Université Grenoble Alpes, Master 2 Physique.
Travail dirigé (TD) de géométrie et topologie pour la physique. Frédéric Faure.

TD . **Dérivée covariante 1. Le pendule de Foucault**

Table des matières

Introduction : Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs. Ce TD est basé sur ces notes de cours et voici la page web.

Le pendule de Foucault est à paris. On s'intéresse à la direction de ses oscillations au cours du temps et en particulier le changement de direction après un jour appelé angle de Foucault $\varphi_{\text{Foucault}}$.

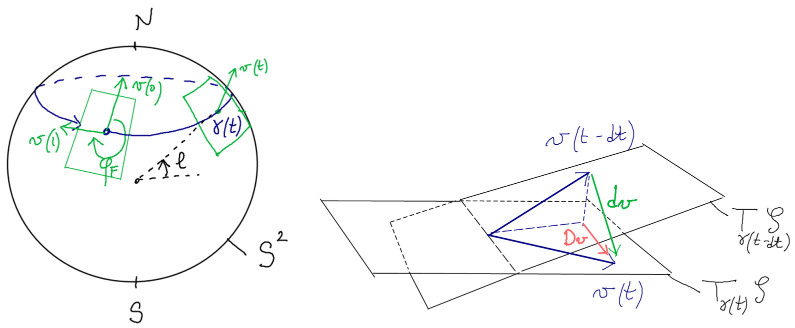
Remarque 0.1. Les phénomènes géométriques sous-jacent sont appelé « théorie de Jauge » en physique et « espace fibrés avec connection » en mathématique et sont présent dans de nombreux domaines de la physique.

On modélise la surface de la Terre par la sphère $S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$. Paris est un point $\gamma(t) \in S^2$ qui suit une trajectoire périodique γ de période $T = 1$ jour, qui est la courbe de latitude $l = 47°$. A l'instant t, on note $v(t) \in T_{\gamma(t)}S^2 \subset \mathbb{R}^3$ le vecteur tangent unitaire qui représente la direction d'oscillation du pendule.

D'après le principe d'inertie, l'évolution de la direction du pendule est déterminée par l'équation de mouvement

$$P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = 0,$$

où $P_{\gamma(t)} : \mathbb{R}^3 \to T_{\gamma(t)}S^2$ est le projecteur orthogonal sur le plan tangent.



Pour la définition suivante, au lieu de S^2, on peut considérer plus généralement une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ et une courbe $\gamma \subset \mathcal{S}$ quelconques qui sont C^∞.

La collection des espaces tangents est appelé l'**espace fibré tangent** et noté $T\mathcal{S} := \{(x, v), \quad x \in \mathcal{S}, v \in T_x\mathcal{S}\}$. La surface $\mathcal{S}$ est appelée la « **base** » et les espaces tangents $(T_x\mathcal{S})_x$ sont les **« fibres »**.

Définition 0.2. L'opération

$$\left(\frac{Dv}{dt}\right)(t) := \left(P_{\gamma(t)} \frac{dv}{dt}\right)(t)$$

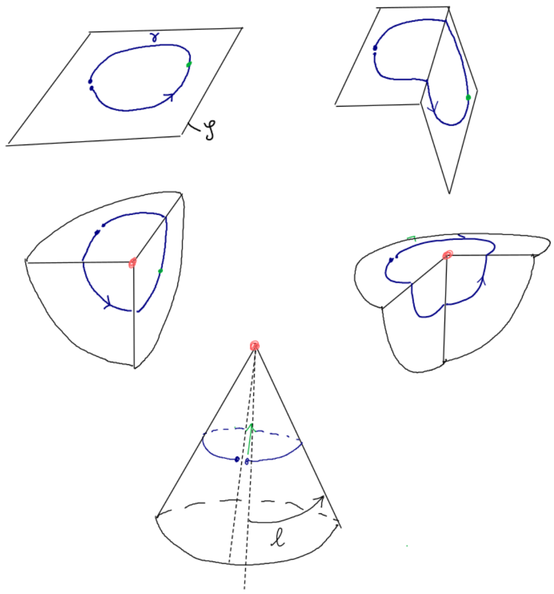
est appelée **dérivée covariante** ou **connexion de Levi-Civita** du champs de vecteur $v : t \in \mathbb{R} \to v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$. On dit que v suit **le transport parallèle** si $\left(\frac{Dv}{dt}\right) = 0$.

Après une période $T = 1$, i.e. $\gamma(T) = \gamma(0)$, l'angle orienté $h(\gamma) := (v(0) \widehat{,} v(1))$ définit modulo 2π, est appelé **holonomie de la courbe fermée** γ et correspond à l'angle de Foucault.

1 Holonomie sur les surfaces plates

Une surface plate est une surface localement isométrique au plan : cela signifie intuitivement que on peut déformer un bout de surface pour la rendre plane sans changer les longueurs internes. C'est le cas du plan, d'un cylindre, d'un cône et plus généralement des configurations que peut prendre une feuille de papier. On définira plus tard les surfaces plates comme ayant une courbure nulle. On admet que l'holonomie $h(\gamma)$ ne dépend pas du point de départ ni du vecteur initial (cela sera démontré dans l'exercice 2).

