# Propriétés de la connexion de Levi Civita

① Considérons une application linéaire

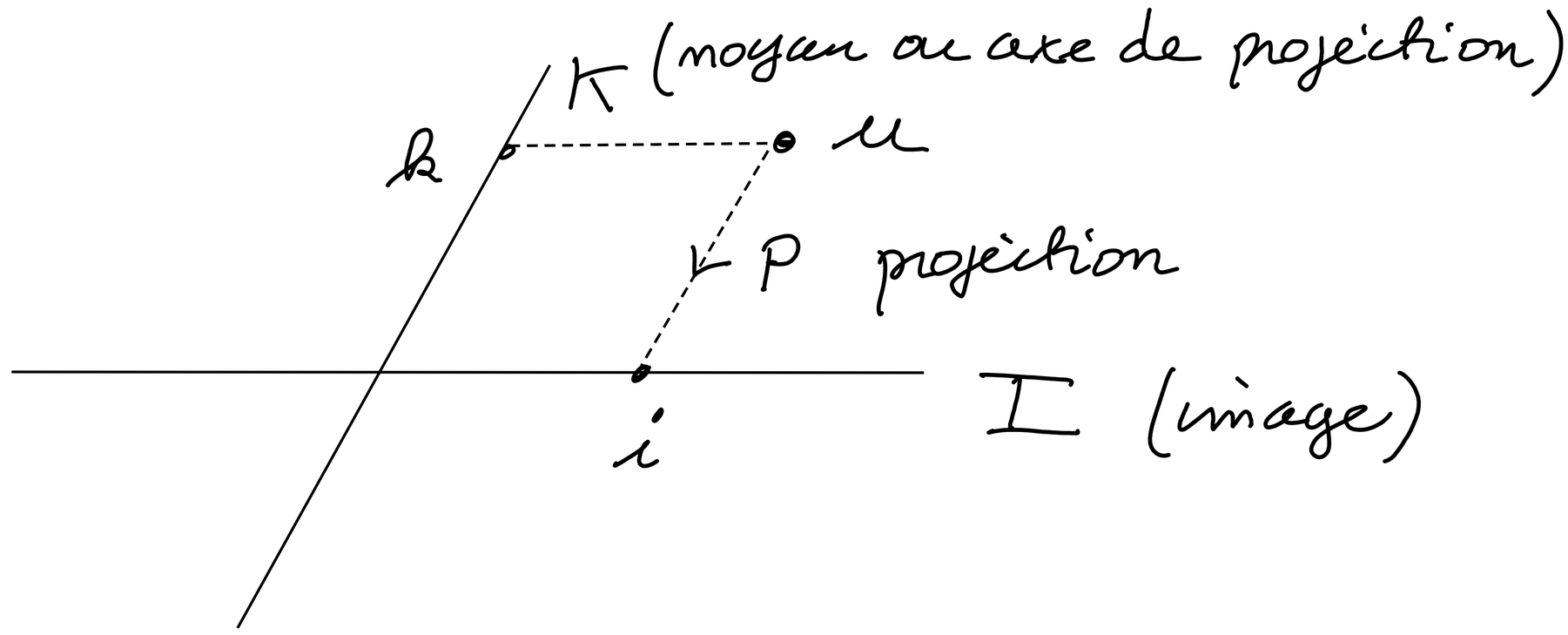
$$P : E \longrightarrow E$$

<u>déf</u>: $P$ est un <u>projecteur</u> si il existe une décomposition

$$E = K \oplus I$$

et pour tout $u = (k, i) \in K \times I \equiv E$,

on a $Pu = i \in I \subset E$.




<u>Théorème</u> : Une application linéaire $P : E \to E$ est un projecteur si et seulement si $P^2 = P$

<u>preuve</u> : • (sens $\Rightarrow$) si $P$ projecteur alors $Pu = i$

et $P^2 u = Pi = P(0, i) = i$ donc $P^2 = P$.

