Notes de cours
avec expérience et simulations numériques sur le **chaos**

Frédéric Faure (http://lpm2c.polycnrs-gre.fr/faure/),

15 juin 2001.

Table des matières

Chapitre 1

Route vers le chaos. dans un système mécanique

Dans ce chapitre, nous allons observer comment le chaos peut se manifester dans un système mécanique simple .

Pour cela, nous nous intéressons à un système mécanique particulier, **une "roue pulsée"**, qui est présentée en cours.

On peut aussi voir le comportement de cette roue pulsée (simulation numérique) à l'adresse web : _anim.gif`http://lpm2c.polycnrs-gre.fr/faure/chaos_lic/cours/pendule_anim.gif`.

La démarche de ce chapitre est tout d'abord d'**observer le mouvement chaotique** de cette roue mécanique, puis de **modéliser son mouvement** par un système dynamique simple (Hamiltonien), et enfin d'**approfondir l'observation du chaos**, à l'aide d'une **simulation numérique** de ce système dynamique.

L'approche que nous allons suivre, et les résultats que nous allons obtenir, ne sont pas spécifiques à cette roue pulsée. Ils sont valables au moins de façon qualitative pour beaucoup de systèmes mécanique à peu de degrés de liberté, et nous donnons des exemples dans ce chapitre.

Dans ce chapitre nous nous contenterons d'observer dans quelles conditions le chaos apparait dans un système mécanique. Les explications mathématiques et une description plus précise seront données dans le chapitre suivant.

1.1 Observations de la roue pulsée

1.1.1 Présentation de l'objet, et observations

L'objet mécanique est présenté sur la figure (1.1). Voir aussi le comportement de cette roue pulsée (simulation numérique) à l'adresse web : `http://lpm2c.polycnrs-gre.fr/faure/chaos_lic/cours/pendule_anim.gif`.

Lorsqu'on observe son mouvement, on remarque les caractéristiques suivantes :

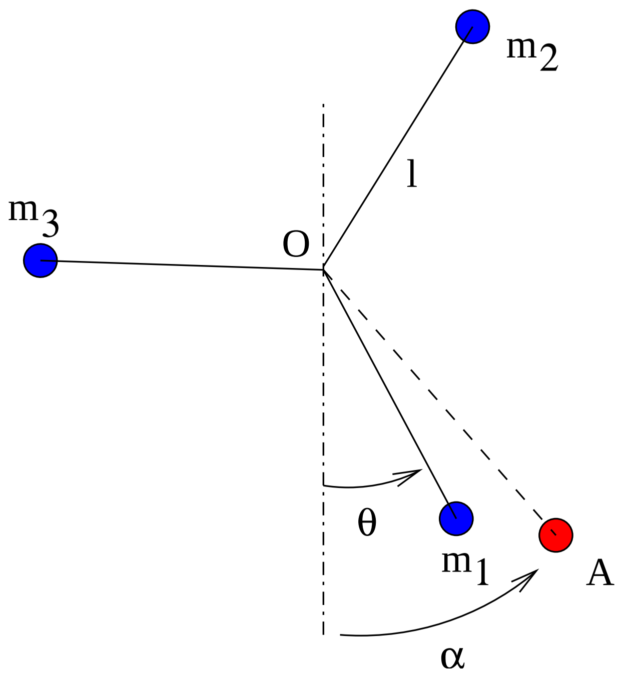

FIG. 1.1 – Modèle de la roue pulsée : l'aimant A qui est lourd, oscille de façon périodique. Les trois masses aimantées m_1, m_2, m_3 sont égales et solidaires, et tournent autour de O sans frottement. mais subissent la force de répulsion de A, en passant près de lui.

- Il y a **1 degré de liberté θ entretenu periodiquement** par l'aimant A**.** (la roue est libre si il n'y a pas d'aimant A). Donc il y a **deux variables dynamiques** :

$$\begin{aligned} \theta \quad & : \text{position angulaire} \\ \omega = d\theta/dt \quad & : \text{vitesse angulaire} \end{aligned}$$

- Les **frottements sont assez faibles** (Se mesurent en laissant la roue tourner seule).
- Il n'y a pas d'influence aléatoire apparente, et en négligeant les petite perturbations que l'on ne controle pas, on peut affirmer que le **système dynamique est déterministe**; On écrira les équations de mouvement au paragraphe suivant. cependant une question se pose : on peut parler de déterminisme sur quelle durée T_{determ} ? (voir discussion plus loin, page38).
- La vitesse angulaire $\omega(t)$ varie, mais reste bornée. Ce n'est pas évident à priori.
- Le **mouvement est chaotique** : L'adjectif "**Chaos"** signifie ici :
  - C**omportement instable, non régulier, imprévisible, hasardeux, très sensible aux conditions initiales.**
  - Dans certains régimes, intermittence du mouvement, qui semble régulier sur certaines durées, avec des "bouffées de chaos".
- Autres observations plus fines : accrochage des fréquences. Attracteurs. Bifurcations des attracteurs (en changeant l'aimant ?).

1.1.2 Modèlisation : équations du mouvement (*)

Modèle

Le modèle est spécifié sur la figure 1.1. Les trois masses m_1, m_2, m_3 sont égales ($= m$) réparties symétriquement autour du point O, à la distance l. Cette symétrie fait que la pesanteur n'intervient pas dans la suite. Les trois masses sont solidaires, et on appelle M cet objet qui est libre de tourner autour de O. On note θ l'angle entre Om_1 et la verticale. θ est **une variable dynamique** libre associé à l'objet M étudié.

A cause d'une grande inertie, on considère que le point A a un **mouvement imposé périodique**. On note α l'angle entre OA et la verticale. On suppose que $\alpha(t)$ est périodique de période T et d'amplitude α_0, et pour simplifier (dans un premier temps, et cela est vrai pour les petites oscillations) on prend :

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 \cos(2\pi \frac{t}{T})}$$

L'aimant A influence chacune des masses aimantée m_i. Si la distance $A - m_i$ est faible, la force s'intensifie, et est répulsive. L'énergie potentielle de l'objet O dépend donc de la différence $|\theta - \alpha|$ et présente un maximum pour $\theta - \alpha = 0$. Il y a aussi un maximum pour les deux autres masses m_2, m_3, donc pour $\theta - (\alpha \pm 2\pi/3) \equiv 0$. La figure 1.2 montre l'allure de cette énergie potentielle $V_M(\theta)$.

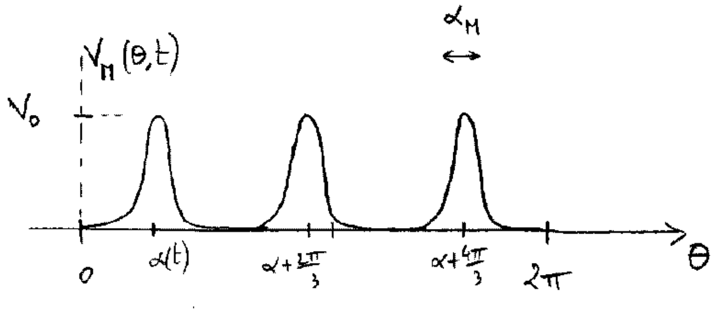

FIG. 1.2 – Allure du potentiel $V_M(\theta)$ subit par chaque masse m_i de l'objet M. Il y a une barrière de potentiel lorsque l'aimant A passe au voisinage d'une des trois masses m_1, m_2, m_3. Cela explique les trois maxima. La largeur de la barrière α_M correspond à la distance angulaire où la répulsion se fait sentir. On estime $\alpha_M \simeq 0.14\,rad \equiv 8\,\text{deg}$.

On propose l'expression suivante pour $V_M(\theta)$, comme étant la superposition de (trois) Lorentziennes, de hauteur V_0, et largeur α_M :

$$V_M(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}(x_k)$$
$$\mathcal{V}(x) = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{x}{\alpha_M}\right)^2}$$
$$x_k = \theta - \alpha + k\frac{2\pi}{3}$$

Remarques :
- Le potentiel $V_M(\theta, t)$ dépend du temps t à travers $\alpha(t)$.
- Le vrai objet mécanique est décentré ; mais le décentrage de l'axe n'intervient pas. (vérifier).
- Grâce à la périodicité en θ, il suffit de s'intéresser à l'intervalle :

$$\boxed{\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[}$$

Equations du mouvement

L'**énergie cinétique** de l'objet M est

$$T = 3\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Son **énergie potentielle** est $V_M(\theta, t)$.
Le **Lagrangien** de l'objet M est donc

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = T(\dot{\theta}) - V_M(\theta, t)$$

Son **impulsion** est

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 3ml^2\dot{\theta}$$

Le **Hamiltonien** (énergie totale) est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\theta, p, t) &= p\dot{\theta} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p^2}{6ml^2} + V_M(\theta, t) \end{aligned}$$

Les **équations de mouvement** de Hamilton sont donc :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{3ml^2} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\frac{\partial V_M}{\partial \theta} \end{aligned}$$

1.1.3 Equations sans dimensions et mesure des paramètres

Pour simplifier l'écriture des équations, on choisit de prendre T (la période de l'aimant extérieur A) comme unité de temps, et on pose :

$$\tau = \frac{t}{T} \quad \text{temps dans dimension}$$

alors, à condition de poser

$$F_0 = \frac{T^2 V_0}{3ml^2} \tag{1.1}$$

les équations équation du mouvement ci-dessus se réécrivent sous **forme Hamiltonienne** :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial H_0}{\partial \omega_0} && (1.2) \\ \frac{d\omega_0}{d\tau} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} && (1.3) \\ & && (1.4) \end{aligned}}$$

avec **le Hamiltonien**

$$\boxed{H_0(\theta, \omega_0) = \frac{1}{2}\omega_0^2 + V(\theta, t)}$$

et **l'énergie potentielle**

$$V(\theta, t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{F_0}{1 + \left(\frac{x_k}{\alpha_M}\right)^2}$$

$$x_k = \theta - \alpha(t) + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 1, 2, 3$$

Ce qui donne aussi :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \omega_0 \tag{1.5}$$

$$\frac{d\omega_0}{d\tau} = F(\theta, t) \qquad -\mu\omega_0 \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

avec **la force**

$$F(\theta, t) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Dans (1.5), on a rajouté une force de frottement, avec un paramètre μ pour modéliser **l'effet des frottements ;** mais ce terme ne permet plus d'écrire les équations du mouvement sous **la forme de Hamilton** (1.2). (sauf si $\mu = 0$).

