TD. **Dérivée covariante 2. Pour le fibré normal à une courbe ou l'orientation en chute libre**

Table des matières

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web.

1 Fibré normal à une courbe et connexion de Levi-Civita.

Le modèle géométrique qui suit est important pour décrire

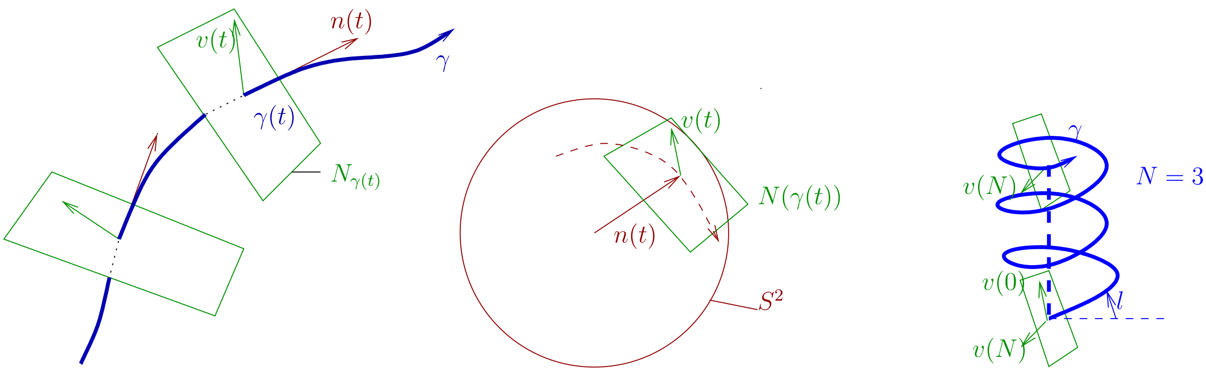
— le comportement de la polarisation d'un rayon lumineux qui suit une fibre optique γ (cela se justifie avec l'approximation WKB en optique ondulatoire).

— La torsion d'une corde (d'escalade) ou la raideur d'un ressort en spirales.

On considère une courbe paramétrée $\gamma : t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$, et en chaque point $\gamma(t)$, on note $\vec{n}(t)$ le vecteur tangent unitaire (i.e. $|\vec{n}(t)| = 1$), et $N_{\gamma(t)} \subset \mathbb{R}^3$ le plan orthogonal à $\vec{n}(t)$. On note

$$N = \{(x, v), \, x \in \gamma, \, v \in N_x\}$$

la collection des plans orthogonaux appelé **espace fibré normal** à γ (γ est la « base » et $(N_x)_x$ sont les « fibres »). Cet espace fibré est munit d'une connexion induite par la métrique dans $\mathbb{R}^3$ que l'on va étudier.



1. En tout point $\gamma(t)$ de la courbe, on choisit un vecteur normal $v(t) \in N_{\gamma(t)}$. Donner l'expression géométrique de la dérivée covariante $\frac{Dv}{dt}$ (ou connexion de Levi-Civita) qui mesure la déviation de v par rapport au transport parallèle ?

2. On place le vecteur $\vec{n}(t)$ à l'origine, et on considère le mouvement de $\vec{n}(t)$ sur la sphère S^2 unité (appelé application de Gauss). Montrer l'équivalence entre la connexion sur le fibré normal N et la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent TS^2. Si γ est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. un nœud), déduire une formule simple pour l'holonomie $h(\gamma)$.

3. Supposons que γ soit une hélice d'angle l (l'angle entre $n(t)$ et l'axe de l'hélice est $\pi/2 - l$). Supposons qu'un vecteur $v(t)$ suive le transport parallèle le long de γ. Après N tours, exprimer l'angle entre $v(0)$ et $v(N)$ (qui est une holonomie si on ramène le point final au point initial par translation dans $\mathbb{R}^3$ pour les comparer, voir figure).

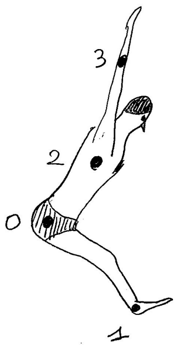
2 Importance de l'holonomie pour la raideur d'un ressort hélicoïdal