• (sens $\Leftarrow$) : si $P^2 = P$, on pose

$K := \ker P = \{u \text{ tq } Pu = 0\}$

$I := \operatorname{Im} P = \{v \text{ tq } \exists u \in E,\ v = Pu\}$.

. On a $K \cap I = \{0\}$, car si $v \in K \cap I$,

$v = Pu$, $0 = Pv = P^2 u = Pu = v$.

. Pour tout $u \in E$, $u = \underbrace{Pu}_{i \in I} + \underbrace{(u - Pu)}_{k \in K}$

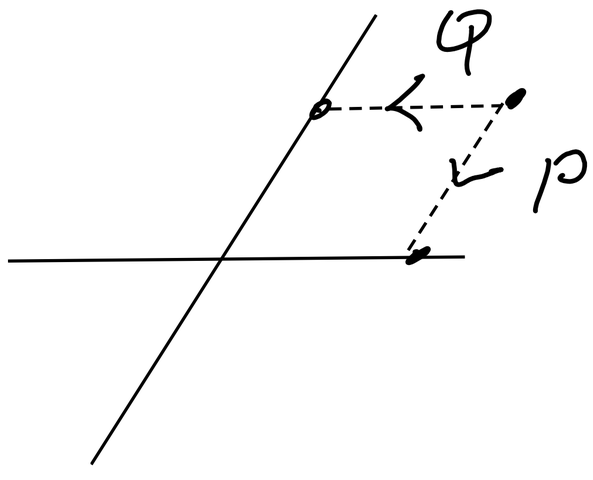
avec $i \in I$ et $Pk = Pu - P^2 u = 0$, donc $k \in K$.

Donc $E = K \oplus I$ : "somme directe".

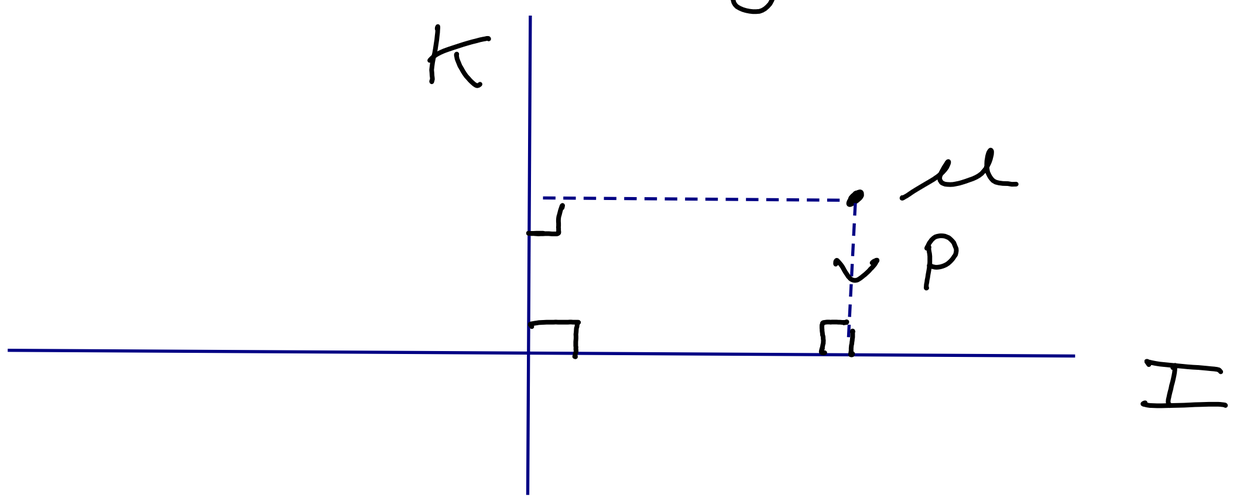
et $Pu = P^2 u = Pu = i \in I$.