Les seuls paramètres sans dimension (que l'on évalue sur l'expérience) sont donc :

$$\begin{aligned} \mu &\ll 1, \\ F_0 &\equiv 2500, \\ \alpha_0 &\equiv 1.5, \\ \alpha_M &\equiv 0.14 \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera $\omega = \omega_0$, $t = \tau$ et on utilisera **les variables** (θ, ω) **comme variables dynamiques conjuguées.**

On notera aussi $T = 1$ la période de l'aimant extérieur.

1.1.4 Présentation du programme de simulation

Ce programme est disponible sur phcarism :

Voir les informations sur la feuille du TD2. @@

Le programme est écrit en C++. L'intégration numérique des équations de mouvement (**??**) se fait grâce à **l'algorithme de Runge-Kutta** (on commente cette méthode plus loin).

Le programme de simulation présente trois fenêtres :
- Une fenêtre qui présente le pendule dans l'espace réel.
- Une fenêtre qui présente l'évolution de $\theta(t), \omega(t)$ dans l'espaces des phases, plan (θ, ω).
- Une fenêtre de commandes. La condition initiale peut aussi se choisir à la souris, en cliquant dans l'espace des phases.

A l'aide de ce programme on peut observer le mouvement de l'objet, et faire des études précises comme la construction de sections stroboscopiques, présentées plus loin, ou la mesure de la **sensibilité aux conditions initiales :**

Si lance une trajectoire en θ_0, ω_0, puis une autre avec des conditions initiales θ_1, ω_1 très proches décalées de $\Delta\theta$ ou $\Delta\omega$, on observe sur la simulation une amplification exponentielle de $\Delta\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_0(t)$ par un facteur $\simeq 10^{1.3} \simeq 20$ après chaque période T. Soit à peu près un facteur 10 à chaque seconde. Voir figure 1.3. Cela traduit que deux trajectoires voisines s'écartent l'une de l'autre exponentiellement vite. La situation est décrite qualitativement sur la figure (1.4). Cela s'observe pour presque toutes les conditions initiales.

Il est clair que ce comportement de forte **sensibilité aux conditions initiales est la cause de "l'aspect chaotique" ou "hasardeux" du mouvement.**

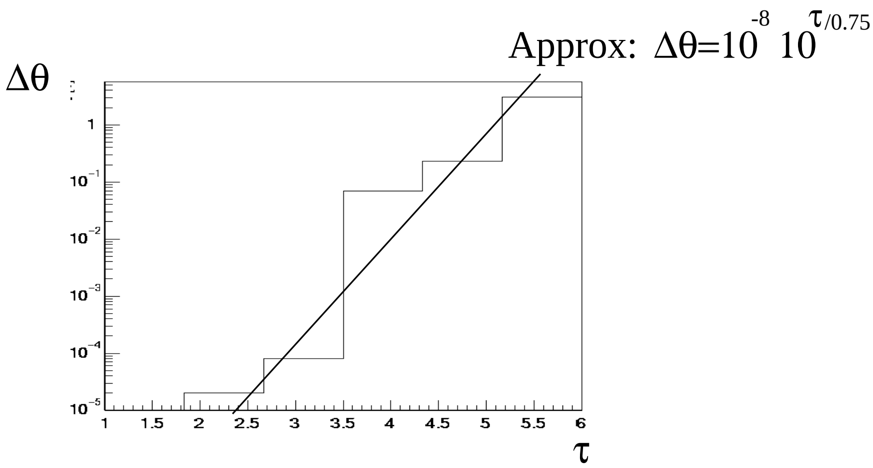

FIG. 1.3 – amplification exponentielle d'une modification initiale $\Delta\theta_0 = 10^{-8} rad$.

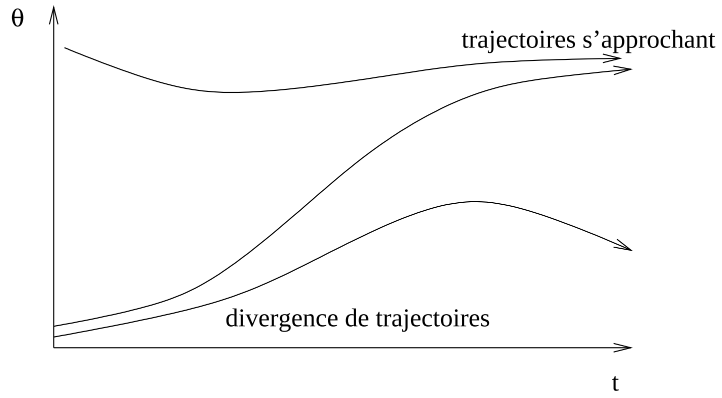

FIG. 1.4 – Dans une dynamique chaotique, deux trajectoires voisines s'écartent ou se rapproche de façon exponentielle. Cela est la cause de "l'aspect chaotique" ou "hasardeux" du mouvement.

1.2 Autres exemples de systèmes mécaniques

Le modèle de la roue pulsée ci-dessus, se caractérise par un objet dont **le mouvement est à une dimension** (ou un degré de liberté), plus précisement caractérisé par une variable dynamique angulaire θ, et subissant une **force périodique extérieure** $F(t)$. **Les frottements sont faibles.**

Voici d'autres systèmes qui ont ces même caractéristiques (en première approximation), pour qui l'analyse de la dynamique qui suit sera donc valable, et qui par conséquent peuvent et doivent manifester un comportement chaotique (selon les conditions).

- **Anneaux de Saturne :** si on considère un caillou qui tourne dans les anneaux de Saturne, à une distance fixe de la planète, sa position est caractérisée par l'angle θ. Son mouvement est perturbé par la force gravitationnelle périodique exercée par Titan, un gros satellite de Saturne.
- **Une boussole** soumise à un champ magnétique fixe, plus un champs magnétique oscillant.
- **Le pendule paramétré :** un pendule avec une longueur de corde $l(t)$ oscillant périodiquement.
- **Une balle de Ping Pong sur une membranne** horizontale qui vibre à la fréquence ω fixée (une membranne de haut parleur par exemple).
- **Autres exemples :**
  - **Accélérateur d'éléctrons** (voir Jackson [7] p35 tome 2)
  - **Modèle de Frenkel-Kontoroa** en physique du solide (atomes sur réseaux). Voir Jackson [7] p 36 tome 2.
  - Rayon en optique géométrique dans une cavité ("billard"). (c'est du "chaos ondulatoire")
  - L'électron d'un atome d'hydrogène avec champ magnétique. (c'est du "chaos ondulatoire" car l'électron est une onde quantique)

– L'oscillateur mécanique de Duffing. (Barre avec force externe magnétique périodique, et frottements légers). voir : `http://www.mcasco.com/pattr1.html`

Exercice : Pour un des exemples ci-dessus, écrire les équations de mouvement qui le modélise, puis écrire un programme pour résoudre ces équations et faire cette simulation.

1.3 Etude de la route vers le chaos

On considère à nouveau le modèle de la roue pulsée définit plus haut, et nous commençons une étude plus précise.

1.3.1 L'espace des phases

L'**espace des phases** est définit comme étant l'espace (θ, p) (ou (θ, ω)) des variables dynamiques des équations de mouvement de Hamilton Eq.(1.2).

A condition d'identifier la position $\theta = \pi/3$ avec la position $\theta = -\pi/3$, remarquons que les différents angles possibles $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$ forment un cercle, et que les différentes vitesses angulaires possibles forment une droite $\omega \in \mathbb{R}$. L'espace de phase est donc **un cylindre**.

Equations du mouvement, cas sans perturbation $F_0 = 0$

Dans eq.(1.1), le paramètre F_0 est proportionnel à V_0. Il mesure **la force de l'aimantation**. En faisant, $F_0 = 0$, (et $\mu = 0$), il n'y a plus d'influence extérieure sur l'objet M, alors $H_0(\theta, \omega)$ **ne dépend pas du temps.** C'est une fonction constante sur l'espace des phases, très simple dans ce cas, car $H_0(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2$(elle ne dépend pas de θ non plus), mais qui pourrait être plus compliquée dans d'autres exemples.

Les équations du mouvement sont **:**

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial H_0}{\partial \omega_0} = \omega \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} = 0\end{aligned}$$

On trouve facilement la solution, pour une condition initiale (θ_0, ω_0) donnée :

$$\begin{aligned}\theta(\tau) &= \omega_0.\tau \\ \omega(\tau) &= \omega_0 = cste\end{aligned}$$

traduisant le fait que l'objet M a un **mouvement libre**. Appelons T_0 la période qu'il faut à l'objet M pour faire un tiers de tour $\theta = -\pi/3 \rightarrow \pi/3$. T_0 dépend de la vitesse angulaire initiale ω_0,

$$\boxed{T_0 = \left| \frac{2\pi}{3\omega_0} \right|}$$

Interprétation géométrique des équations de mouvement : champ de vecteur dans l'espace des phases.

On peut écrire les eq.(1.2) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= V_1(\theta, \omega) \\ \frac{d\omega}{dt} &= V_2(\theta, \omega) \end{aligned}$$

où $V_1(\theta, \omega), V_2(\theta, \omega)$ sont deux fonctions, que l'on peut interpréter comme les composantes d'un champ de vecteur $\vec{V}(\theta, \omega) = (V_1, V_2)$ sur l'espace de phase (θ, ω). Un vecteur $\vec{V}$ s'interprète comme étant une modification infinitésimale du point dans l'espace des phases. Par conséquent, **une trajectoire est une ligne de champ de ce champ de vecteur fixé**. On obtient ainsi les solutions des équations de mouvement.

Dans le cas qui nous intéresse, les composantes sont très simple : $V_1(\theta, \omega) = \omega$, $V_2(\theta, \omega) = 0$, voir la figure 5.

Remarque : en toute généralité, le champ de vecteur ne peut pas être quelconque, car il dérive d'une fonction de Hamilton : $V_1 = \partial H/\partial\omega, V_2 = -\partial H/\partial\theta$. Cela impose des contraintes au champ de vecteur, comme celle de conserver l'aire par exemple (voir paragraphe 2.2.1).

Résolution des équations du mouvement par la construction de Euler

L'interprétation géométrique précédente suggére une méthode de résolution, qui est la construction de Euler.

Comme les équations de mouvement (1.2) sont du **premier ordre par rapport au temps** (i.e. dérivées premières), en découpant le temps en petites tranches dt, on peut faire la construction suivante (même si dans notre exemple, la solution est très simple).

