Modèle pour l'effet Hall Quantique entier.

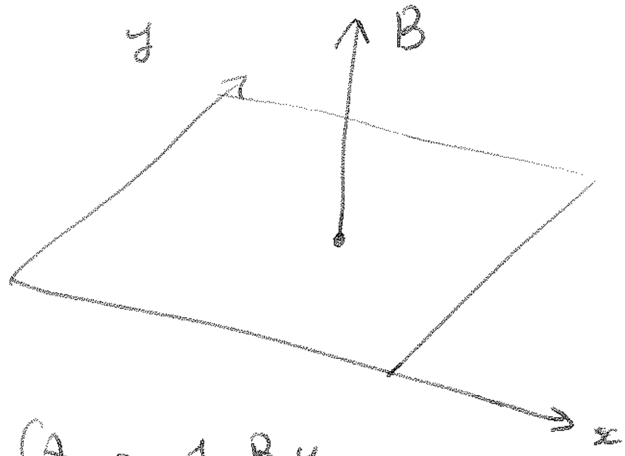
(*) : questions optionnelles

I NIVEAUX DE LANDAU

On considère des électrons libres sans interaction, confinés dans le plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Il y a un fort champ magnétique B orthogonal (selon z)

ex : $B = 0{,}2$ Tesla



(1) Montrer que $\vec{A} = \begin{cases} A_x = -\frac{1}{2} B.y \\ A_y = \frac{1}{2} B.x \\ A_z = 0 \end{cases}$

satisfait $\overrightarrow{rot}\, \vec{A} = \vec{B}$

On note $\vec{p} = (p_x, p_y)$

Donner l'expression de $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2$

(le Hamiltonien)

à partir de (x, p_x, y, p_y).

L'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$

② Pour simplifier, on effectue le changement de variable :

9 $$(x, p_x, y, p_y) \longrightarrow (Q, P, q, p)$$

avec :

10 $$Q := \frac{1}{\sqrt{\hbar e B}}\left(p_x + \frac{eB}{2}y\right)$$

$$P := \frac{1}{\sqrt{\hbar e B}}\left(p_y - \frac{eB}{2}x\right)$$

11 $$q := \frac{1}{eBX}\left(p_x - \frac{eB}{2}y\right)$$

$$p := \frac{-1}{eBX}\left(p_y + \frac{eB}{2}x\right)$$

12 avec $X^2 = \dfrac{2\pi\hbar}{eB}$ (ainsi le flux : $BX^2 = \dfrac{2\pi\hbar}{e}$)

Montrer que X est une longueur (calculer X si $B = 0{,}2\ \mathrm{T}$.)

et montrer que (Q, P, q, p) sont sans dimension, et :

13 $$\left[\hat{Q}, \hat{P}\right] = i$$

$$\left[\hat{q}, \hat{p}\right] = \frac{i}{2\pi}$$

3) Déduire l'expression de H en fonction de (Q, P, q, p) et déduire son spectre.

1 Les niveaux d'énergie sont appelés "niveaux de Landau" : E_n, $n \in \mathbb{N}$.

2 On posera : $\omega = \dfrac{eB}{m}$

. Interprétation classique, à partir des trajectoires cyclotron ?

Noter que l'espace de Hilbert se décompose :

3 $$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_Q) \otimes L^2(\mathbb{R}_q)$$

4 où $\begin{cases} L^2(\mathbb{R}_Q) \text{ contient les fonctions } \varphi(Q) \\ L^2(\mathbb{R}_q) \quad \text{"} \qquad \text{"} \qquad \varphi(q) \end{cases}$

Montrer que l'espace propre associé à la val. propre E_n est :

5 $$\mathcal{H}_n = \left(\mathbb{C}\, |n_Q\rangle\right) \otimes L^2(\mathbb{R}_q)$$

6 où $|n_Q\rangle \in L^2(\mathbb{R}_Q)$ est une fonction propre de l'oscillateur harmonique.

(II) TOPOLOGIE,

4) Pour lever la dégénérescence,

on introduit les opérateurs

7 $$\hat{T}_1 := e^{-i\,2\pi\,\hat{p}}$$

$$\hat{T}_2 := e^{i\,2\pi\,\hat{q}}$$

• Montrer que ce sont des "opérateurs de translation" dans l'espace de phase (q,p), c'est à dire :

8 $$\left(\hat{T}_1 \psi\right)(q) = \psi(q-1)$$

$$\widetilde{\left(\hat{T}_2 \psi\right)}(p) = \widetilde{\psi}(p-1)$$

9 où $$\widetilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(q)\, e^{-iqp2\pi}\, dq$$

est la Transf. de Fourier de ψ.

