TD n^{o}1

Opérateurs fermables, Opérateurs auto-adjoints.

1 Opérateur fermables

Exercice 1. [6, p.516] Montrer que la **distribution de Dirac** :

$$\delta : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \to \mathbb{C} \\ \varphi(x) & \mapsto \varphi(0) \end{cases}$$

est un opérateur **non fermable** sur $L^2(\mathbb{R})$. Déduire que l'opérateur

$$A : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \to L^2(\mathbb{R}) \\ \varphi(x) & \mapsto \varphi(0)\, e^{-x^2} \end{cases}$$

est non fermable. Montrer que $\delta : \mathcal{H}^m(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est fermable sur l'espace de Sobolev de distributions $\mathcal{H}^m(\mathbb{R})$ si $m > 1/2$.

Exercice 2. [2, p.57][8, p.119] On utilise les notations : $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $D^\alpha := \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. Soit

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

un **opérateur différentiel d'ordre** k sur $\mathbb{R}^n$ avec $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose que toutes les dérivés de a_α sont à croissance au plus polynomiale pour $|x| \to \infty$. Montrer que P est **fermable** sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Aide : considérer une suite $(\varphi_k)_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et utiliser l'opérateur différentiel adjoint P^* sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ appelé adjoint formel, définit par

$$\langle \psi | P^* \varphi \rangle = \langle P\psi | \varphi \rangle, \qquad \psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2 Opérateurs auto-adjoints

Exercice 3. [3, p.55] Sur l'espace $L^2([0,1])$, on considère les opérateurs

1. $H_D\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\mathrm{Dom}(H_D) = \left\{\varphi \in C^2([0,1]), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\}$: "conditions de Dirichlet"
2. $H_N\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\mathrm{Dom}(H_N) = \left\{\varphi \in C^2([0,1]), \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = \frac{d\varphi}{dx}(1) = 0\right\}$: "conditions de Neumann"

3. $H_P\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\mathrm{Dom}\,(H_P) = \left\{\varphi \in C^2([0,1]),\quad \varphi(0) = \varphi(1), \frac{d\varphi}{dx}(0) = \frac{d\varphi}{dx}(1)\right\}$: "conditions périodiques"

Pour chacun des opérateurs précédents, montrer qu'il est symétrique (intégration par parties) et qu'il admet des fonctions propres formant une base de $L^2([0,1])$. Déduire qu'il est essentiellement auto-adjoint. Comparer les spectres.

Montrer que au contraire, $H\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\mathrm{Dom}\,(H) = \mathrm{Dom}\,(H_D) \bigcap \mathrm{Dom}\,(H_N)$ possède plusieurs extensions auto-adjointes.

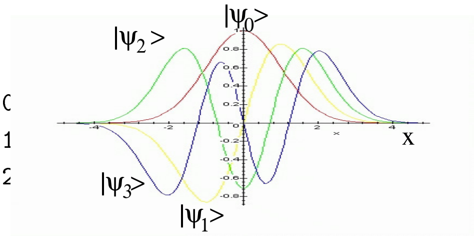
Exercice 4. [7, p.178] L'opérateur **oscillateur harmonique** est $H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Dom}\,(H) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(H\varphi)(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{1}{2}x^2\varphi(x)$$

1. Montrer que H est symétrique.
2. On définit les opérateurs suivants : $\hat{p}\varphi := -i\frac{d\varphi}{dx}$ et $(\hat{x}\varphi)(x) := x\varphi(x)$, $a := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})$, $a^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$, $N := a^+a$. Calculer les commutateurs $[\hat{x},\hat{p}], \left[a, a^\dagger\right], [N, a], \left[N, a^\dagger\right]$ et montrer que $H = N + \frac{1}{2}$.
3. On cherche la fonction $\psi_0(x)$ définie par $a\psi_0 = 0$. Montrer que l'on obtient l'équation différentielle $\frac{d\psi_0}{dx} = -x\psi_0$ dont la solution normalisée est la Gaussienne $\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Montrer que ψ_0 est fonction propre de N.
4. Pour un entier $n \geq 1$, on définit par récurrence la fonction ψ_n par $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}a^+\psi_{n-1}$. Par récurrence sur n montrer que $N\psi_n = n\psi_n$ et que $\|\psi_n\|^2 = 1$. (fonction propre normalisée).
5. Montrer que $a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$.
6. On cherche l'expression de la fonction $\psi_n(x)$. Montrer la relation :$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_{n-1}(x)$. A l'aide du logiciel **xcas** [1], dessiner les **fonctions d'Hermite** $\psi_n(x)$ avec le code :

```
f0:=exp(-x^2/2);

  f1:=1/(sqrt(2*1))*(x*f0-diff(f0
  f2:=1/(sqrt(2*2))*(x*f1-diff(f1
  f3:=1/(sqrt(2*3))*(x*f2-diff(f2
  plot([f0,f1,f2,f3],x=-5..5);
```