Soit une condition initiale, c'est à dire position initiale θ_0 et vitesse initiale ω_0 de l'objet M à la date t. Cette condition initiale s'interprète comme étant **un point** $M_0 = (\theta_0, \omega_0)$ dans l'espace des phases. Alors on peut calculer le membre de droite des équations de mouvement, donnant les composantes du vecteur $\vec{V}(M_0)$, on obtient les valeurs de ($\frac{d\theta}{dt} = V_1$, $\frac{d\omega}{dt} = V_2$) donc la variation des variables $d\theta = V_1\,dt$, $d\omega = V_2\,dt$, et leur valeur à la date suivante $t + dt$:

$$\theta_1 = \theta_0 + d\theta = \theta_0 + V_1\,dt$$

$$\omega_1 = \omega_0 + d\omega = \omega_0 + V_2\, dt$$

Ainsi de suite, et de proche en proche, cela donne le comportement future du système $M(t) = (\theta(t), \omega(t))$ pour toute valeur de t. Cette méthode s'appelle la **méthode d'intégration de Euler** ; elle donne le résultat exact dans la limite où $dt \to 0$ (**l'erreur est en** $O(dt^2)$).

C'est une méthode possible pour simuler le mouvement avec l'ordinateur. Il y a plus efficace cependant : **la méthode de Runge-Kutta** par exemple, dont l'**erreur est en** $O(dt^5)$.

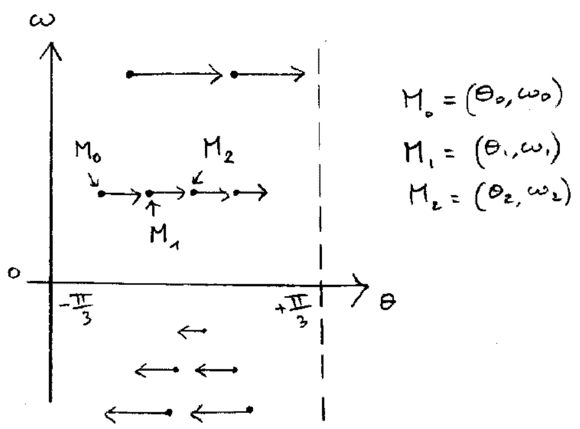

FIG. 1.5 – Construction de Euler des **trajectoires du système non perturbé** ($F_0 = 0$) . Les équations de mouvement donnent un champ de vecteur dans l'espace de phase. Une trajectoire issue de M_0, s'obtient en intégrant ce champ de vecteur. On obtient ici la succession de points proches $(M_0, M_1, M_2, ...)$.

Dans le cas qui nous intéresse, la figure 1.5 représente le champ de vecteur $\vec{V}$ dans l'espace des phases (qui s'interprète comme étant la vitesse d'évolution du point sur une trajectoire). Dans cet espace de phase (θ, ω) on remarque que **toutes les trajectoires sont périodiques** (cela est dû à la conservation de l'énergie), et que naturellement, leur période notée $T_0 = \frac{2\pi}{3|\omega_0|}$ prennent toutes les valeurs possibles, selon la valeur initiale ω_0. Cette période diminue avec les grandes valeurs de $|\omega_0|$.

Intérêt de l'espace des phases

L'**intérêt principal de l'introduction de l'espace de phase et des variables** (θ, ω), est donc l'interprétation géométrique des trajectoires comme étant les lignes de champ d'un certain champ de vecteur fixe. Les conclusions importantes sont d'une part que une **condition initiale** $M_0 = (\theta_0, \omega_0)$ **détermine le comportement ultérieur car une trajectoire unique passe par le point** $M_0 = (\theta_0, \omega_0)$ dans l'espace des phases ; d'autre part la méthode d'intégration consiste à partir d'une condition initiale, et à suivre progressivement les flèches du champ de vecteur, pour obtenir la trajectoire.

Cas avec perturbation ; espace des phases élargi

Si $F_0 \neq 0$ (force extérieure non nulle sur l'objet), les **équations de Hamilton dépendent du temps**, et l'analyse précédente n'est plus tout à fait valable, car cette fois-ci, le champ de vecteur n'est plus fixe, mais dépend du temps : $\vec{V}(\theta, \omega, t) = (V_1(\theta, \omega, t), V_2(\theta, \omega, t))$.

Une conséquence génante est qu'un point (θ_0, ω_0) ne détermine plus une seule trajectoire possible, car elle dépend aussi de la position de l'aimant extérieur A, et donc de la date t. L'objet A a un mouvement périodique de période $T = 1$, et donc il suffit de connaitre la valeur de t modulo T (i.e. t ramené dans l'intervalle $[0, T[$).

Pour se ramener à un champ de vecteur fixé, il faut donc considérer le temps t comme une variable supplémentaire. Il faut donc considérer que le mouvement de l'objet s'effectue dans l'espace **phase élargi avec les trois variables** (θ, ω, t)**,** où θ et t sont considérés comme périodiques.

Bien sûr le temps t se déroule de façon linéaire, et pour cela on introduit un paramètre d'intégration $\lambda \in \mathbb{R}$, et l'équation de mouvement très simple :

$$\frac{dt}{d\lambda} = 1, \quad \Rightarrow \; t \equiv \lambda.$$

(λ est en fait le vrai temps, et t est sa valeur ramenée entre 0 et 1).Les équations de mouvement s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &= V_1(\theta, \omega, t) \\ \frac{d\omega}{d\lambda} &= V_2(\theta, \omega, t) \\ \frac{dt}{d\lambda} &= V_3(\theta, \omega, t) = 1 \end{aligned}$$

définissant un champ de vecteur fixé $\vec{V}(\theta, \omega, t) = (V_1, V_2, V_3)$ dans cet espace de phase élargi de dimension 3, voir fig (1.6).

Comme ci-dessus, si l'on connait une condition iniitale $M_0 = (\theta_0, \omega_0, t_0)$, l'évolution future est complétement déterminée, et s'interprête comme étant la ligne de champ issue de ce point M_0 dans cet espace de dimension 3. La méthode de Euler s'adapte à cette situation, et permet de calculer numériquement les trajectoires.

Bien sûr la variable t est un peu particulière car le temps évolue toujours de façon monotone ($t = \lambda$). Par conséquent chaque trajectoire traverse périodiquement le segment $t = 0 \rightarrow T$, et pour simplifier l'étude d'une trajectoire, il suffit de noter les **intersections de la trajectoire avec le plan** $t = 0$**,** donnant à chaque période T un point (θ, ω) dans l'espace des phases.

La série de points obtenue $M_0 = (\theta_0, \omega_0)$,$M_1 = (\theta_1, \omega_1)$,$M_2 = (\theta_2, \omega_2)$,...représentés dans l'espace des phases s'appelle **la section de Poincaré dans l'espace de phase élargi** et plus partiulièrement dans notre cas, l**a section stroboscopique des trajectoires.** (car elle s'obtient à des intervalles de temps réguliers). Voir figure 1.7.

On rappelle une fois de plus que l'intérêt de cette représentation est qu'**un point de la section stroboscopique détermine une trajectoire unique.**

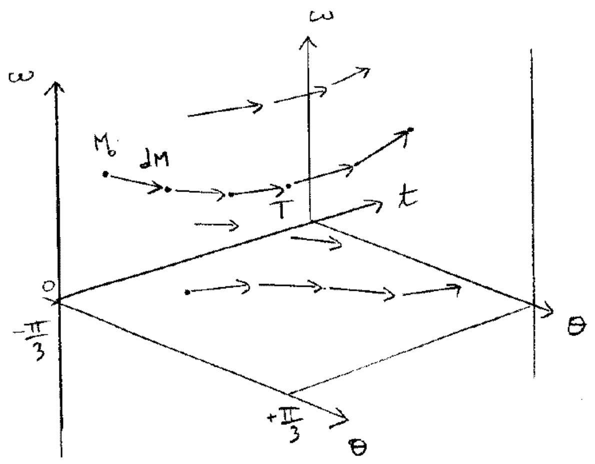

FIG. 1.6 – Trajectoires dans l'espace des phases élargi (θ, ω, t) (pour perturbation F_0 quelconque) obtenues par intégration du champ de vecteur.

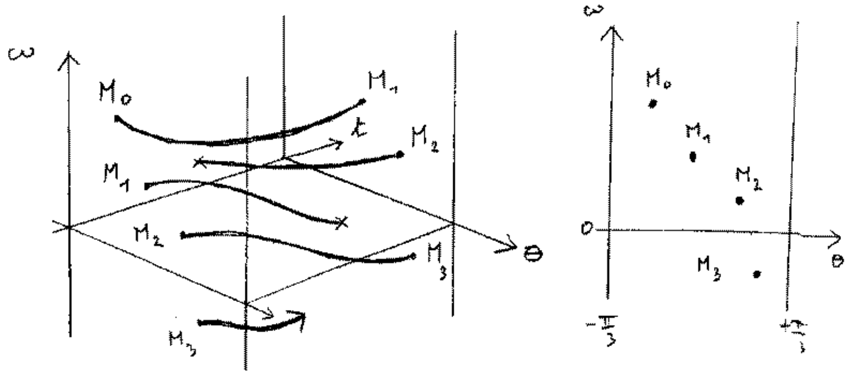

FIG. 1.7 – Section stroboscopique (points $M_0, M_1, M_2, \ldots$) obtenus par l'intersection de la trajectoire dans l'espace des phases élargi avec le plan $t \equiv 0$.

Remarque importante sur le chaos déterministe

Voici la remarque très importante qui fait que déjà l'on peut présentir pourquoi le chaos déterministe existe : les lois du mouvement peuvent être **très simples** (comme dans notre cas eq.(1.2)) donnant un champ de vecteur très simple et régulier dasn l'espace de phase. Mais cela n'empêche pas que les trajectoires résultantes (les lignes de champ obtenues par intégration) peuvent être **très complexes,** et donner un comportement "**chaotique"** de la trajectoire. Tout le paradoxe du chaos est ici. Dans certains cas, la trajectoire résultante peut être très simple (le cas d'un mouvement périodique par exemple), dans d'autres cas (la plupart des cas en fait) elle peut être si complexe, qui est impossible de la connaitre, sans autre moyen que de faire l'expérience, ou de la construire avec un ordinateur, en commettant des erreurs de précision bien sûr.

Dans la suite, on se propose d'étudier néanmoins ce problème à savoir **le devenir aux temps longs d'une trajectoire**, et de voir dans quels cas la trajectoire peut être "complexe", et ce que l'on peut en dire.

Puisque l'on a bien présenté le cadre géométrique qui permet d'observer correctement l'évolution de notre système, on passe maintenant à l'étude des trajectoires.

