

Chapitre 23

Espaces fibrés et connexions

Référence : Lee, Riemannian Manifolds.

23.1 Espaces fibrés vectoriels

Un espace fibré vectoriel est une collection continue d'espaces vectoriels F_x de paramètres par $x \in B$, tous de même dimension. Voici la définition précise :

Définition 23.1.1. Soit B une variété différentiable de dimension n appelée **espace de base**. Pour chaque point $x \in B$ on considère un espace vectoriel (réel ou complexe) F_x de dimension r appelé **fibre** au dessus de x . Un **espace fibré vectoriel de rang r sur B** , est une variété différentiable F de la forme

$$F = \{(x, v), x \in B, v \in F_x\} \quad (23.1.1)$$

tel que pour tout $x \in B$ il existe un voisinage $U \subset B$ tel que l'espace $F_U := \{(x, v), x \in U, v \in F_x\}$ est difféomorphe au produit direct $U \times \mathbb{R}^r$. (On dit que l'espace fibré est **localement trivial**). L'application $\pi : F \rightarrow B$ définie par $\pi(x, v) = x$ s'appelle la **projection** et l'espace fibré se note aussi $F \xrightarrow{\pi} B$. On appelle B **l'espace de base**, et F_x **la fibre** au dessus du point x .

Remarques :

- F est une donc variété de dimension $n + r$.
- Dans le cas particulier où la fibre est $F_x = T_x B$, l'espace tangent au point $x \in B$, alors on notera

$$TB = \{(x, v), x \in B, v \in T_x B\}$$

l'espace fibré, appelé **espace fibré tangent** à B . Dans ce cas, $\dim B = n = \dim T_x B$, le fibré est de rang n . @@ Dessin @@

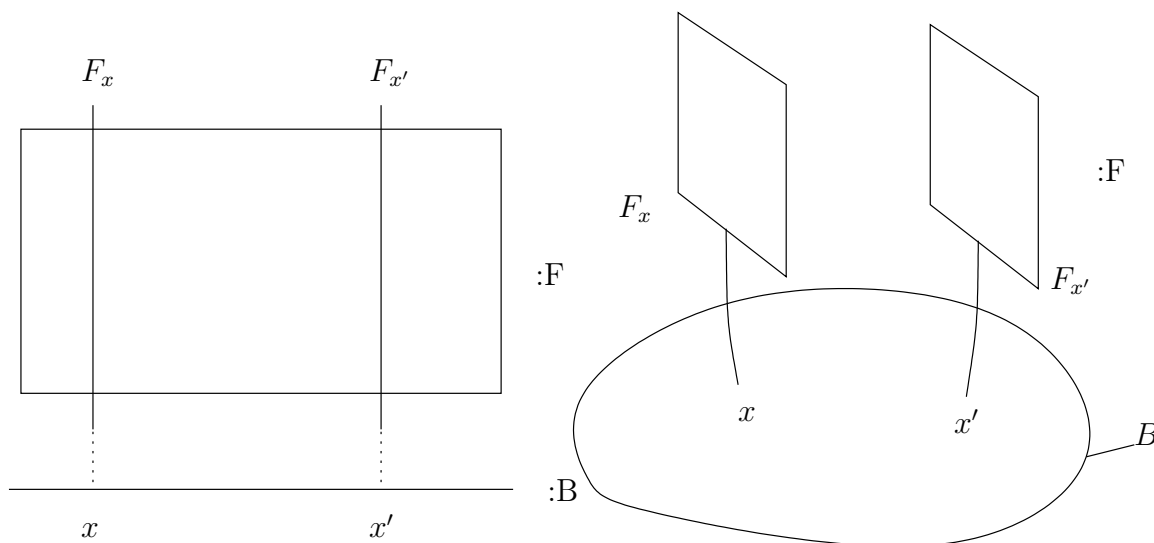


FIGURE 23.1.1 – (a) Schéma d'un fibré de rang 1

- Plus généralement en géométrie différentielle, si B est une variété de dimension n , les espaces tensoriels forment d'autres espace fibrés vectoriels importants. Par exemple pour $0 \leq p \leq n$ fixé, en un point $x \in B$, l'espace des **tenseurs antisymétriques de degré p** (aussi appelées **p -formes**) est un espace vectoriel noté Λ_x^p de dimension C_n^p . On note

$$\Lambda^p(B) = \{(x, \alpha), x \in B, \alpha \in \Lambda_x^p\}$$

l'espace fibré vectoriel des p -formes sur B dont la fibre au point x est $F_x = \Lambda_x^p$. Un autre exemple important (pour la théorie des spineurs) est l'espace fibré vectoriel $\Lambda^\bullet = \bigoplus_p \Lambda^p$ appelée **algèbre extérieure**, qui est de rang $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$. Un autre exemple important en relativité générale est l'espace fibré vectoriel $S(T^*B \otimes T^*B)$ des **tenseurs symétriques de degré 2** sur B , qui est de rang $\frac{n(n+1)}{2}$. Le tenseur métrique g est un tel tenseur.