donc $P$ est un projecteur. ∎

rem : $Q = Id - P$ est le projecteur sur $K$ selon $I$



. <u>déf</u> : un projecteur $P$ est <u>orthogonal</u> si $\ker P \perp \operatorname{Im} P$




<u>théorème</u> : un projecteur $P$ est orthogonal ssi $P^+ = P$

<u>preuve</u>

($\Rightarrow$) : Soit $u = k + i$ avec $k \in \ker P$, $i \in \operatorname{Im} P$

et $u' = k' + i'$ avec $k' \in \ker P$, $i' \in \operatorname{Im} P$

on a $\langle u' | P^+ u \rangle \underset{\text{déf de } P^+}{=} \langle P u' | u \rangle = \langle i' | k + i \rangle$

$\underset{K \perp I}{=} \langle i' | i \rangle$

et $\langle u' | P u \rangle = \langle k' + i' | i \rangle \underset{K \perp I}{=} \langle i' | i \rangle$

donc $P^+ = P$.

($\Leftarrow$) : si $P^+ = P$, et $u = k + i$, $k \in \ker P$, $i \in \operatorname{Im} P$,

alors $\langle k | i \rangle = \langle k | P i \rangle = \langle P^+ k | i \rangle \underset{P^+ = P}{=} \langle P k | i \rangle$

$= \langle 0 | i \rangle = 0$ donc $\ker P \perp \operatorname{Im} P$.

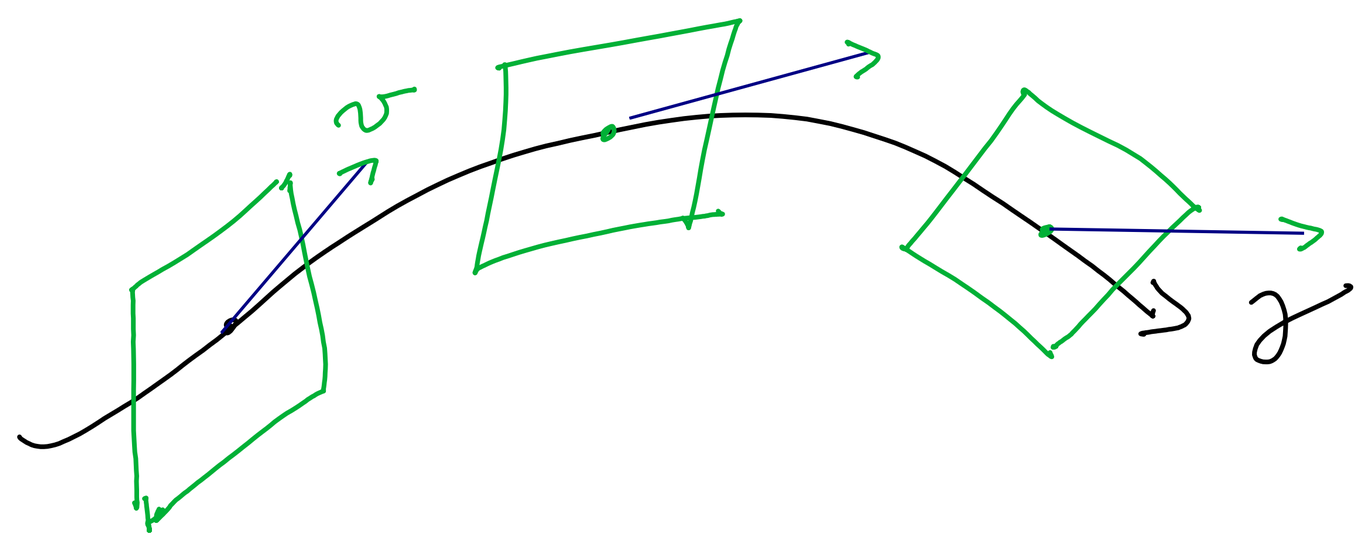
$\blacksquare$

② $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ surface

$\gamma \subset \mathcal{S}$ courbe paramétrée,

$v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{Dv}{dt} := P_{\gamma(t)} \frac{dv}{dt} \quad \text{"dérivée covariante"}$$




$$\langle v | w \rangle = \sum_{j=1}^{3} v_j w_j ,$$

$$\frac{d}{dt}\langle v(t) | w(t) \rangle = \left\langle \frac{dv}{dt} \middle| w \right\rangle + \left\langle v \middle| \frac{dw}{dt} \right\rangle$$