1.3.2 Section stroboscopique des trajectoires non perturbées $F_0 = 0$

On a vu que les trajectoires du système non perturbé ($F_0 = 0$) sont périodiques et s'observent dans l'espace des phases (θ, ω). Mais puisque qu'il faut considérer l'espace des phases élargi dans le cas perturbé ($F_0 \neq 0$), on va aussi le faire tout de suite dans le cas ($F_0 = 0$).

Représentation dans l'espace de phase élargi et section stroboscopique

La figure (1.8) montre qualitativement les trajectoires dans l'espace de phase élargi. Comparer avec la figure (1.5).

Exercice Pour chacune des valeurs suivantes de la période T_0 de la trajectoire, $\frac{T_0}{T} = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{p}{q}, \sqrt{2}$ (avec $\varepsilon \ll 1$, et p, q entiers premiers entre eux),

1. donner la valeur de ω_0 correspondante,
2. tracer une trajectoire correspondante sur le plan (θ, t) à $\omega = \omega_0 = cste$,

Et placer toutes cette trajectoires sur une même section stroboscopique (θ, ω) à $t = 0$.

Remarque : lorsque $\frac{T_0}{T} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est rationnel, on dit que la trajectoire correspondante est en **résonance p :q avec la force périodique extérieure.**

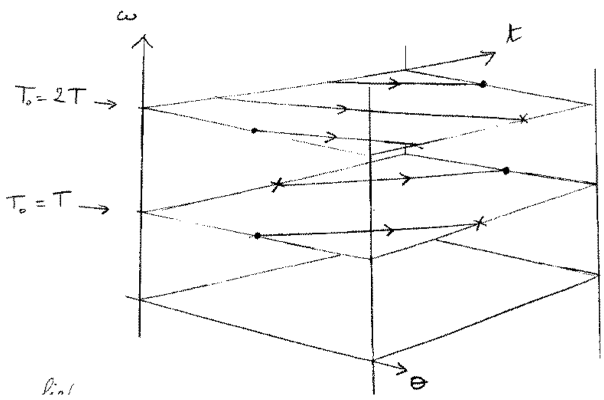

FIG. 1.8 – Trajectoires non perturbées dans l'espace des phases élargi (θ, ω, t). Toutes les trajectoires sont dans un plan $\omega = cste$. On a représenté les trajectoires périodiques (résonances 1 :2 et 1 :1).

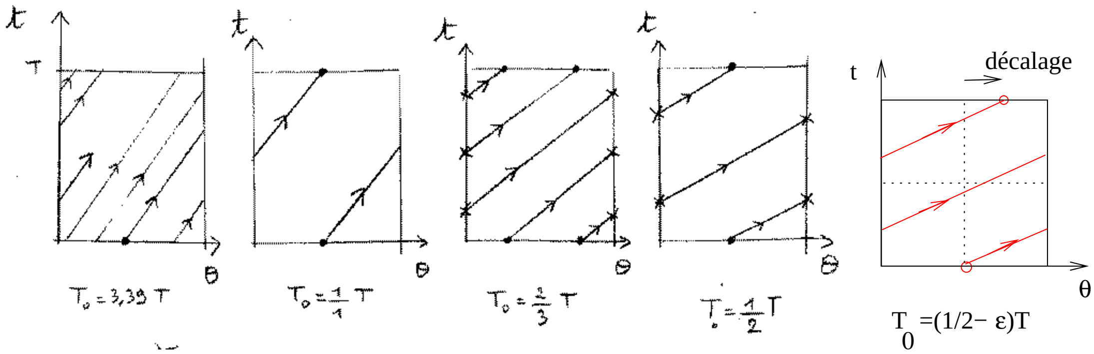

FIG. 1.9 – Trajectoires non perturbées dans l'espace des phases élargi (plans $\omega = cste$). Cas d'une trajectoire quasi-périodique, et de trajectoires périodiqes.

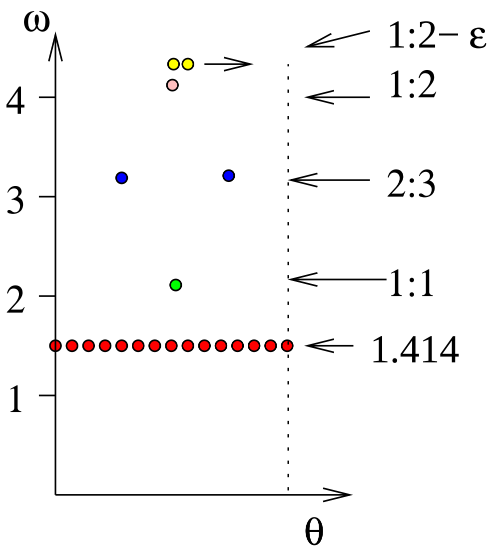

FIG. 1.10 – Trajectoires sur la section stroboscopique pour $F_0 = 0$.

Solution

- Si $T_0 = T = \frac{1}{1}T$, (résonance 1 :1) Cela correspond à $\omega_0 = 2\pi/3 \simeq 2.1$. Il y a 1 point sur la section, et la trajectoire a parcouru 1 fois l'intervalle $\theta \in [0, 2\pi/3[$ avant de se refermer.
- Si $T_0 = 0.5T = \frac{1}{2}T$, (résonance 1 :2), Cela correspond à $\omega_0 = 4\pi/3 \simeq 4.2$. Il y a 1 point sur la section, et la trajectoire a parcouru 2 fois l'intervalle $\theta \in [0, 2\pi/3[$ avant de se refermer.
- Si $T_0 = 0.66T = \frac{2}{3}T$, (résonance 2 :3), Cela correspond à $\omega_0 = \pi \simeq 3.14$. Il y a 2 points sur la section, et la trajectoire a parcouru 3 fois l'intervalle $\theta \in [0, 2\pi/3[$ avant de se refermer.

On déduit que si T_0 est quelconque,

- Soit il peut s'écrire $T_0 = \frac{p}{q}T$, (résonance p :q), c'est à dire que $T_0/T = p/q$ est **un nombre rationnel**. Alors il y a p points sur la section, et la trajectoire a parcouru q fois l'intervalle $\theta \in [0, 2\pi/3[$ avant de se refermer ; on parle **de trajectoires périodique** dans l'espace de phase élargi.
- Soit T_0/T **est un nombre irrationnel**, (autrement dit $T_0/T = p/q$ seulement avec des valeurs de p, q arbitrairement grandes) et alors la trajectoire ne se referme pas. On observe une ligne dense sur la section. C'est la cas par exemple si $T_0 = 1.414..T = \sqrt{2}T$, donnant $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \simeq 0.48$. (sachez que le nombre "le plus irrationnel" est **le nombre d'or** $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0.618$.)

Dans ce dernier cas, la trajectoire n'est pas périodique dans l'espace de phase élargi, mais pourtant θ se déroule de façon périodique et t aussi. On dit que **la trajectoire est quasi-périodique** dans l'espace de phase élargi.

Tore périodiques et tore quasi-périodiques

Lorsque la trajectoire est périodique (résonance p :q), on a vu qu'il y a p points sur la section stroboscopique. En changeant la valeur de θ initiale, on obtient une autre trajectoire qui donne d'autres points décalés sur la section. Toutes ces trajectoires possibles (ayant la même valeur de ω) forme une surface, une nappe dans l'espace élargi (θ, ω, t). Cette surface est en fait **un tore,** car il faut tenir compte de la périodicité en θ, et en t. On emploira donc le terme "tore" dans la suite, pour mentionner cette surface (trajectoire représentée dans l'espace de phase élargi).

Sur la section, cette surface donne une ligne, qui n'est autre que la trajectoire non perturbée représentée dans l'espace de phase (θ, ω).

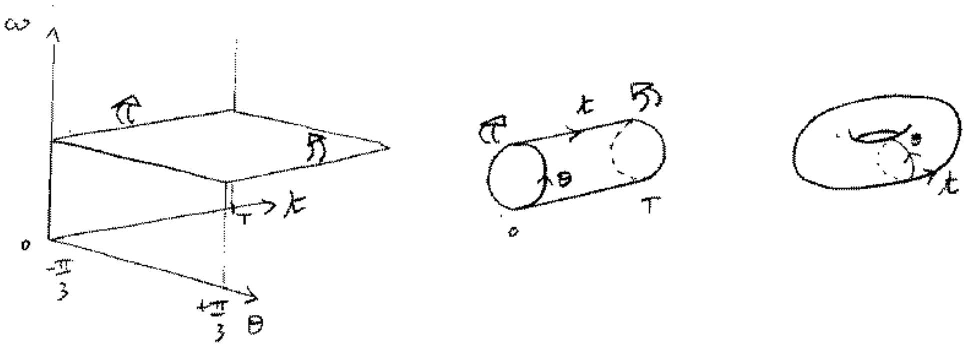

FIG. 1.11 – A cause de la périodicité en θ et t, les surfaces $\omega = cste$ contenant les trajectoires, ont bien la topologie d'un tore.

Dans ce paragraphe, on a donc bien compris la structure des trajectoires dans l'espace de phase élargi, et leur apparence sur la section stroboscopique dans le cas du système non perturbé. Il est déjà apparu (de façon un peu artificielle) le rôle joué par les nombres rationnels pour **les tores périodiques**, et irrationnels pour **les tores quasi-périodiques.**

1.3.3 Observation numérique des trajectoires du système perturbé $F_0 \neq 0$

Dans ce paragraphe, on va utiliser la simulation sur ordinateur pour observer le comportement des trajectoires du système perturbé, et essayer de mettre en évidence quelques lois générale des systèmes dynamiques, afin de comprendre l'origine du chaos. Les explications des phénomènes observés ici seront données dans le chapitre suivant (plus technique).

On prend les paramètres suivants :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_M = 0.5$$

La fenêtre des vitesse angulaires est $\omega = 0 \rightarrow 9$, et le paramètre F_0 est variable.