7. Pour simplifier l'écriture, on définit la fonction $H_n(x)$ par l'écriture :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{n!2^n}\right)^{1/2} H_n(x)$$

et connaissant $\psi_0(x)$ ci-dessus, on observe que $H_0(x) = 1$. Montrer que $H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right)H_{n-1}(x)$. Déduire par récurrence que $H_n(x)$ est en fait un polynôme de degré n à coefficients entiers appelé **polynome d'Hermite**, et calculer les premiers termes $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.

8. Montrer que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Aide : on cherche une fonction $\varphi(x)$ orthogonale à toutes les fonctions ψ_n. Comme $\psi_n \propto e^{-x^2/2}H_n(x)$ avec H_n polynome de degré n, cela implique $\int \varphi(x)\, e^{-x^2/2} P(x)\, dx = 0$ pour tout polynome P. Considérant $P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}(itx)^j$, $n \to \infty$, déduire que la transformée de Fourier de $\varphi(x)\, e^{-x^2/2}$ est nulle et donc que $\varphi = 0$.
9. Déduire de ce qui précède que H est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est que son spectre est $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ avec multiplité 1.

Exercice 5. [7, p.175] (*) “Le moment angulaire. Laplacien sur la sphère S^2”

On considère l'opérateur Laplacien Δ sur $L^2(S^2)$. En coordonnées cartésiennes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (S^2 est la sphère unité),

$$\Delta = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

avec les opérateurs de moment angulaire $L_x := yp_z - zp_y$,$L_y := zp_x - xp_z$,$L_z := xp_y - yp_x$ formant une représentation de l'algèbre de Lie $so(3)$. Par des méthodes algèbriques similaires à l'exercice prédédent, montrer que Δ admet des fonctions propres formant une base de $L^2(S^2)$, que le spectre de Δ est $\{\lambda_l = l(l+1), \quad l \in \mathbb{N}\}$ avec la multiplicité $(2l+1)$. Déduire que Δ est essentiellement autoadjoint sur $C^\infty(S^2)$.

3 Opérateurs inverse

Exercice 6. [5, p.127]Si $A : X \to Y$ est un opérateur linéaire sur des espaces de Banach X, Y, et $\mathrm{Ran}(A) = Y$, montrer que A est inversible si et seulement si

$$\exists c > 0, \forall x \in \mathrm{Dom}(A), \|Ax\| \geq c\|x\|$$

et alors $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.

Exercice 7. [4, p.311]Supposer : $A : X \to Y$ est un opérateur inversible, B est un opérateur borné, $\|B\| \leq \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $(A + B)$ est inversible et

$$(A+B)^{-1} = \left(1 + A^{-1}B\right)^{-1} A^{-1} = A^{-1}\left(1 + BA^{-1}\right)^{-1}$$

où les inverses des deux termes de droites sont définis par la série de Neumann $(1-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n$ qui est Abs. Conv. Montrer que $\left\|(A+B)^{-1}\right\| \leq \left(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|\right)^{-1}$.

Références

[1] Parisse B. *Logiciel libre de calcul formel.* Taper xcas dans google.

[2] E.B. Davies and E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1996.

[3] C.R. de Oliveira. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, volume 54. Birkhauser, 2009.

[4] P.D. Hislop and I.M. Sigal. *Introduction to Spectral Theory with Applications to Schrödinger Operators*. Springer, 1996.

[5] L.P. Lebedev, I.I. Vorovich, G.M.L. Gladwell, and Inc Ebrary. *Functional analysis : Applications in mechanics and inverse problems*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[6] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.

[7] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics : with applications to Schr "odinger operators*, volume 99. Amer Mathematical Society. Free, on the web page of the author, 2009.

[8] M. W. Wong. *An introduction to pseudo-differential operators*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 1999.