Electromagnétisme, Effet Aharanov - Bohm Monopole Magnétique Instantons

I Effet Aharanov - Bohm

1. Utilisant par exemple l'énoncé et corrigé du TD5, de M.Q. M1 2007-08 disponible sur google : "frederic faure enseignement TD MQ 2007-08"

rappeler le dispositif et l'étude "traditionnelle" en physique de l'effet A.B.

2. Le but de donner une description géométrique de ce modèle, où F est un fibré complexe hermitien de rang 1 sur $\mathbb{R}^3$, et par rapport à une trivialisation σ unitaire, une section est $s \underset{\sigma}{=} \psi \cdot \sigma$

la connexion est : $Ds \underset{\sigma}{=} d\psi + A\psi$

(voir cours)

• Montrer que l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2\psi = E\psi$$

peut s'écrire : $D^* D s = E s$, E : énergie

On déduira que $\vec{A}$ s'identifie à la 1-forme de connexion et $\vec{B}$ à la courbure Ω (attention aux unités et facteurs $\hbar$, e, m etc...)

(3) Avec le choix $E=0$ (pour simplifier) déduire que s vérifiant $Ds=0$ est solution, et interpréter cela en terme de transport parallèle.

(4) Déduire que la phase qui gouverne les interférences dans l'effet A.B. est une holonomie $h(\gamma) = i\oint A = i\iint \Omega$ (cf cours) qui s'exprime avec le flux du champ magnétique, grâce au théorème de Stokes.

II Monopôle magnétique

réf : M. Nakara "géom. topology & physics" chap. 1

1. On suppose que le fibré F précédent est définit seulement sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et pas en 0.

- Montrer que un tel fibré peut ne pas être trivial, et plus précisément que sa topologie est caractérisée par son indice de Chern :

$$C(F) \in \mathbb{Z}$$

(aide : considérer la restriction du fibré à la sphère S^2 : $|x| = 1$, et cf cours chap 1)

montrer ensuite que le fibré s'étend de manière unique en 1 fibré sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ qui est isomorphe à F)

2. Si $C(F) \neq 0$, expliquer pourquoi le point 0 est une singularité qui ne peut pas être enlevée. (cad que l'on ne peut pas étendre F à $\mathbb{R}^3$ entier).

rem : on appelle cette singularité : "monopole magnétique"

(3) Si Ω est la 2 forme de courbure du fibré, montrer que $$C(F) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^2} \Omega \quad \in \mathbb{Z}.$$

interpréter cela en terme de flux magnétique issu du monopole.

(on appelle C : la <u>charge magnétique</u> du monopole)

(4) Rappel de cours : pour un fibré de rang 1, la deux forme $\Omega \in C^\infty(\Lambda^2)$ est bien définie indépendamment de la trivialisation τ (= choix de Jauge) mais pas la 1 forme de connexion A, qui dépend de τ.

- Pourquoi si $C \neq 0$, il n'est pas possible de trouver une trivialisation de F au dessus de tout l'espace de base $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

- Pour $C \in \mathbb{Z}$ donné, trouver un exemple simple de Ω (en coord. sphériques), et donner les expressions de A dans des cartes, par rapport à des trivialisations choisies (ex de cartes : hémisphère nord / sud de S^2).

cf Nakahara chap 1.

- En choisissant une carte unique sur S^2 qui exclue le pôle sud, qu'obtien t-on ?
  donner l'interprétation géométrique des "cordes de Dirac" = " Dirac's strings ".

rem : le monopole magn. n'a pas encore été observé dans la nature. (Existe t il ?)

III Instantons et généralisation

Réf : Nakahara, Choquet-Bruhat.

- on considère un fibré F complexe de rang r sur la sphère S^n, $n \geqslant 1$.

- (Par analogie avec le cas $r=1$, $n=2$ traité en cours), montrer que la topologie d'un tel fibré est caractérisée par la classe d'homotopie (i.e. à déformation près) de l'application de recollement sur l'équateur :

$$\varphi : S^{n-1} \longrightarrow U(r)$$

on note : $\pi_{n-1}(U(r))$: l'ens. des classes d'homotopies, appelé groupe d'homotopie du groupe unitaire $U(r)$

- (Sur internet par ex.) trouver la table des groupes $\pi_{n-1}(U(r))$ pour $n = 0 \longrightarrow 9$, $r = 1 \longrightarrow 5$

- en particulier comprendre que $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ correspond à l'indice de Chern C du monopôle magnétique.

- Trouver l'énoncé du "théorème de périodicité de Bott" concernant ce tableau des $\pi_{n-1}(U(r))$.

- Si l'espace-temps physique était une sphère S^4, quel effet topologique non trivial pourrait-t'il y avoir concernant les théories de Jauge ?

  (c'est à dire à partir du tableau, déduire pour quel rang r, (ie théorie $U(1)$ ou $SU(2)$ ou $SU(3)$...) il existe des fibrés $F \to S^4$ non triviaux de rang r).

- Construire un exemple explicite de tel fibré ?

  (le champ de Jauge correspondant A s'appelle un <u>instanton</u>)

- Pour aller plus loin : en demandant que la connexion résolve les équ. de Yang-Mills dans le vide, on montre que la courbure Ω est "localisée" dans l'espace temps S^4.

  $\to$ le nom "instanton".