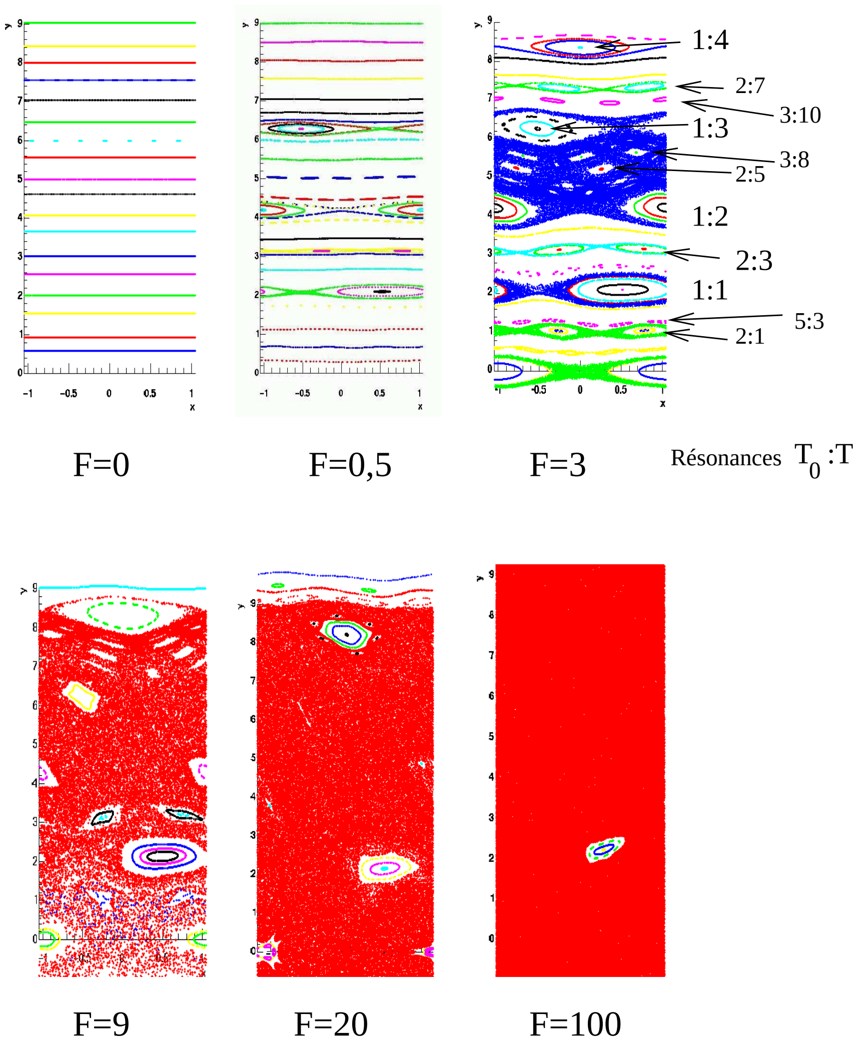

FIG. 1.12 – Sections stroboscopiques des trajectoires pour différentes forces de l'aimant F_0. On observe la transition d'un comportement régulier pour $F_0 = 0$, vers un comportement très chaotique pour $F_0 = 100$.

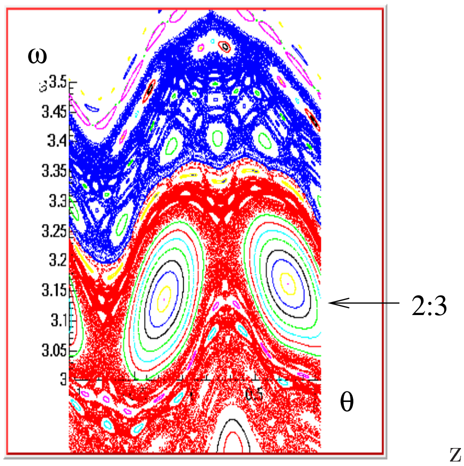

FIG. 1.13 – Détail de la section pour $F = 3$. On apercoit une structure infiniment fine de résonances.

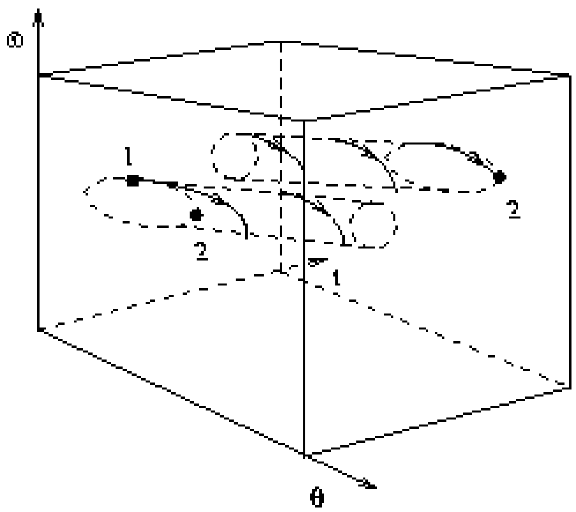

FIG. 1.14 – Un ilot elliptique associé à la résonance 1 :1 dans l'espace de phase élargit (θ, ω, t). Il forme un tube (un tore). L'intersection de ce tore avec la section $t = 0$, est "l'ellipse" observée sur la figure 1.12, pour $F = 3$, (1 :1). Une trajectoire s'enroule sur ce tore, et intersecte la section stroboscopique en une série de points $1, 2, \ldots$ situés sur l'ellipse.

(Le cas $F_0 = 0$ a été étudié ci-dessus.)

Sur ces figures de sections stroboscopiques, une condition initiale (θ_0, ω_0) donne une trajectoire (série de points sur la section stroboscopique θ, ω), représentés par la même couleur. (Mais une même couleur sert pour plusieurs trajectoires). On observe en gros **deux sortes de trajectoires :**

1. des trajectoires qui donnent des **courbes 1 dimension** (lignes ou lignes courbes, ou ilots elliptiques,..) correspondant à **un comportement régulier.** Voir aussi figure 1.14, pour la signification des ilots elliptiques.
2. des trajectoires qui donnent des points **se répartissant en surface** (à 2 dimensions) correspondant **à un comportement chaotique.** Par exemple dans la dernière figure ($F_0 = 100$), la zone rouge est obtenue par une seule condition initiale.

Observation de l'objet M par simulation pour $F_0 = 100$: (faire TP no2)

- Pour une trajectoire dans un ilot (courbe 1D) à $\theta = 0.29$,$\omega = 2.3$, on observe bien un comportement régulier,
- Si on prend la condition initiale $\theta = 0$,$\omega = 0$, dans une surface 2D, le comportement est chaotique.

Observation de la route de l'ordre vers le chaos

On observe lorsque la perturbation F_0 augmente que :
- **des ilots elliptiques** apparaissent à la place des tores périodiques (résonances $p : q$) (voir $F_0 = 0.5$, $F_0 = 3$)
- **Du chaos se développe sur les points hyperboliques** entres les ilots elliptiques. (voir $F_0 = 3$,$F_0 = 9$).
- Entre les ilots, des courbes 1D persistent à exister appellées **Tores KAM** entre les ilots, là où il y a des tores quasi-périodiques. (voir $F_0 = 0, 5$, $F_0 = 3$)
- Plus on augmente la perturbation, plus **le chaos envahit l'espace des phases,** et engloutit les ilots. (voir $F_0 = 9, 20, 100$).

Remarque :

Cette description à été développée depuis Poincaré au siècle dernier ; Un célèbre théorème décrit ce comportement lorsque la perturbation F_0 augmente : **le théorème KAM** (Kolmogorov, Arnold, Möser). Nous présentons quelques aspects de ce théorème dans la section suivante.

Conclusion : l'ordre cède la place au chaos lorsque F_0 augmente, mais **l'ordre et le chaos coexistent dans l'espace des phases** (le choix se fait selon la condition initiale θ_0, ω_0, t_0).

1.4 Le chaos dans le système solaire

- Comme expliqué plus haut (section 1.2), l'étude précédente s'applique qualitativement pour les caillous situés dans les anneaux de Saturne. On déduit que pour certaines périodes T_0 des anneaux, en rapport rationnel $T_0 = \frac{p}{q}T$ avec la période T **du satellite Titan** qui est la principale influence externe, les trajectoires vont développer du chaos et des ilots. La conséquence du chaos dans ce cas, est que la trajectoire des caillous va fortement fluctuer, au risque de rencontrer sous peu un autre caillou. Une telle collision a ensuite pour effet d'ejecter les caillous de leur orbite, et donc de dépeupler la région où il y a du chaos. Par conséquent, il ne reste en orbite dans les anneaux que les caillous situés sur des trajectoires non résonnantes (tores KAM). **Les fameuses divisions ("gap")** observées sont donc **des zones de résonances,** où les caillous ont été ejectés dans un passé lointain, à cause du caractère chaotique des trajectoires. La plus fameuse de ces divisions visible de la Terre est **la division de Cassini,** voir figure(1.15)**.** Par exemple, dans la figure 1.12, pour $F_0 = 3$, on devrait observer des divisions pour $\omega \simeq 1$, $\omega \simeq 2$,$\omega \in [4-7]$.

FIG. 1.15 – Saturne et ses anneaux.

- Ce genre d'analyse peut être rendu rigoureux et quantitatif ; il a permet inversement de **prédire l'existence et la période de certains satellites d'Uranus,** en observant les gaps dans les anneaux de ceux-ci. (sur la prédiction de Satellites d'Uranus, cf Arnold [2] p79)
- De même la répartition des millions d'astéroïdes situés entre mars et Jupiter, montre clairement la présence de zones résonantes rationnelles : les zones en résonance rationnelle avec la période de Jupiter, sont généralement vide d'astéroides, appellés **gaps de Kirkwood (1866**), (voir cf Arnold [2] p78-80) (Gutzwiller [6] section 9.2). Pour la même raison que dans les anneaux de Saturne, des collisions fréquentes dans ces zones chaotiques ont ejecté les astéroides présents. (Voir http ://ssd.jpl.nasa.gov/orbit_diagrams.html). Voir figure 1.16.
- Des études récentes (J. Laskar) montrent que sur une échelle de temps de l'ordre de1 millard d'années, les trajectoires des planètes (Venus, Terre,Mars,...) sont chaotiques,

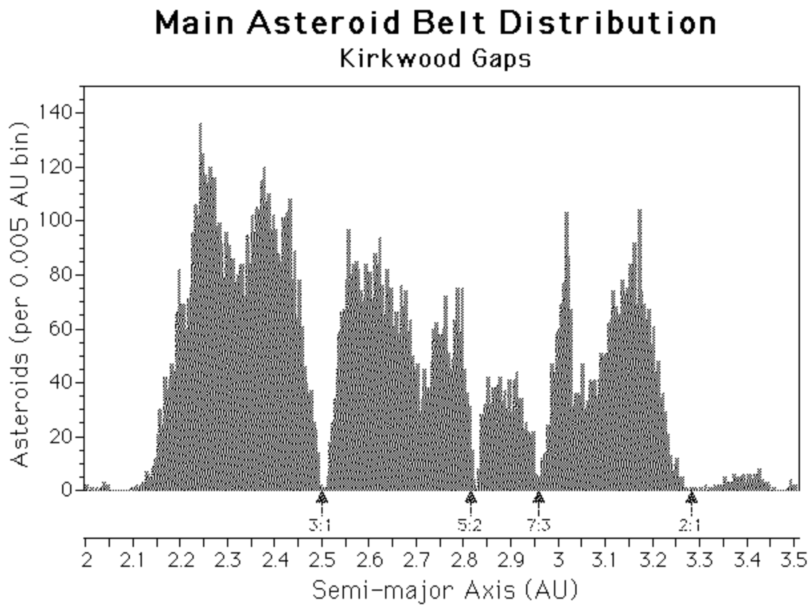

FIG. 1.16 – This histogram clearly shows the primary Kirkwood gaps in the main asteroid belt. These gaps (labeled "3 :1", "5 :2", "7 :3", "2 :1") are caused by mean-motion resonances between an asteroid and Jupiter. For example, the 3 :1 Kirkwood gap is located where the ratio of an asteroid's orbital period to that of Jupiter is 3/1 (the asteroid completes 3 orbits for every 1 orbit of Jupiter). The effect of these mean-motion resonances is a change in the asteroid's orbital elements (particularly semi-major axis) sufficient to create the gaps in semi-major axis space.

mais dans des intervalles de distance planète-Soleil, qui ne rencontrent pas. Cela explique que il n'y a pas eu de collisions. Mais cela suggère que des collisions entre grosses planètes se sont produites au débuts du système solaire, et qu'il ne reste que les planètes "survivantes" que nous connaissons.

