TD n^{o}3

Spectre de Δ sur S^2. Harmoniques sphériques

Référence : [2, p.185],[3, p.175,p.225]
On note $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et l'opérateur "Laplacien Eucliden sur $\mathbb{R}^3$" :

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Rappels : Δ est auto-adjoint sur $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ avec $\mathrm{Dom}\,(\Delta) = H^2$ (espace de Sobolev). On rappelle que d'après la théorie de Fourier, les "modes de Fourier" ou "ondes planes" d'impulsion $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$:

$$\varphi_{\vec{p}}\,(\vec{x}) = e^{i\vec{p}.\vec{x}}, \quad \vec{x} = (x, y, z)\,,$$

ne sont pas dans $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ mais vérifient $\Delta\varphi_{\vec{p}} = -\left\|\vec{p}\right\|^2 \varphi_{\vec{p}}$. D'après le critère de Weyl [1, p.73] on déduit que $\sigma\,(\Delta) = \sigma_{ess}\,(\Delta) =]-\infty, 0]$.

1 Par les polynomes homogènes

(cet exercice peut se faire sur $\mathbb{R}^n$).

1. On considère les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}, \qquad \Delta_{S^2} := \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

   où Δ_{S^2} est **"l'opérateur Laplacien sur S^2"**.

2. Pour $l \geq 0$, on définit P^l l'espace vectoriel complexe des polynomes $p\,(x, y, z)$ homogènes de degrés l. Montrer que $\dim\left(P^l\right) = C^2_{l+2} = \frac{1}{2}\,(l+1)\,(l+2)$ et que $\Delta : P^l \to P^{l-2}$ est surjective (aide : considérer les monomes et effectuer une récurrence).

3. On note $H^l := \mathrm{Ker}\left(\Delta_{/P^l}\right) \subset P^l$. Montrer que[1] $\dim\left(H^l\right) = 2l + 1$ et

$$\begin{aligned} P^l &= H^l \overset{\perp}{\oplus} r^2 P^{l-2} \\ &= H^l \overset{\perp}{\oplus} r^2 H^{l-2} \overset{\perp}{\oplus} r^4 H^{l-4} \ldots \end{aligned}$$

4. $f \in P^l$ s'écrit $f\,(r, \theta, \varphi) = r^l Y\,(\theta, \varphi)$. On pose

$$\tilde{H}^l := \left\{ Y\,(\theta, \varphi)\,, \quad r^l Y\,(\theta, \varphi) \in H^l \right\}$$: espace des **harmoniques sphériques** degré l

   On a $\dim\tilde{H}^l = \dim H^l = 2l + 1$. Montrer que si $Y \in \tilde{H}^l$ alors

$$\Delta_{S^2} Y = -l\,(l+1)\,Y$$

1. ref : Stein Weiss th2.1 p.139

5. Montrer que

$$L^2\left(S^2\right) = \overline{\bigoplus_{l\geq 0}^{\perp} \tilde{H}^l}$$

(argument de densité : approximer une fonction continue sur S^2 par un polynome dans $\mathbb{R}^3$). Déduire que Δ_{S^2} est autoadjoint sur $L^2\left(S^2\right)$ avec un spectre discret $\lambda_l = -l\,(l+1)$ de multiplicité $(2l+1)$.

2 Algèbre de $SO\,(3)$ et base des harmoniques sphériques

On définit les opérateurs de moment angulaire

$$L_x := -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_y := -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad L_z := -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

noté de façon plus concise $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ avec $\vec{p} := -i\vec{\nabla}$. On définit aussi

$$L_\pm := L_x \pm iL_y, \qquad L^2 := L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

1. Montrer les relations suivantes caractérisant **l'algèbre de Lie** $so\,(3)$:

$$\Delta = \frac{1}{2}L^2, \qquad L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$[L_x, L_y] = iL_z, \quad [L_y, L_z] = iL_x, \quad [L_z, L_x] = iL_y,$$
$$\left[L^2, L_z\right] = 0, \quad [L_z, L_\pm] = \pm L_\pm$$

2. On pose $Y_{l,l}\,(\theta,\varphi) = c_l \sin^l(\theta)\, e^{il\varphi}$ avec c_l de sorte que $\|Y_{l,l}\| = 1$. Montrer que

$$f_l = (x+iy)^l = r^l Y_{l,l}\,(\theta,\varphi)$$

et $\Delta f_l = 0$, $L_z f_l = l f_l$.

3. On définit par récurrence pour $m = l, l-1, \ldots, -l+1$:

$$Y_{l,m-1} := \frac{1}{\left((l+m)\,(l-m+1)\right)^{1/2}} L_- Y_{l,m}$$

montrer que $\|Y_{l,m-1}\| = 1$ et $L_- Y_{l,-l} = 0$. Déduire que $(Y_{l,m})_{m=-l,\ldots,+l}$ forme une base orthonormée de $\tilde{H}^l$.

Références

[1] I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory : With applications to Schr "odinger operators*, volume 113. Springer, 1996.

[2] S. Sternberg. *Group theory and physics.* Cambridge University Press, 1994.

[3] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics : with applications to Schr "odinger operators*, volume 99. Amer Mathematical Society. Free, on the web page of the author, 2009.