• Utilisant la relation de Glauber (ci-dessous), montrer que :

10 $$\left[\hat{T}_1, \hat{T}_2\right] = 0$$

11 Justifier que $\left[\hat{T}_1, \hat{H}\right] = 0$ $\quad$ $\left[\hat{T}_2, \hat{H}\right] = 0$

<u>relation Glauber</u> : si $[A,[A,B]]=0$ et $[B,[A,B]]=0$,

12 alors $$e^{A} e^{B} = e^{[A,B]}\, e^{B} e^{A}$$

5) On va se servir des relations (2-10) (2-11) pour décomposer l'espace propre $\mathcal{H}_n$ (2-5).

1 • Montrer que $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$ sont unitaires, et donc que leurs valeurs propres sont de la forme $e^{i\theta}$.

• Posons, pour $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2$, l'espace :

2
$$\mathcal{H}_q(\theta_1, \theta_2) = \left\{ \psi(q) \text{ t.q } \begin{array}{l} \hat{T}_1 \psi = e^{i\theta_1} \psi \\ \hat{T}_2 \psi = e^{i\theta_2} \psi \end{array} \right\}$$

. A l'aide de (2-8), (2-9) montrer que :

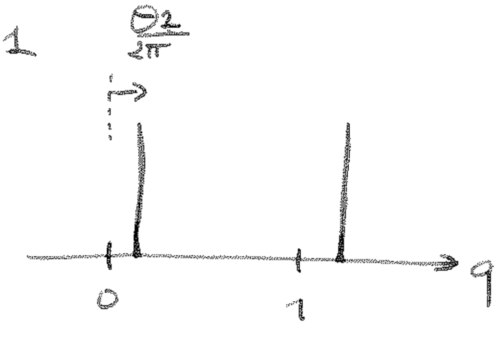
$$\psi \in \mathcal{H}_n(\theta_1, \theta_2)$$

3
$$\Longleftrightarrow \quad \psi(q) = a . \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta_1} \delta\left(q - \frac{\theta_2}{2\pi} - k\right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$

4 et déduire que : $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_q(\theta_1, \theta_2) = 1$

5 schéma de la distribution ψ :



6 (*). Montrer que :
$$L^2(\mathbb{R}_q) = \int^{\oplus} d\theta_1 \, d\theta_2 \; \mathcal{H}_q(\theta_1, \theta_2)$$

7 • Soit $\mathbb{T}_\theta := \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2\}$: tore

en point θ, on associe l'espace $\mathcal{H}_q(\theta)$,

8 et donc $\mathcal{H}_q \longrightarrow \mathbb{T}_\theta$ forme un espace fibré complexe de rang 1.

9 ainsi : $L^2(\mathbb{R}_q) \cong \left(\mathcal{H}_q \longrightarrow \mathbb{T}^2_\theta\right)$ peut être considéré

comme un espace fibré.

10 et avec (2-5) $\mathcal{H}_n$ est un espace fibré sur $\mathbb{T}_\theta$, de rang 1.

6) On va montrer que le fibré $\left(\mathcal{H}_q \longrightarrow \mathbb{T}^2_\theta\right)$ est non trivial,

et que son indice de Chern est :

11 $$C\left(\mathcal{H}_q \longrightarrow \mathbb{T}^2_\theta\right) = +1$$

En effet, soit le vecteur :

12 $$\varphi_{(\theta_1,\theta_2)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta_1}\,\delta\left(q - \frac{\theta_2}{2\pi} - k\right) \in \mathcal{H}_q(\theta)$$

qui est la distribution (3-5), et qui forme une base de la fibre $\mathcal{H}_q(\theta)$.

. Sur le domaine D : $\theta_1 \in [0, 2\pi]$, $(0 < \theta_2 < 2\pi)$

13 (c'est à dire sans la courbe $\theta_2 = 0$),

alors $\varphi(\theta)$ défini une section non nulle du

14 fibré $\mathcal{H}_q \longrightarrow D$, donc ce fibré est trivial.

. Sur la courbe $\theta_2 = 0$, montrer que la fonction

15 de recollement est : $e^{i\theta_1} \longmapsto e^{i\theta_1}$

qui est de degré $+1$,

16 donc $C = +1$.