Chapitre 2

Aspects théoriques des systèmes dynamiques

En général : Par Chaouqi.
Points fixes de la dynamique et stabilité
Cycles limies
TP3

Pour syst. Hamiltonien Par Fred.
,Ilots elliptiques, th. KAM,
mapping chat ou boulanger.
Effet de la dissipiation.
TD-TP4

2.1 Route vers le chaos dans un système mécanique Hamiltonien

Dans cette section plus technique, on justifie en partie les comportements observés dans le chapitre (1).

Références : Arnold [1] p117, p405, Arnold et Avez [3]p68

2.1.1 Existence des Tores KAM (Théorème de Kolmogorov 1954)

Concernant le modèle mécanique ci-dessus, ce théorème dit :

Pour une perturbation F_0 suffisament petite, il subsiste des tores invariants quasi-périodiques (courbes 1D dans la section de Poincaré) qui sont voisins des tores invariants quasi-périodiques (i.e. T/T_0 irrationnel) du système non perturbé. Ces tores remplissent presque tout l'espace de phase lorsque $F_0 \to 0$.

C'est bien ce que l'on a observé dans le modèle numérique ci-dessus pour $F_0 = 0 - 0.5 - 3$.

Remarques :

– Kolmogorov n'a jamais publié ce théorème. Arnold et Moser ont ensuite donné d'autres démonstrations. Cela forme le théorème K.A.M.

La démonstration est très technique, et repose sur l'existence d'un changement de coordonnées $(\theta,\omega) \to (\theta',\omega')$ canoniques qui transforment la dynamique pour $F_0 \neq 0$ faible, dans le voisinage d'ancien tores quasi-périodiques, en la dynamique régulière du cas $F_0 = 0$. (Voir Arnold [1] p411 ou Arnold-Avez [3] p68.)

2.1.2 Apparition des ilots elliptiques, et des points hyperboliques (Théorème de Birkhoff)

L'explication qui suit est très esthétique car géométrique, et sans calcul.

Dans la suite, on s'intéresse **à la résonance 1 :1**, l'étude des autres résonances p :q est similaire. On considère donc pour $F_0 = 0$, les trajectoires situées à $T_0/T = 1/1$ soit à $\omega_0 = 2\pi/3 \simeq 2.1$. Comme expliqué ci-dessus (figure 1.9), chaque trajectoire donne un point sur la section de Poincaré. Toutes ces trajectoires donnent une ligne Γ_0 sur la section de Poincaré à $\omega = \omega_0$.

Le théorème de Birkhoff dit :

Pour $F_0 \neq 0$ suffisament petit, il y a aura k points fixes stables (ilots elliptiques) et k points fixes instables (points hyperboliques) à la place de Γ_0, avec k entier. (souvent, comme sur notre exemple $k = 1$).

Voici la démonstration très géométrique :

Appelons S, une itération de l'application stroboscopique : $M_{i+1} = S(M_i)$.

Pour $F_0 \neq 0$, suffisament petit, d'après le théorème de Kolmogorov, il y a un tore quasi-périodique Γ_+ invariant qui persiste pour $\omega = \omega_+ > \omega_0$ proche de ω_0, (si T/T_0 est suffisament irrationnel) ; autrement dit $S(\Gamma_+) = \Gamma_+$. On a $\omega_+ > \omega_0$, donc $T_+ < T_0$, mais T_+ est proche de T_0. Par conséquent, sur la section stroboscopique, une trajectoire de Γ_+ donnera une succesion de points se déplaçant vers la droite. Voir figure 2.1.

De même il y a un tore quasi-périodique invariant Γ_- qui persiste pour $\omega = \omega_- < \omega_0$ proche de ω_0, donnant une succession de points se déplaçant vers la gauche, sur la section stroboscopique. On a aussi $S(\Gamma_-) = \Gamma_-$.Sur la section, Γ_0 se situe entre Γ_- et Γ_+.(Mais attention, Γ_0 n'est pas invariant : $S(\Gamma_0) \neq \Gamma_0$).

A θ fixé (quelconque), considérons les points M_ω sur le segment θ fixe, $\omega = \omega_- \to \omega_+$. D'après ci-dessus, le points $S(M_{\omega_-})$ est à gauche de M_{ω_-}, et le point $S(M_{\omega_+})$ est à droite de M_{ω_+}. Par continuité, il y a un point intermédiaire, M_{ω_f} tel que $S(M_{\omega_f})$ reste sur le segment θ fixé. On peut trouver un tel point pour chaque valeur de θ, et cela donne une courbe Γ_f (de coordonnées $(\theta, \omega_f(\theta))$).

Soit la courbe $\Gamma_{f'} = S(\Gamma_f)$ l'image de la courbe Γ_f par une itération de l'application stroboscopique. La courbe $\Gamma_{f'}$, peut se situer n'imorte où, mais cependant elle doit intersecter la courbe Γ_f un nombre $2k$ pair de fois, avec k entier. ($2k = 2$ sur la figure 2.1). La raison est que l'application $S()$ **conserve l'aire dans l'espace des phases** (θ,ω), d'après le théorème de Liouville, car elle provient des équations de Hamilton. (Voir démonstration ci-dessous, section 2.2.1) ; les aires $\mathcal{A} = (\Gamma_-, \Gamma_f)$ et $\mathcal{A} = (\Gamma_-, \Gamma_{f'}) = S(\mathcal{A})$ comprises entre les courbes (Γ_- et Γ_f) et (Γ_- et $\Gamma_{f'}$) sont donc égales. Cela oblige les courbes Γ_f et $\Gamma_{f'}$ à se couper un nombre pair de fois : $2k$.

Dans la suite on suppose que $k = 1$, comme sur notre exemple.

Les points d'intersection $\Gamma_f \cap \Gamma_{f'}$ sont donc deux points fixes (E,H) de l'application S ; voir figure 2.1. Près du point E, le déplacement des points tournent autour de E ; E est donc un **point fixe elliptique**, et **un ilot des trajectoires** autour de ce point. Près du point H, le déplacement des points montrent que H est un **point fixe hyperbolique**.

On déduit donc que pour $F_0 \neq 0$, suffisament petit, il apparait, à la place de la courbe Γ_0, 1 ($k = 1$) ilot elliptique E, et 1 ($k = 1$) point fixe hyperbolique H. Le déplacement des points est schématisé sur la figure 2.2.

Remarque : pour l'étude d'une résonance générale p :q, il suffit de considérer l'application S^p. L'analyse précédente s'applique alors.

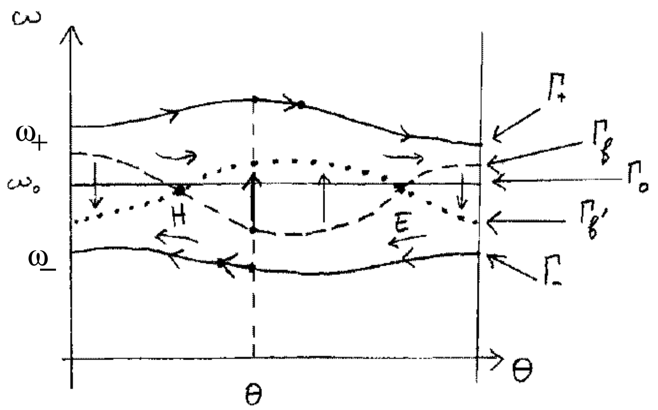

FIG. 2.1 – Construction de Poincaré des coubes de points Γ_f, et $\Gamma_{f'}$ son image par l'application stroboscopique. Un point de $M \in \Gamma_f$ se déplace verticalement pour donner $M' = S(M) \in \Gamma_{f'}$. Les deux points H et E situés aux intersection $\Gamma_f \cap \Gamma_{f'}$ sont donc des points fixes.

2.1.3 Développement du chaos près des points hyperboliques (Construction de Poincaré 1899)

Dans la section précédente, on a vu que les points situés sur l'ilot elliptique tournent autour du point E ; ils ont donc **un mouvement très régulier**.

Dans cette section, on étudie la trajectoire des points situés près du point fixe hyperbolique H, et on montre que leur trajectoire est au contraire très instable et "très chaotique". On va obtenir un modèle très simple qui reproduit le comportement de leur trajectoire,

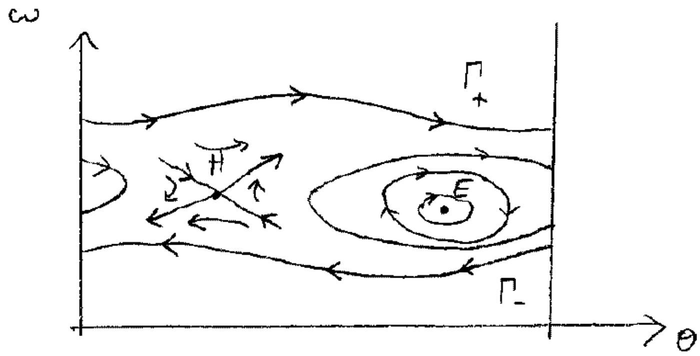

FIG. 2.2 – La construction de Poincaré montre que à la place du tore résonant 1 :1, il apparait 1 ilot elliptique E, et un point fixe hyperbolique H, encadré par deux tores invariants quasi-périodiques Γ_+, Γ_-.

appelé le modèle de l'**application du boulanger,** qui est très mélangeante.(Il s'agit du travail du boulanger qui étire et replie sa pâte pour faire de la pâte feuilletée, afin de bien mélanger le beurre).