1. Pour chaque courbe orientée γ suivante inclue dans une surface plate, calculer son holonomie $h(\gamma)$? (dans le dernier cas du cône, exprimer $h(\gamma)$ à partir de l'angle d'ouverture du cône l). Les points rouge sont des singularité de la surface.



2. Dans le cas de la trajectoire γ du pendule de Foucault, considérer un cône tangent à la sphère S^2 et déduire l'expression de l'angle de Foucault à partir de la latitude l de Paris.

2 Propriétés de la connexion de Levi-Civita

Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface, $\gamma \subset \mathcal{S}$ une courbe paramétrée et soient $t \in \mathbb{R} \to v(t), w(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ qui sont deux familles de champ de vecteurs tangent à la surface $\mathcal{S}$ et attachés à la courbe γ. On note $\langle v|w\rangle := \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$ le produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer au préalable que le projecteur orthogonal $P_x : \mathbb{R}^3 \to T_x\mathcal{S}$ vérifie[1] $P_x^\dagger = P_x$ et $P_x^2 = P_x$. On pourra montrer généralement qu'une application linéaire est un projecteur si et seulement si $P^2 = P$ et que c'est un projecteur orthogonal si et seulement si $P^\dagger = P$.
2. Montrer que
$$\frac{d}{dt}\left(\langle v(t)|w(t)\rangle\right) = \langle \frac{Dv(t)}{dt}|w(t)\rangle + \langle v(t)|\frac{Dw(t)}{dt}\rangle,$$
Appelée **formule de compatibilité entre la dérivée covariante et la métrique**. Déduire que le transport parallèle conserve la norme des vecteurs et l'angle entre vecteurs.
3. Montrer que le transport parallèle de $v(t)$ ne dépend pas de son paramétrage, c'est à dire que si $t = \varphi(t')$ est un changement de paramètres, et si $v'(t') := v(\varphi(t'))$ alors $v'(t')$ suit aussi le transport parallèle.
4. Montrer que pour toute fonction $f : t \in \mathbb{R} \to f(t) \in \mathbb{R}$ on a la **formule de Leibnitz :**
$$\frac{D}{dt}\left(f(t)\,v(t)\right) = \left(\frac{df}{dt}\right) v(t) + f(t)\frac{Dv}{dt}. \tag{2.1}$$
5. Montrer que l'holonomie $h(\gamma)$ est indépendante de la paramétrisation du chemin γ, du point initial $x_0 \in \gamma$, et du vecteur initial v_0. On dit qu'**elle ne dépend que de la géométrie du chemin γ.**

1. On rappelle que pour un opérateur linéaire $A : E \to F$ entre deux espaces vectoriels munis de produit scalaire notés respectivement $\langle .|.\rangle_E, \langle .|.\rangle_F$, l'**opérateur adjoint** $A^\dagger : F \to E$ est défini par, $\forall u \in E, \forall v \in F, \langle u|A^\dagger v\rangle_E = \langle Au|v\rangle_F$. Un projecteur $P : E \to E$ est défini par le fait que $E = K \oplus I$ se décompose en un sous espace « noyau » K et « image » I et que si $u = (k,i) \in K \times I \equiv E$ alors $Pu = i$. On dit que c'est un projecteur orthogonal si $I \perp K$ sont orthogonaux.

3 Holonomie et courbure. Formule de Gauss Bonnet

On admet la formule de Gauss Bonnet (démontrée dans la partie géométrie différentielle) :

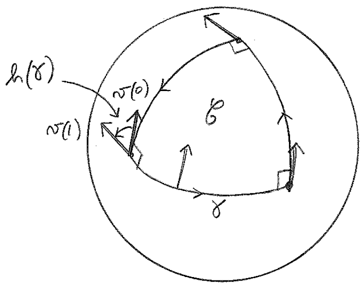
Théorème 3.1. ***"Formule de Gauss-Bonnet locale".*** *Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface orientée et $\gamma \subset \mathcal{S}$ est un chemin fermé orienté qui borde un domaine $\mathcal{C}$, noté $\partial\mathcal{C} = \gamma$, alors*

$$h(\gamma) = \iint_{x\in\mathcal{C}} k(x)\, d^2s \qquad mod\ 2\pi. \tag{3.1}$$

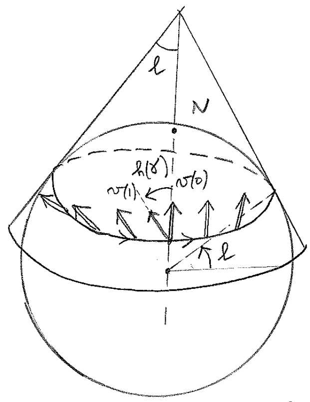
où $k(x) = \frac{1}{R_{\min}R_{\max}}$ est la courbure de Gauss de la surface au point $x \in \mathcal{S}$ (et $R_{\min}, R_{\max}$ les rayons de courbures principaux).

où d^2s est l'élément de surface.