. Déduire que : $C\left(\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{T}_\theta\right) = +1$

17

III Conductivité

- On suppose qu'il y a un faible champ électrique

1 E_x // axe x.

Cela induit un courant j_y // y,

On note σ_{xy} la "conductivité transverse" :

2 $$j_y = \sigma_{xy} \cdot E_x$$

On veut montrer :

- Propriété : si le niveau de Landau n est rempli, sa conductivité est :

3 $$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \cdot C}$$

4 avec $C = +1$: indice de Chern (3-17).

7). Soit $\varphi(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{H}_n(\theta)$: une section C^∞ globale du fibré $\mathcal{H}_n \to \Pi_\theta$,

5 cad $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}_n \to \Pi_\theta)$.

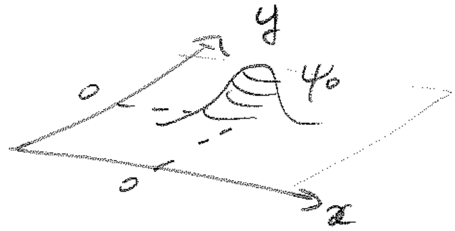
rem : le fibré est non trivial, donc $\varphi(\theta_1, \theta_2)$ doit s'annuler.

6 Soit $\varphi_0 := \iint d\theta_1 \, d\theta_2 \, \varphi(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{H}_n$

un état de type "Wannier"

(*) Montrer que φ_0 est "localisé" sur le plan (q,p) (et donc en (x,y)) c'est à dire que

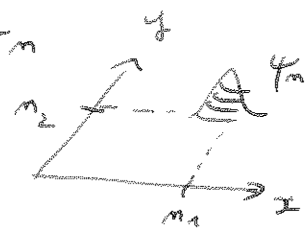
7 $\qquad \varphi_0(q)$ et $\tilde{\varphi}_0(p)$ décroissent rapidement.



8) Pour $n=(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$,

8 on pose :
$$\varphi_n := \hat{T}_1^{\,n_1}\,\hat{T}_2^{\,n_2}\,\varphi = \int d\theta_1\, d\theta_2\, e^{i n.\theta}\, \varphi_0(\theta)$$
$$\in \mathcal{H}_n$$

9 qui est l'état φ_0 translaté de $n\in\mathbb{Z}^2$, d'après (2-7).



(*) 10 . Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}$ forment une base (non o.n.) de $\mathcal{H}_n$.

. Montrer que inversement :

11
$$\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{-i n.\theta}\, \varphi_n$$

9) Supposons $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta_1,\theta_2) \longmapsto f(\theta_1,\theta_2) \end{cases}$ et $N=(N_1,N_2)\in\mathbb{Z}^2$

12

tq.

13
$$\begin{cases} f(\theta_1+2\pi,\theta_2) = f(\theta_1,\theta_2) + 2\pi N_1 \\ f(\theta_1,\theta_2+2\pi) = f(\theta_1,\theta_2) + 2\pi N_2 \end{cases}$$

14 cad $e^{if} : \mathbb{T}^2 \longrightarrow S^1$ est de <u>type d'homotopie</u> : $N=(N_1,N_2)$

1 Posons: $\phi = \iint d^2\theta \; e^{i f(\theta)} \psi(\theta) \in \mathcal{H}_n$

On définit la <u>position</u> de $\phi \in \mathcal{H}_n$ par:

2 $$\langle \hat{n} \rangle_\phi := \left(\langle \hat{n}_1 \rangle_\phi , \langle \hat{n}_2 \rangle_\phi \right) \in \mathbb{R}^2$$

3 avec $$\begin{cases} \langle n_1 \rangle_\phi := \displaystyle\sum_{n_1, n_2} n_1 \cdot \left| \langle \psi_n | \phi \rangle \right|^2 \\ \langle n_2 \rangle_\phi := \displaystyle\sum_{n_1, n_2} n_2 \left| \langle \psi_n | \phi \rangle \right|^2 \end{cases}$$

(c'est la position moyenne de ϕ, relativement à la base de position ψ_n).