Cette construction est due à Poincaré (1899).

Courbes stables et instables

Près du point fixe instable H, il y a quatre directions privilégiées : les points s'éloignent de H selon deux directions dites instables, et les points s'approchent de H selon deux directions dites stables.

On définit les (deux) **courbes stables** C_s comme étant précisement l'ensemble des points qui s'accumulent sur H pour $t \to +\infty$. Pour le moment on ne sait pas comment ces deux courbes se prolongent pour $t \to -\infty$. Voir figure 2.4.

De même on définit les (deux) **courbes instables** C_i comme étant précisement l'ensemble des points qui s'accumulent sur H pour $t \to -\infty$. Pour le moment on ne sait pas comment ces deux courbes se prolongent pour $t \to +\infty$.

Rappel : dans le cas du pendule simple, voir figure 2.3, il y a un point fixe H hyperbolique, et une courbe instable de H se prolonge pour donner une courbe stable de H dans l'espace des phases (θ, ω) du pendule. Cette "coincidence" est due à la conservation de l'énergie qui n'a pas lieu ici pour $F_0 \neq 0$. Donc ici, il n'y a aucune raison pour que ces deux courbes C_s et C_i se rejoignent. Elles vont donc se couper (peut etre plusieurs fois) en un point I. Voir figure 2.4.

Ce point d'intersection $I = C_s \cap C_i$ est appelé **point homocline**.

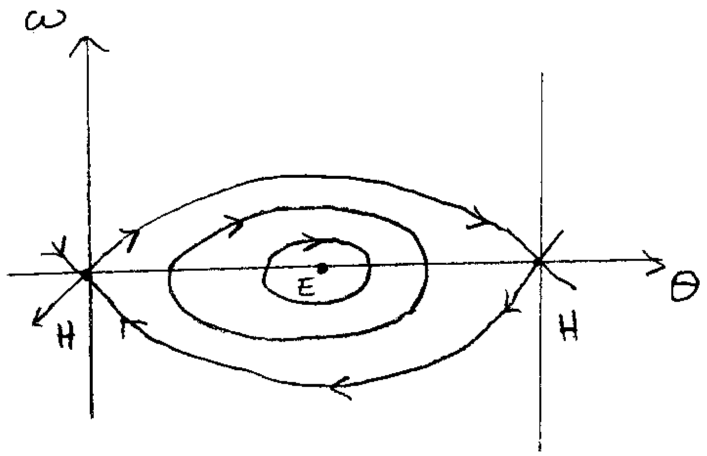

FIG. 2.3 – Trajectoire du pendule simple : il y a un point fixe instable H (hyperbolique), et un point fixe stable E (elliptique). On observe que la courbe instable, issue de H, rejoint la courbe stable qui va asymptotiquement vers H.

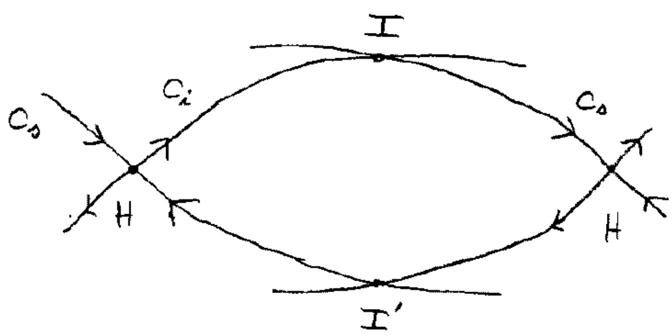

FIG. 2.4 – Courbes stables C_s et instables C_i issues du point fixe hyperbolique H. Elles s'intersectent aux points homoclines I et I'.

Trajectoires homoclines

Considérons le point homocline $I_0 = I$ défini ci-dessus. Voir figure 2.5. Par construction, son image $I_1 = S(I_0)$ appartient à la fois à C_s et C_i. On déduit que C_i forme deux boucles B_0, B'_0 avant de recouper C_s en I_1. (Il y a au minimum deux boucles et non pas une car l'orientation des intersections doit être conservée) ; il y a une intersection intermédiaire J_0. Ainsi de suite : C_i forme deux boucle B_n, B'_n après avoir coupé C_s en I_n, et avant de le recouper en $J_n$et I_{n+1}. Voir figure 2.5. (Remarque : une boucle B_n correspond à un ensemble de trajectoires.)

On a donc $B_{n+1} = S(B_n)$, et donc les boucles $B_0, B_1, B_2 \ldots$ ont toutes la même aire, car l'application S conserve l'aire. Par ailleurs, on sait que les points $I_1, I_2, \ldots$ s'accumulent vers H en se rappochant exponentiellement ; on déduit donc que les boucles B_n deviennent plus fines, et aussi plus longues, **elles s'étirent exponentiellement,** car leur surface est constante. Mais chaque boucle B_n est comprise entre les courbes invariantes Γ_-, et Γ_+ : la place où elles sont est limitée. On déduit donc que l**es boucles B_n se replient** sur elles même en même temps qu'elles s'étirent.

Remarque : la suite de points homocline $I_n = \ldots, I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1, I_2, \ldots$ est très particulière car elle s'accumule vers H à la fois pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$. On appelle cette suite de points **une trajectoire homocline**. Elle est à la base de la construction que l'on a faite des boucles B_n.

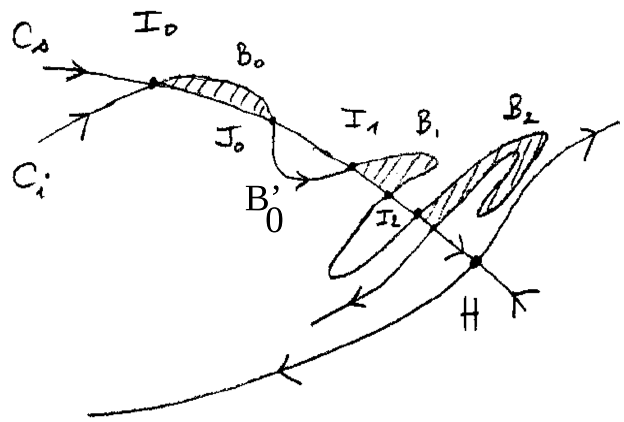

FIG. 2.5 – La surface achurée de la boucle B_n est étirée et repliée au cours de l'évolution. Cela mélange les trajectoires et est à l'origine du chaos.

La transformation du Boulanger

On vient de voir que la surface de la boucle B_n est conservée, mais **étirée et repliée** au cours de l'évolution, près du point hyperbolique H. Cela a pour effet de mélanger les trajectoires très fortement, et **ce mécanisme est à l'origine du chaos.**

On peut simplifier ce mécanisme, en gardant sa propriété de mélange, en considérant l'application dite du Boulanger qui agit sur une surface carrée, voir figure 2.6.(Cette application res à l'action que fait le boulanger pour mélanger le beurre à la pate dans la recette de la pate feuillettée).

Ce modèle très simple génère un "chaos très fort".

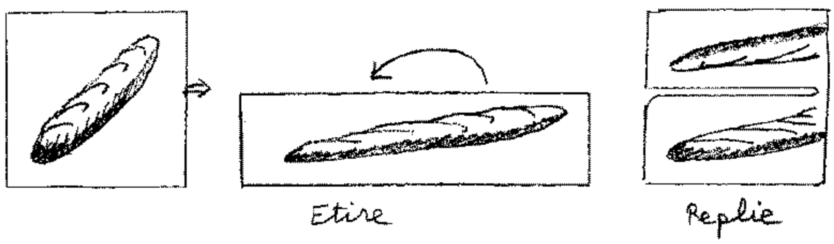

FIG. 2.6 – "L'application du boulanger" est en deux étapes : (1) on étire la surface du carré, et (2) on replie, en coupant et superposant, afin d'obtenir un carré. L'itération de cette application crée un mélange complet ("chaos").

Exercice

1. Ecrire les équations $B : (x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1})$ qui définissent l'application du Boulanger.
2. Montrer que deux orbites voisines se séparent exponentiellement vites.

2.2 Dissipation dans un système mécanique

2.2.1 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

On appelle **système conservatif,** un système dynamique dont les équations de mouvement s'écrivent avec un **Hamiltonien,** comme les équations (1.2). Le terme conservatif vient d'une propriété essentielle des systèmes Hamiltoniens qui est que **l'aire dans l'espace des phases est conservée.** C'est le théorème de Liouville.

Rappel de la démonstration du théorème de Liouville (voir Arnold [1] p.75) on note $\vec{x} = (\theta, \omega)$ la position d'un point dans l'espace des phases à l'instant $t = 0$. On note $\vec{x}(t) = G(\vec{x}, t)$ l'application qui donne la position du point à la date t. Pour $t \ll 1$, on peut faire un développement limité, et écrire

$$\vec{x}(t) = G(\vec{x}, t) \simeq \vec{x} + \vec{f}(\vec{x}, t).t + O(t^2)$$

autrement dit $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$.

Considérons maintenant un élément de surface $D(0)$, qui évolue pour donner $D(t)$. On note $s(t)$ sa surface. Alors

$$s(t) = \int_{D(t)} d\vec{x}(t) = \int_{D(0)} \det \left| \frac{\partial \vec{x}(t)}{\partial \vec{x}(0)} \right| d\vec{x}(0)$$

d'après la formule de changement de variables, avec le Jacobien. Pour $t \ll 1$, on a

$$\det \left| \frac{\partial \vec{x}(t)}{\partial \vec{x}(0)} \right| = \det(1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} t + O(t^2)) = 1 + t \quad Trace(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}) + O(t^2)$$

car pour une matrice A quelconque, $det\,(1 + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon Trace\,(A) + o(\varepsilon)$.

or $Trace(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = div(\vec{f})$, donc la variation de surface du domaine $D(0)$ est

$$\frac{ds(t)}{dt}_{/t=0} = \int_{D(0)} div(\vec{f}).d\vec{x} \tag{2.1}$$

Dans le cas des équations de Hamilton (1.2), on obtient que $\vec{f}(\vec{x}) = (\frac{\partial H}{\partial \omega}, -\frac{\partial H}{\partial \theta})$, donc

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(-\frac{\partial H}{\partial \theta}\right) = 0$$

par conséquent, $ds(t)/dt = 0$, la surface est conservée.