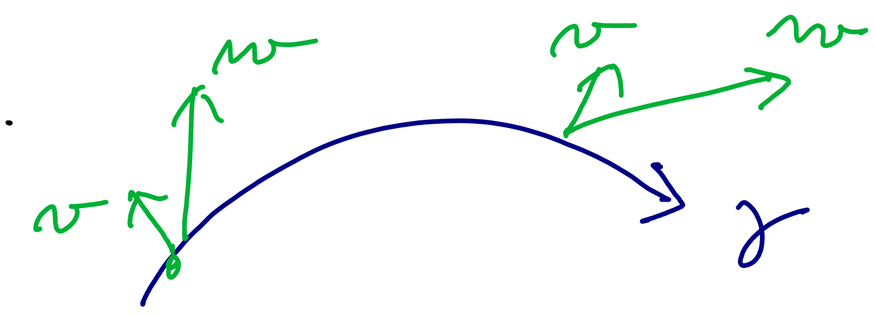
$$= \left\langle \frac{dv}{dt} \middle| P w \right\rangle + \left\langle P v \middle| \frac{dw}{dt} \right\rangle$$

$$= \left\langle P \frac{dv}{dt} \middle| w \right\rangle + \left\langle v \middle| P \frac{dw}{dt} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{Dv}{dt} \middle| w \right\rangle + \left\langle v \middle| \frac{Dw}{dt} \right\rangle$$

Donc si $\frac{Dv}{dt} = 0$ et $\frac{Dw}{dt} = 0$ alors $\frac{d}{dt}\langle v | w \rangle = 0$,

$\frac{d\|v\|^2}{dt} = 0$, et angles conservés.



③ si $\frac{Dv}{dt} = 0$ et $v'(t') = v(\varphi(t'))$

avec $\varphi : t' \longmapsto t = \varphi(t')$ difféomorphisme,

alors $\underbrace{\frac{Dv'}{dt'}}_{=0} = P\frac{dv'}{dt'} = P\frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt'} = \underbrace{\left(\frac{Dv}{dt}\right)}_{0}\frac{d\varphi}{dt'}$

④ si $f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ fonction,

alors

$$\frac{D(fv)}{dt} = \frac{P\,d(fv)}{dt} = P\left(\frac{df}{dt}v + f\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\underset{P \text{ linéaire}}{=} \frac{df}{dt}Pv + f\,P\frac{dv}{dt}$$