4 • Montrer que: $\langle \hat{n} \rangle_\phi = (N_1, N_2)$

(*) 10) On admettra que l'effet du faible champ électrique E_x est un mouvement lent des variables (θ_1, θ_2):

5 $$\begin{cases} \theta_1(t) = - \dfrac{e X E_x}{\hbar} \, . \, t \\ \theta_2(t) = \theta_2(0) = \text{cte} \end{cases}$$

6 (justification: cf modèle ½ classique Ashcroft-Mermin "Solid state physics" chap. 12
Bransden "MQ" chap. 15)

Comme θ_1 est périodique, la période est:

7 $$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad , \quad \omega_1 = \frac{e X E_x}{\hbar} .$$

On note $\psi(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\psi_0$

où ψ_0 est l'état localisé, dans l'espace $\mathcal{H}_n$.
(4-6)

D'après le théorème adiabatique en mécanique quantique, montrer que :

$$\psi(T) \approx \iint d^2\theta \cdot e^{i\varphi_D(\theta_1,\theta_2) + i\varphi_B(\theta_2)}\,\psi(\theta_1,\theta_2)$$

où $\varphi_D(\theta)$ est la phase dynamique

et φ_B la phase de Berry.

Montrer que $\left\{\begin{array}{l}\theta \longmapsto e^{i\varphi_D(\theta)}\\ \mathbb{T}^2_\theta \longrightarrow S^1\end{array}\right.$ est de type d'homotopie $(0,0)$

alors que $\left\{\begin{array}{l}\theta \longmapsto e^{i\varphi_B(\theta)}\\ \mathbb{T}^2_\theta \longrightarrow S^1\end{array}\right.$ est de type d'homotopie $(0,\underset{+1}{\underset{\shortparallel}{C}})$

(utilisant (3-17) et la déf. (4-14)).

Avec (5-4), déduire que la position de $\psi(t)$ sur le plan (q,p) est : $\langle n\rangle_{\psi(t)} = \left(0, C\cdot\frac{t}{T}\right) = \left(0,\frac{t}{T}\right)$

et donc sa vitesse est : $\langle v\rangle = \left(0,\frac{1}{T}\right)$

11) En revenant aux variables (x, y) avec (1-10), (1-11), et utilisant le fait (à montrer) que le niveau n a une densité de $1 e^-$ / cellule X^2, cad densité $\rho = \frac{1}{X^2}$, déduire le courant :

$$j_y = \frac{C e^2}{h} E_x$$

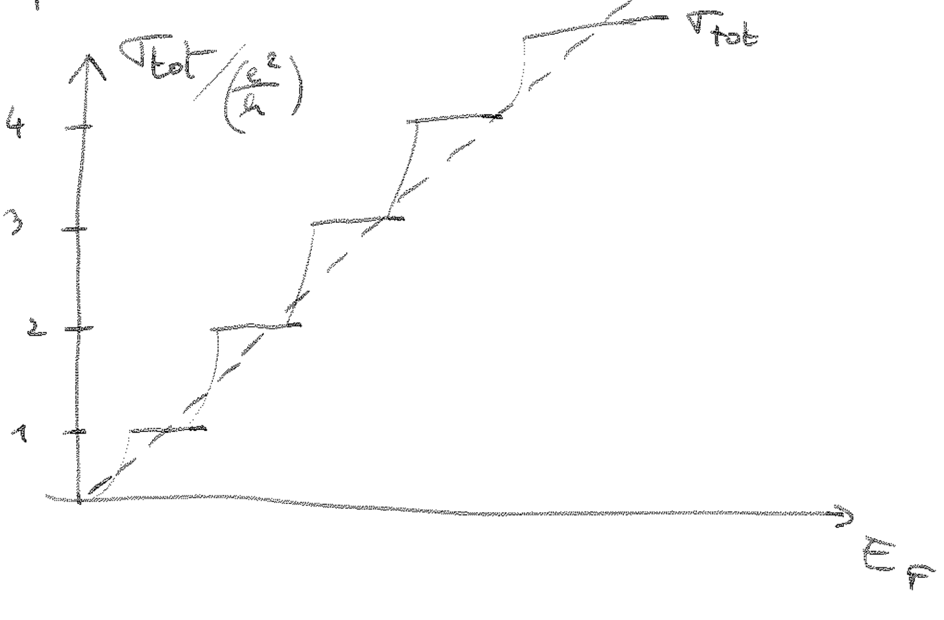
avec $C = +1$.

Déduire (4-3).

12) Déduire que lorsque le remplissage électronique augmente (l'énergie de Fermi augmente), alors la conductivité totale :

$$\sigma_{tot} = \sum_{\substack{\text{bandes } n \\ \text{remplies}}} \sigma_{xy}^{(n)}$$

augmente par paliers :



13) Montrer que une description classique de l'effet Hall donne la courbe en pointillée qui interpole les plateaux quantiques.

Bibliographie :

. E. Fradkin (1998) " Field theories of condensed matter systems "