métal, l'effet dominant du champ électrique sera sur les électrons libres**, qui ne sont pas attachés à un atome. Il faut modifier l'étude précédente.

La première modification est que au lieu de subir l'effet du champ local microscopique dans (2.11), un électron libre se déplaçant sans cesse, il subit l'effet du champ moyenné, dit macroscopique, et donc :

$$\vec{p}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon_0 \alpha_\omega \langle \vec{\mathbf{E}}_\omega \rangle(\vec{x})$$

On en déduit que au lieu de la relation de Clausius Mossotti (2.14), on a :

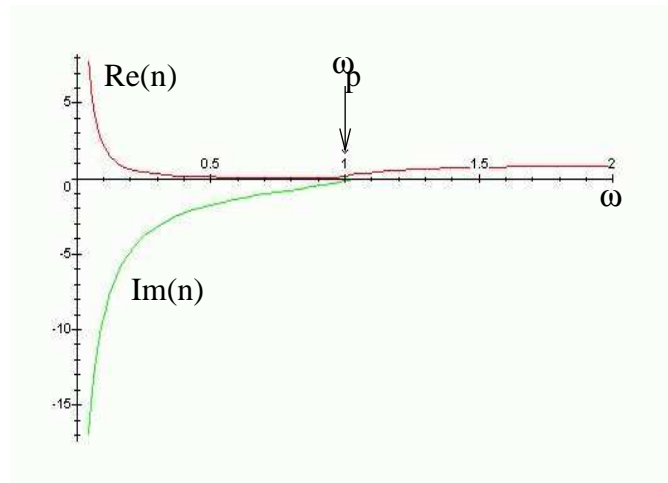
$$\chi = N \alpha$$

), mais avec une "raideur" $k = 0$, donnant $\omega_0 = 0$, et donc

$$\alpha_\omega = \frac{(e^2/4\pi\varepsilon_0)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{(e^2/4\pi\varepsilon_0)}{m\omega(-\omega - i\gamma)}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2 = 1 + N\alpha = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi m i \omega (i\omega - \gamma)} \quad (2.28)$$

Erreur : redresser Im(n) @@ :



2.4.4.1 Modèle de Drude

cf Jackson p296.

Dans un premier point de vue, avec les equations de Maxwell macroscopiques ci-dessus,

les courants de polarisation sont pris en compte par la permittivité ε et $j_{libre} = 0$:

$$rot \vec{\mathbf{B}} = \frac{-i\omega\varepsilon}{c^2} \vec{\mathbf{E}}$$

Dans le deuxième point de vue, (Modèle de Drude) supposons que la constante diélectrique est $\varepsilon = \varepsilon_0$, et que les effets de courants de polarisation sont dus à la conductivité σ :

$$\vec{j}_\omega = \sigma_\omega \vec{E}_\omega$$

Les équations de Maxwell donnent alors

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} (\sigma - i\omega\varepsilon_0) \vec{E}$$

Ces deux points de vue sont équivalents si :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}$$

La comparaison avec l'expression (??) donne le comportement de la conductivité à basses fréquences, du modèle de Drude, reliant le coefficient de frottement $\gamma = 1/\tau$ à la conductivité mesurée σ :

$$\sigma_\omega = \frac{Ne^2}{4\pi m(\gamma - i\omega)}$$

et donc

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma_0}{i4\pi\varepsilon_0\omega(1 + i\omega\tau)}$$

qui est une formule utile pour les métaux.

2.4.4.2 A basse fréquences : effet de peau

Jackson p296, Feynmann 32-6.

Pour $\omega \ll 1/\tau$ et $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0$, alors avec la conductivité de Drude à $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{Ne^2}{4\pi m\gamma} = \frac{Ne^2\tau}{4\pi m}, \\ \tau &= 1/\gamma \end{aligned}$$

on obtient :

$$n^2 \simeq i \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0\omega}$$

soit

$$n \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{24\pi\varepsilon_0\omega}} (1 + i)$$

l'épaisseur de peau est donc

$$\Lambda = \frac{1}{k''} = \frac{c}{n''\omega\sqrt{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{24\pi\varepsilon_0 c^2}{\sigma\omega}}$$

A.N. : Pour le cuivre, et des micro-ondes, $\omega \simeq 10\text{GHz}$, $\Lambda \simeq 7.10^{-4}\text{cm}$ cf Feynmann p233.