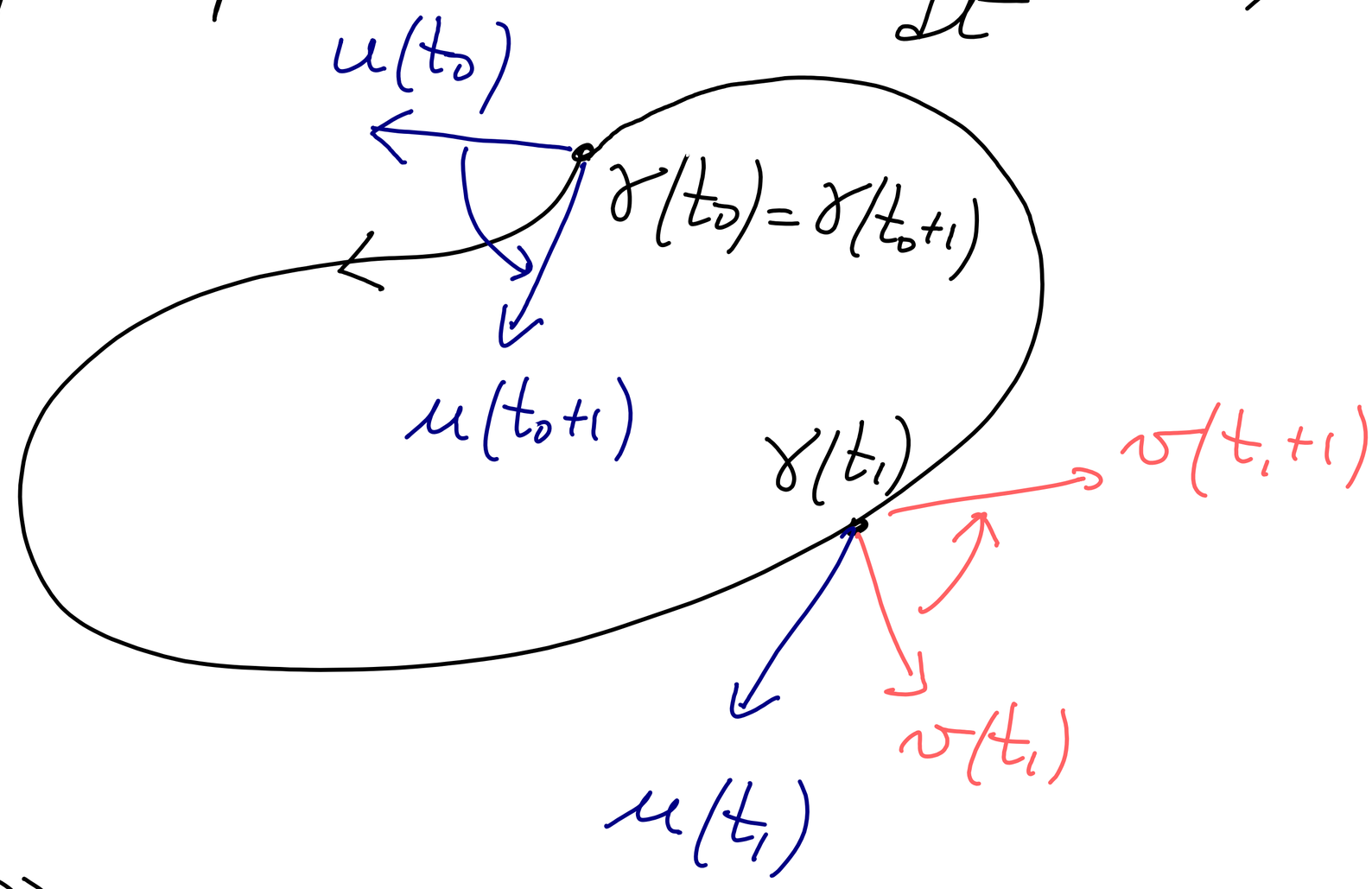
$$\underset{\text{car } Pv = v}{=} \frac{df}{dt}v + f\frac{Dv}{dt}$$

⑤ Soit $\gamma \subset S$ chemin fermé paramétré

$$\gamma(t+1) = \gamma(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

Soit $u(t_0) \in T_{\gamma(t_0)} S$ et $u(t)$ suit le transport parallèle cad $\frac{Du}{dt} = 0$

Soit $v(t_1) \in T_{\gamma(t_1)} S$ et $v(t)$ suit le transport parallèle, cad $\frac{Dv}{dt} = 0$,




on a $\left(v(t_1), v(t_1+1)\right) = \left(v(t_1), u(t_1)\right) + \left(u(t_1), v(t_1+1)\right)$

$$= \left(v(t_1), u(t_1)\right) + \left(u(t_1-1), v(t_1)\right) = \left(u(t_1-1), u(t_1)\right)$$

$$= \left(u(t_1), u(t_1+1)\right)$$