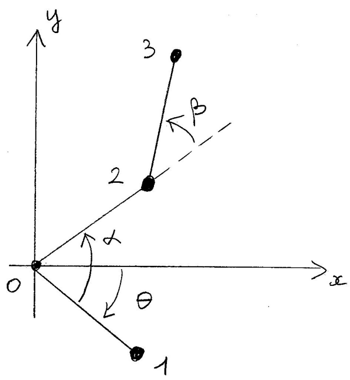
1. (Rappel de l'exercice 1).On considère un tube initialement droit de rayon r On marque ce tube par un trait noir droit parallèle à l'axe du tube. Ce tube est souple et on l'enroule sur un cylindre de rayon $R \gg r$ avec le moins de contrainte possible (i.e. minimum d'énergie de déformation) en formant une hélice de pente angulaire l (en rose sur la photo). Exprimer la position angulaire que prendra le trait noir après N tours.
2. Un **ressort hélicoidal** est modélisé par un tube rigide de petit rayon r de longueur L enroulé en hélice (de rayon R), dont les spires sont fixées aux extrémités. On note C le couple de raideur du tube par unité de longueur, autrement dit, l'énergie de torsion est $E = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{L}\right)(\delta\alpha)^2$. Exprimer la raideur effective K du ressort à partir du diamètre D du cylindre, N, l,C ? (Aide : écrire que l'énergie de torsion est $E = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{L}\right)(\delta\alpha)^2 = \frac{1}{2}K(\delta x)^2$), puis remplacer C par $C = \mu\pi d^4/32$ d'après wikipedia avec le module de cisaillement μ du matériau et le diamètre $d = 2r$ du tube. Retrouver la formule connue.

3 Orientation dans l'espace d'un plongeur en chute libre

Le modèle qui suit sert de modèle simplifié pour décrire la **chute libre d'un chat**, et comprendre comment il peut se rétablir sur ses pattes. Cela peut aussi servir pour comprendre comment changer l'**orientation d'un satellite** qui serait libre dans l'espace. (Exercice inspiré d'un article de Surya Ganguli 1999, Voir aussi l'article de R. Montgomery "Gauge theory of the falling cat", article wikipedia sur le Falling cat problem, redressement du chat).

On considère une personne qui plonge dans une piscine depuis un sautoir. On modélise son corps par des masses égales $m = 1$ aux points 0,1,2,3 equidistants. Voir figure.





La **configuration interne** est caractérisée par les angles $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La **configuration externe** est caractérisée par l'angle $\theta \in [0, 2\pi[\equiv S^1$. L'état total est donc spécifié par $(\theta, \alpha, \beta) \in E = S^1 \times \mathbb{R}^2$ (espace des états). En terme géométrique on a donc un fibré (trivial)

$$S^1 \to E \to \mathbb{R}^2$$

Le sauteur est en chute libre. Par conséquent il y a **conservation du moment angulaire total** par rapport à l'origine 0 (ou n'importe quel autre point). Pendant le saut, la personne a un contrôle pour modifier les paramètres $\alpha(t), \beta(t)$ au cours du temps comme elle le souhaite. Par contre elle n'a aucun contrôle direct sur l'évolution de la configuration externe $\theta(t)$. C'est la conservation du moment angulaire qui va l'imposer. L'**objectif du plongeur** est, partant la tête vers le haut, d'arriver la tête en bas au niveau de l'eau (on néglige les frottements etc).

1. Utilisant la conservation du moment angulaire dans le référentiel du centre de masse, $0 = L = L_1 + L_2 + L_3$ (supposée nulle au départ), montrer que une variation $(d\alpha, d\beta)$ de la configuration interne entraîne une variation de la configuration externe :

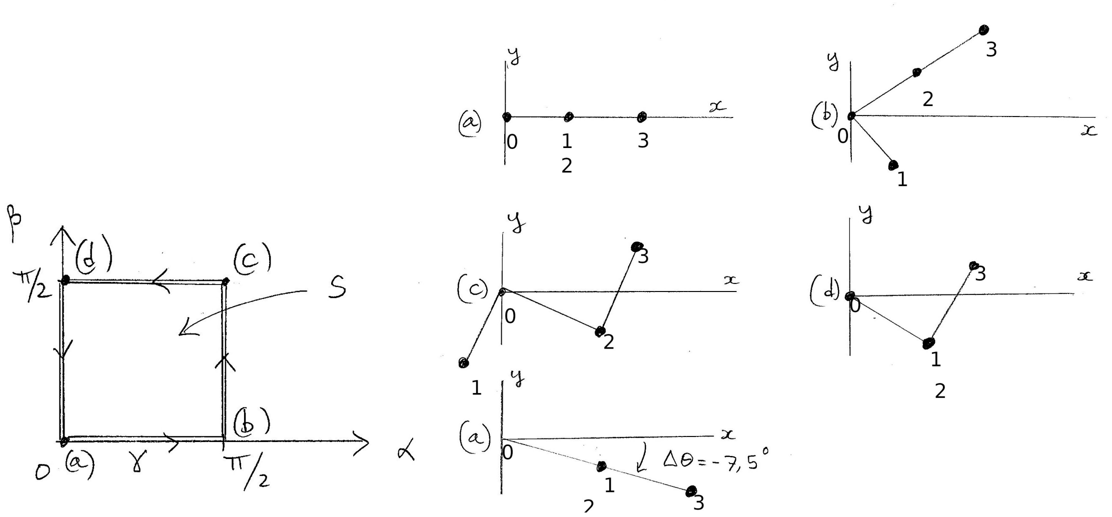
$$\mathcal{A} = d\theta = \mathcal{A}_\alpha d\alpha + \mathcal{A}_\beta d\beta,$$
$$\mathcal{A}_\alpha = -\frac{3 + 2\cos\beta}{4 + 2\cos\beta}, \qquad \mathcal{A}_\beta = -\frac{1 + \cos\beta}{4 + 2\cos\beta}$$