Rem : à freq 50Hz, $\Lambda = \dots$, donc le courant ne passe que à la surface des gros cables. @@

2.4.4.3 A hautes fréquences : freq. plasma

Feynmann p233, Jackson p288

Remarque : le paragraphe suivant est aussi valable pour les diélectriques (isolants). La différence conducteur-isolant, cad électron libre-lié ne se fait sentir qu'à basse fréquence par un pôle de la fonction $\varepsilon(\omega)$ en $\omega = 0$.

Si $\omega \gg 1/\tau$, alors

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

avec la fréquence plasma

$$\omega_p = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$$

Tracer $Im(n)(\omega)$, $Re(n)(\omega)$ @@

Conséquences

- si $\omega < \omega_p$, alors l'indice a une partie imaginaire et les ondes sont amorties. C'est le cas des métaux dans le visible. On fait des lunettes de protection, en évaporant une mince couche de métal (or) sur du verre.
- Si $\omega > \omega_p$, l'indice est réel est le métal est transparent. C'est le cas des métaux dans les rayons X, ou ultra-violet @@. Exemple Pour Na, $\lambda_p = 0.2 \cdot 10^{-7} \text{Å}$.

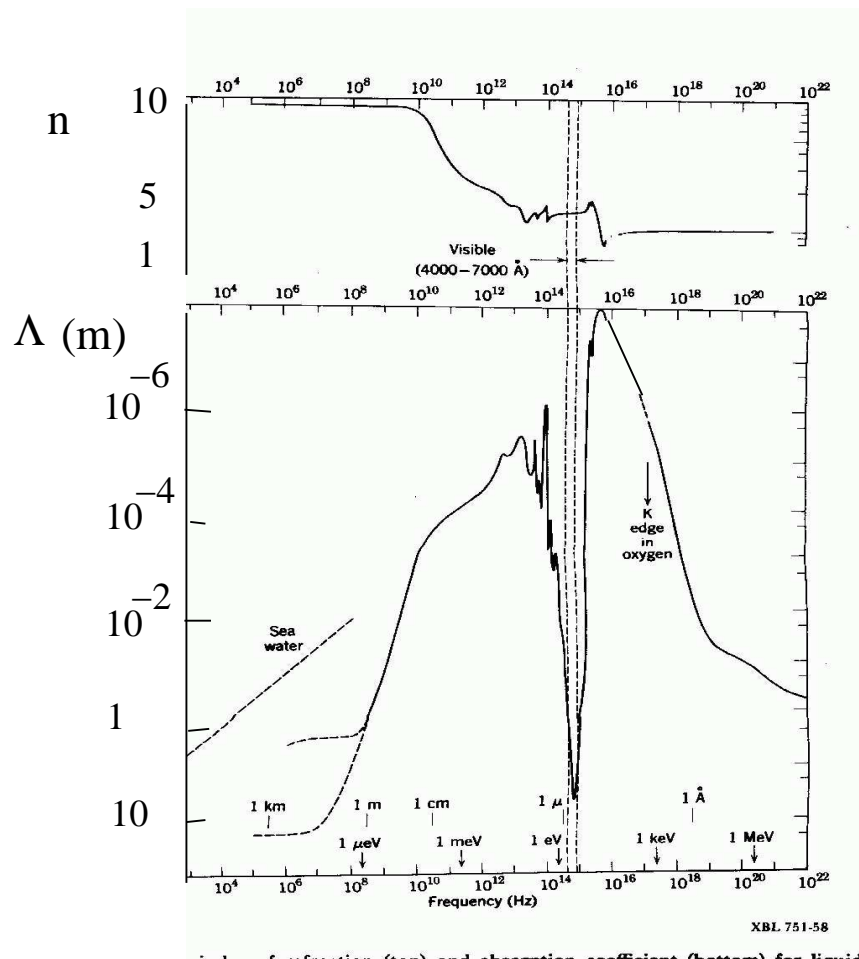
Remarques

- Même comportement pour les ondes dans l'ionosphère avec la densité de charges N qui est plus faible que dans un métal, et donc ω_p plus faible aussi, (ou dans l'atmosphère d'une étoile) : **Les ondes longues sont réfléchies, les ondes courtes traversent** l'ionosphère (utilisées pour communiquer avec les satellites).
- La vitesse de groupe est nulle en $\omega = \omega_p$, car $dn/d\omega = 0$, et augmente ensuite. Cela se manifeste pas "les sifflements" (cf Jackson p295) : lorsqu'il y a un éclair, il émet des ondes elect-magn, qui se réfléchissent entre le sol et la ionosphère ; l'intensité se reconcentre aux anti-podes de l'éclair. Les basses fréquences ($\omega \simeq \omega_p$) arrivent qqes secondes après les hautes fréquences. On entend donc un sifflement dans un poste de radio des aigues vers le grave.

2.4.4.4 Exemple de l'eau

ref : Jackson p291.

Schéma de l'indice $n(\omega)$ et de la longueur d'absorption $\Lambda(\omega)$:



Commentaires :

- Indice $n \simeq 9$) : longueur de pénétration $\Lambda \simeq 10m$. Utilisée pour la communication avec les sous marins.
- Forte absorption micro-ondes (utilisation : four).
- Forte absorption I.F. (à cause de la structure vibrationnelle).
- Fenêtre dans le visible spécifique à l'eau. Cela a-t-il eu comme conséquences que les yeux des mammifères (dont les origines sont des espèces marines) sont sensibles dans le visible?
- Absorption U.V., fréquence plasma.

Annexe A

Formulaire

références : Jackson, début et fin.

$f(\vec{x})$ représente une fonction. $\vec{V}(\vec{x})$ représente un champ de vecteurs.

A.0.4.5 Rappels sur le calcul différentiel vectoriel.

Voir Feynmann "Electromagnétisme", chap 2.