Remarques

– Attention : si le Hamiltonien dépend du temps, comme c'est le cas dans notre exemple, alors **l'énergie** $E(t) = H(\theta(t), \omega(t))$ **n'est pas conservée ;** mais c'est pourtant un système dit conservatif car $ds/dt = 0$!

Effet des frottements Dans les sytèmes naturels, il y a toujours de la **dissipation,** qui fait que le système considéré n'est pas rigoureusement Hamiltonien. Cette dissipation peut être faible ou pas. Si on rajoute des **frottements** faibles (coefficient μ), dans notre modèle, le système **n'est plus Hamiltonien,** l'aire $d\theta d\omega$ n'est plus conservée. On peut montrer que **cette aire diminue au cours du temps.** En effet, si on rajoute le terme $-\mu\omega$ dans l'équation (1.5) de $d\omega/dt$, alors en reprenant les notations de eq.(2.1), on a cette fois ci $\vec{f}(\vec{x}) = (\frac{\partial H}{\partial \omega}, -\frac{\partial H}{\partial \theta} - \mu\omega)$, donc

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(-\frac{\partial H}{\partial \theta} - \mu\omega\right) = -\mu < 0$$

donc $ds/dt < 0$ ce qui montre que l'aire diminue.

2.2.2 Les ilots deviennents des attrateurs

(Voir Gutzwiller [6] section 9.2.)

On considère notre modèle pour $F_0 = 3$,où il y a beaucoup d'ilots dans la section stroboscopique.

Que deviennent les trajectoires du système Hamiltonien conservatif, si l'on rajoute des frottements $\mu > 0$ qui rende le système dissipatif, avec une diminution de l'aire au cours du temps ?

Il est facile de deviner que les trajectoires régulières des ilots, vont s'enrouler vers le centre de ceux-ci. Le **centre des ilots devient donc un attracteur.**

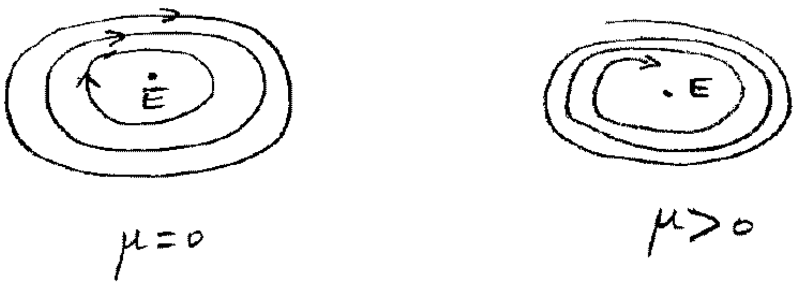

FIG. 2.7 – Avec des frottements légers, $\mu > 0$, le centre de chaque ilot devient un attracteur.

Après un régime transitoire où les trajectoires sont attirées au centre de l'ilot, elles coincident ensuite avec le centre de l'ilot, et deviennent des trajectoires périodiques, comme celles de la figure 1.9 (qui étaient exceptionnelles dans le cas conservatif).

Chaque trajectoire devient donc résonnante caractérisée par le couple d'entiers p :q. Cela signifie que $T_0 = \frac{p}{q}T$, et que l'objet fait q périodes pendant que l'aimant fait p périodes. Cela est très surprenant ; ce phénomène s'appelle **l'accrochage des fréquences,** puisque **l'objet M a accroché sa fréquence ω sur un multiple rationnel q/p de la fréquence ω_0 de la perturbation extérieure.** (en Anglais "phase lock").

En conclusion les trajectoires résonantes p :q qui sont exceptionnelles pour un système conservatif, deviennent importantes pour un système légèrement dissipatif.

Exemples d'accrochages de fréquences

Il y a de nombreux exemples dans la nature où un accrochage de fréquences se manifeste.(cf Gutzwiller [6] p130, p120.)

- Le plus connu et observable est la Lune : l**a Lune présente toujours la même face à la Terre.** Cela signifie que la période de rotation de la Lune sur elle même T_0 est égale à la période de rotation de la lune autour de la Terre $T \simeq 28 jours$. C'est une **résonance 1 :1.** L'analyse qui précède montre que ce n'est pas une coincidence : cela est due à un faible couplage gravitationnel entre ces deux mouvements apparement

indépendants, et à la présence d'une légère dissipation : la Terre exerce des effets de marée sur la lune qui deforme celle-ci ; il y a un peu (relativement) de dissipation pendant cette déformation.
- Comme autre exemple similaire est **la résonance 2 :5 entre Jupiter est Saturne :** leur périodes sont $T_{jupiter} = 12$ ans et $T_{saturne} = 30$ans, donc $\frac{T_{jup}}{T_{sat}} \simeq \frac{2}{5}$.
- Un exemple connu est aussi la synchronisation des balanciers de deux pendules accrochés au même mur d'une pièce. Un faible couplage par les vibrations transmisent dans le mur, et une légère dissipation, expliquent cet accrochage de fréquences et cette résonance 1 :1.
- Si on change un paramètre extérieur du système de façon lente et continue, par exemple l'amplitude $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, alors la valeur de l'accrochage $a = p/q$ va dépendre de ce paramètre. On obtient donc une fonction $a(\alpha_0)$ de $\mathbb{R}$ dans les rationnels $\mathbb{Q}$. Cette fonction est très étrange, puisqu'elle comporte une multitude de paliers plus ou moins larges. On l'appelle **l'escalier du diable.** voir Berger [4].

2.2.3 Attracteurs étranges dans les zones chaotiques

On peut se demander l'effet de la dissipation sur les trajectoires chaotiques situées près des points hyperboliques H ?

Un modèle très simple consiste à modifier le modèle de l'application du boulanger ci-dessus, introduire un coefficient de dissipation μ. On obtient **le modèle du fer à cheval**.

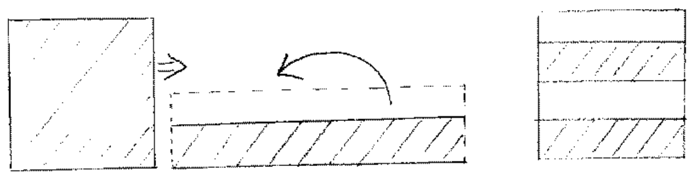

FIG. 2.8 – L'application du fer à cheval est une modification de celle du boulanger fig (2.6), où la dissipation est introduite par la diminution de la surface.

Une étude de ce modèle est très simple, et montre que toutes les trajectoires sont attirées vers un ensemble de points singuliers appelé **attracteur étrange,** qui est un ensemble **fractal** dans l'espace des phases. voir Ozorio [5].

Autre modèle, et autres images, voir`http://www.mcasco.com/cattr1.html` .

2.3 Y a t-il déterminisme et chaos ?

Le modèle mathématique étudié ci-dessus est déterministe au sens où une condition initiale $(\theta_0, \omega_0, t_0)$ détermine l'évolution future de l'objet. Cependant, on a vu qu'une petite modification des conditions initiales de $\Delta\theta$ s'amplifie pour donner une modification $10\Delta\theta$

après une période, et $10^n \Delta\theta$ après n périodes T. Il en est de même pour $\Delta\omega$. Il en résulte que la moindre modification de la position ou de la vitesse de l'objet va s'amplifier pour rapidement donner quelque chose de très différent (si il n'y avait pas eu de modification). Par exemple si $\Delta\theta = 10^{-8}$ radians, en $t = 8T = 8$ secondes $\Delta\theta \simeq 1$, et donc l'objet pointe vers une autre direction. Cela s'appelle **l'effet papillon** : un battement d'aile de papillon dans la pièce va engendrer un petit courant d'air, ce qui va modifier légèrement la vitesse $\Delta\omega$, et aussi $\Delta\theta$, qui va rapidement s'amplifier.

Estimations très surprenantes :

– L'effet du **mouvement brownien** dû au choc des molécules d'air sur l'objet, donne $\Delta p \simeq m_{air} v_{air} \simeq 10^{-23} kg.m.s^{-1}$ (car $m \simeq 10^{-27} kg$ et $v \simeq 2km/s$). Après seulement 23 secondes l'effet est ressenti au niveau macroscopique ! Ce mouvement brownien est imprévisible ; par conséquent on ne peut pas parler raisonnablement de déterminisme après 23 secondes.

– A plus petite échelle, **la mécanique quantique** amène un hasard pur, intrinsèque, imprévisible par nature : lorsque la fonction d'onde d'une particule a une largeur Δx, on observe que la position x de la particule est comme choisie au hasard par la nature dans l'intervalle de largeur Δx. On peut parler d'acte de création de la part de la nature, puisque le choix précis de x n'est pas déterminé. On pourrait penser que ces incertitudes restent au niveau microscopique : le principe d'incertitude de Heisenberg dit :
$$\Delta x \Delta p \simeq h \simeq 10^{-34} J.s$$
D'après ci-dessus, cela donne une indétermination à l'echelle macroscopique avant $t = 34T = 34$ secondes ! (en fait on pourrait considérer $\Delta\theta \simeq \Delta\omega \simeq 10^{-17}$).
Ce temps caractéristique s'appelle le temps d'Ehrenfest. Bien sûr le système quantique ne reste pas isolé durant tout ce temps, car il intéragit avec l'envirronement. On parle de décohérence quantique. Ce temps d'Erenfest est de 20 ans pour certains objets astronomiques, voir [8, 9].

Ces remarques montrent qu'il est illusoire de vouloir faire des prédictions précises après ce laps de temps. Mais des prédictions sont cependant possibles : on peut faire **des prédictions probabilistes.** C'est ce que l'on fait en **physique statistique.**

Citation de Bohr *"Le but de la physique n'est pas de décrire la nature, mais de montrer ce que l'on peut dire de la nature".*

Bibliographie

[1] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique.* 1976.

[2] V.I. Arnold. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke.* 1990.

[3] V.I. Arnold and Avez. *Méthodes ergodiques de la mécanique classique.* 1967.

[4] P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos.* 1984.

[5] A.M. Ozorio de Almeida. *Hamiltonian systems, chaos and quantization.* 1988.

[6] M. Gutzwiller. *Chaos in classical and quantum mechanics.* Springer-Verlag, 1991.

[7] E.A. Jackson. *Perspectives of non linear dynamics.* 1991.

[8] Zureck. *Physical Review Letters*, 72, 1994.

[9] Zureck. *Physica D*, 83, 1995.