1. Vérifier la formule de Gauss Bonnet dans les cas suivants de courbes γ sur la sphère S^2 : (rappel sur la sphère de rayon R et en coordonnées sphériques, on a $d^2s = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ et $\iint_{S^2} d^2s = 4\pi R^2$)



h(γ) : holonomie du chemin γ



transport parallèle sur S^2

2. A partir de la formule (3.1), déduire la formule de Gauss Bonnet globale :

Théorème 3.2. ***"Formule de Gauss Bonnet globale".*** *Pour une surface $\mathcal{S}$ orientée compacte sans bord l'intégrale de la courbure sur toute la surface est*

$$\iint_{\mathcal{S}} k(x)\, d^2s = 2\pi C \tag{3.2}$$

où $C \in \mathbb{Z}$ est un ***entier*** *(appelé indice de Euler). Par conséquent c'est un* ***invariant topologique****, c'est à dire invariant par déformation de la surface. Pour une surface de* ***genre*** *g (c'est à dire avec g trous), on a*

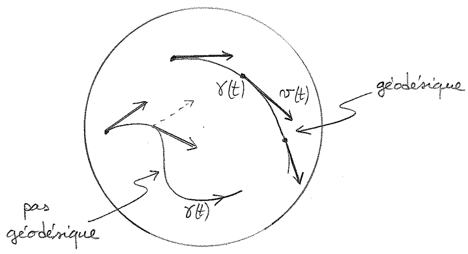
$$C = 2(1-g). \tag{3.3}$$

4 Géodésiques sur une surface

Définition 4.1. Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface et $\gamma \subset \mathcal{S}$ une courbe paramétrée, on note $v(t) = \frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ le vecteur tangent vitesse. La courbe paramétrée γ est une **géodésique** si

$$\frac{Dv}{dt} = 0, \qquad \forall t, \tag{4.1}$$

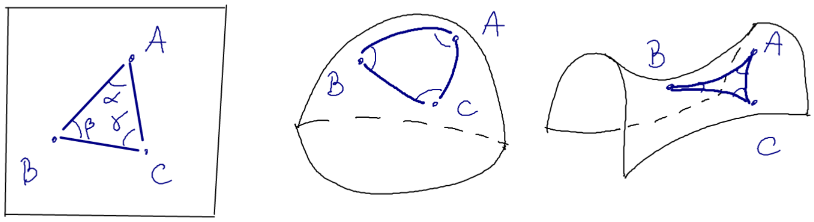
c'est à dire si le vecteur vitesse $v(t)$ est aussi le transporté parallèle de $v(0)$ le long de la courbe γ, signifiant « qu'il ne dévie pas tangentiellement ».



Sur le plan, les géodésiques sont des lignes droites. Sur la sphère S^2, les géodésiques sont les grands cercles (intersection de S^2 avec un plan passant par son origine).

4.1 Triangles géodésiques

Sur une surface $\mathcal{S}$ orientée, un **triangle géodésique** est la collection de trois points $T = (A, B, C)$ reliés par des géodésiques. On note $\alpha, \beta, \varepsilon$ les angles orientés aux sommets et $h(T)$ l'holonomie autour du triangle.



1. Dans le cas du plan, rappeler la valeur de $\alpha + \beta + \gamma$ et $h(T)$.
2. Donner un exemple de triangle géodésique sur S^2 avec les angles $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ et $h(T)$.
3. En général montrer que
$$h(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \tag{4.2}$$
où $h(T)$ est l'holonomie du bord du triangle.

4.2 Comportement de géodésiques voisines

Sur une surface, considérons une géodésique de référence $\gamma : t \to \gamma(t)$, paramétrée par sa longueur t. Au point $\gamma(0)$, part une autre géodésique $t' \to \gamma'(t')$, c'est à dire $\gamma'(0) = \gamma(0)$ avec un angle $\alpha(0) = (\dot{\gamma}'(0), \dot{\gamma}(0))$ supposé très petit $\alpha(0) \ll 1$. A la date t, on mesure la distance entre les deux géodésique, en partant de $\gamma(t)$ à la perpendiculaire, selon une géodésique jusqu'à intersecter γ' au point $I(t)$. On note $x(t)$ cette distance.

1. Utilisant la formule (4.2) pour un triangle géodésique, montrer que au premier ordre, $x(t) \ll 1$ est gouverné par « l'équation de Newton » effective
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(t)\, x(t) \tag{4.3}$$
où $k(t)$ est la courbure de Gauss de la surface au point $\gamma(t)$. Noter que la force $F(t) = -k(t)\, x(t)$ est « attractive » si $k(t) > 0$ et « répulsive » si $k(t) < 0$.
2. Résoudre l'équation (4.3) selon que la courbure est positive $k(t) = k_0 > 0$ ou négative $k(t) = k_0 < 0$?