si $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ sont les coordonnées du champ vectoriel $\vec{E}(\vec{x})$, alors le champ $\vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}W_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\W_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\W_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\end{aligned}$$

on s'en rappelle en écrivant : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ avec "l'opérateur vectoriel" $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Et $\text{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$, qui se retient en écrivant $\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

Pour un champ scalaire $V(x, y, z)$, le champ vectoriel $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}V$ a pour coordonnées : $W_x = \frac{\partial V}{\partial x}, W_y = \frac{\partial V}{\partial y}, W_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. On écrit aussi : $\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V$.

Le laplacien ΔV est le champ scalaire : $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Propriétés importantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \vec{0} \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= 0 \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \Delta V \\ \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}\end{aligned}$$

Formules de Stokes Si γ est un chemin dont a, b sont les extrémités, alors

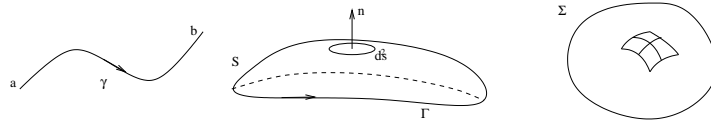
$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

Si S est une surface dont γ est le contour, alors

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot \vec{n} d^2s = \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

Si V est un volume dont le bord est la surface $S = \partial V$, alors

$$\int_V \text{div}(\vec{V}) d^3v = \int_{\Sigma=\partial V} \vec{V} \cdot \vec{n} d^2s$$



A.0.4.6 En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = (\partial_r f) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta f\right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi f\right) \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.1})$$

A.0.4.7 Analyse vectorielle :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} (\text{div} \vec{b}) - \vec{b} (\text{div} \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\text{div}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{b}) \quad (\text{A.2})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{V} + f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{div}(f \vec{a}) = \text{grad}(f) \cdot \vec{a} + f \cdot \text{div}(\vec{a}) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{div}(\vec{e}_r) = \frac{2}{r}$$

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{e}_r = \frac{1}{r} (\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r) \equiv \frac{\vec{a}_\perp}{r}$$

Bibliographie