   On dit que $\mathcal{A}$ est la **1-forme de connexion**. Aide : pour le point 1 de coordonnée polaire (r, θ), son moment angulaire est $L_1 = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ (etc pour les autres points). Pour simplifier les calculs on pourra utiliser la coordonnée complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

2. Le plongeur effectue le chemin fermé γ dans le plan (α, β), représenté sur la figure ci-dessous. Déduire que l'holonomie (changement d'orientation après un cycle) est

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \oint_\gamma \mathcal{A} \\ &= [\mathcal{A}_\alpha]_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} = -75^o + 67.5^o \\ &= -7.5^o\end{aligned}$$

   Que doit faire le plongeur pour tourner de $\Delta\theta = -\pi$ (afin de se retrouver la tête en bas) ?



3. Montrer que d'après la formule de Stokes

$$\Delta\theta = \oint_\gamma \mathcal{A} = \iint_S d\mathcal{A}$$

   où S est la surface encerclée par le cycle et

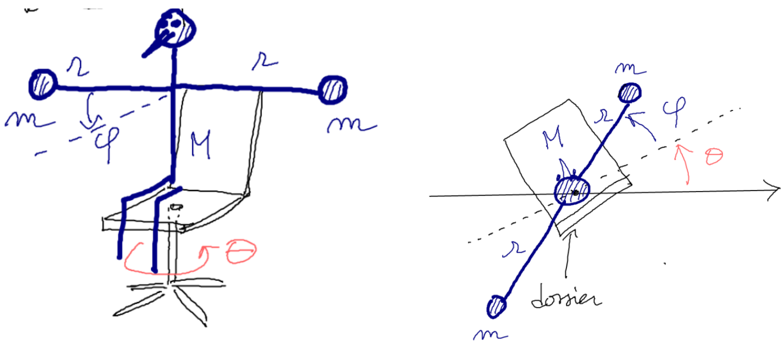
$$d\mathcal{A} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \beta}\right) d\alpha \wedge d\beta = \frac{-2\sin\beta}{(4 + 2\cos\beta)^2} d\alpha d\beta$$

   est la **2-forme de courbure**. Donc

$$\Delta\theta = \int\int d\mathcal{A} = [-\mathcal{A}_\alpha]_{\beta=0}^{\beta=\pi/2}$$

4 Comment se retourner sur une chaise tournante de bureau ?

On considère une personne sur un siège de bureau qui tourne sans frottement.



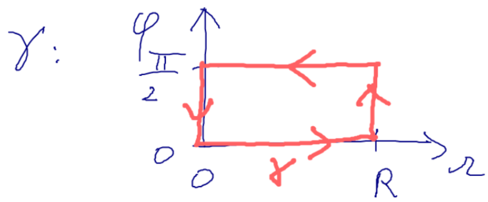
On note θ l'orientation du siège par rapport à la pièce. La chaise et le corps central combinés ont un moment d'inertie par rapport à l'axe fixé noté M. Autrement dit la contribution au moment angulaire est $M\frac{d\theta}{dt}$. La masse de chaque main est m, située à la distance r de l'axe avec $r \in [0, R]$ qui est variable. On suppose $2mR^2 = M$. La personne peut décider la distance $r \in [0, R]$ entre ses mains et l'axe et l'angle φ entre ses bras et la chaise.

Au départ, la chaise et la personne sont immobiles et dans la configuration $r = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$. La personne souhaite se retourner, c'est à dire atteindre l'état immobile dans la configuration $r = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = \pi$. Pour l'aider,

1. Décrire l'espace fibré à considérer (préciser l'espace de base, les fibres)
2. Expliciter la connexion du fibré sous la forme

$$d\theta = \mathcal{A} = \mathcal{A}_r dr + \mathcal{A}_\varphi d\varphi$$

3. Déduire l'holonomie pour le chemin γ suivant



4. Calculer la courbure du fibré.
5. Comment utiliser ces résultats pour se retourner ?
6. Faire l'expérience.