- La définition 23.1.1 généralise le cas du fibré tangent, car en général on ne suppose pas que la fibre F_x soit relié d'aucune façon à l'espace tangent $T_x B$. Un exemple simple d'espace fibré vectoriel est :

$$F = B \times \mathbb{R}^r = \{(x, v), x \in B, v \in \mathbb{R}^r\} \tag{23.1.2}$$

appelé l'**espace fibré trivial**¹ de rang r où chaque fibre est $F_x = \mathbb{R}^r$, le même espace vectoriel pour tous les point $x \in B$. On peut donc penser qu'un **espace fibré vectoriel général, sert à étendre la notion du produit direct.** @@ Dessin @@

- En physique des particules, en **Théorie de Jauge (théorie de Yang-Mills)**, on utilise des fibrés vectoriel complexes de rang 1, 2, 3 sur l'espace temps B : si

1. l'adjectif **trivial** est utilisé en mathématique pour signifier que le cas considéré est le plus simple (à la limite de l'intérêt).

B (difféomorphe à \mathbb{R}^4) est une variété Lorentzienne qui représente l'espace-temps, alors :

- La “théorie de Jauge $U(1)$ ”, ou “théorie de l'électromagnétisme” fait intervenir un espace fibré vectoriel complexe de rang 1 sur B .
- La “théorie de Jauge $U(2)$ ”, ou “théorie des interactions électro-faibles” fait intervenir un espace fibré complexe de rang 2 sur B .
- La “théorie de Jauge $SU(3)$ ”, ou “théorie des interactions fortes” fait intervenir un espace fibré complexe de rang 3 sur B .

Dans chacun de ces cas, la **connexion du fibré** ou “champ de Jauge” modélise les champs d'interaction (respect. : photon, bosons Z^0, W^+, W^- , et gluons), et les **sections du fibré** modélisent les champs de matière (onde quantique type Klein-Gordon ou onde classique comme en supra-conductivité). Nous verrons cela en section 23.2.8 page 287.

- Un tel modèle de Théorie de Jauge est dit “classique” et est seulement approximatif en physique, car la nature est “quantique” et il faudrait quantifier ces connexions et ces sections du fibré (c'est le sujet de la “théorie quantique des champs”). Cependant le modèle classique est correct dans le cadre approximatif de l'électromagnétisme classique (une théorie de Jauge $U(1)$), qui décrit un champ électromagnétique agissant sur des particules chargées quantiques (mais en négligeant les influences inverses des particules sur le champs, c'est à dire sans considérer le champ de Jauge comme dynamique!!). (Pourtant Itzikson-Zuber [17] p.31 l'écrit!!??).
- En physique, les champs de matière élémentaires sont des “spineurs” c'est à dire des sections d'un fibré de spineurs (voir [29] pour une description géométrique).
- En physique quantique standard (pas nécessairement la TQC) il apparait un espace fibré complexe de rang 1 qui est très important : c'est le fibré canonique de l'espace de Hilbert \mathcal{H} sur son projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Il admet une connexion naturelle qui est appelée la connexion de Berry.
- En mécanique et dans les problèmes adiabatiques, la notion d'espace fibrés est importante. Voir l'exemple du pendule de Foucault ci-dessous.

La définition suivante définit en quel sens deux espaces fibrés sont équivalents.

Définition 23.1.2. Un **isomorphisme** entre deux espaces fibrés vectoriels de rang r , $F \rightarrow B$ et $F' \rightarrow B$ (avec le même espace de base B) est un homéomorphisme (i.e. bijection continue et d'inverse continue) $h : F \rightarrow F'$ tel que pour tout $x \in B$, on ait $h(F_x) = F'_x$ et $h : F_x \rightarrow F'_x$ soit un isomorphisme d'espace vectoriels. Autrement dit, on demande que h envoie les fibres de F sur celles de F' , en respectant la structure d'espace vectoriel. On dira alors que les espaces fibrés F et F' sont **isomorphes**, et on notera :

$$F \sim F'$$

(c'est une relation d'équivalence). En particulier le fibré $F \rightarrow B$ est dit **trivial** si

$$F \sim (B \times \mathbb{R}^r)$$

On note

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^r(B)$$

les classes d'équivalences de fibrés isomorphes, i.e. tous les espaces fibrés possibles et différents (non isomorphes) de rangs r sur B .

Exemples

- L'espace tangent TS^1 est isomorphe au fibré trivial de rang 1 :

$$TS^1 \sim S^1 \times \mathbb{R}$$

En effet en notation complexe, on note $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ un point de S^1 . Alors un point de l'espace tangent $T_{e^{i\theta}}S^1$ s'écrit $ite^{i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$. Alors on a un homéomorphisme :

$$h : (e^{i\theta}, ite^{i\theta}) \in TS^1 \rightarrow (e^{i\theta}, t) \in S^1 \times \mathbb{R}$$

- Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface, l'**espace fibré normal** NS est par définition la collection des droites N_x orthogonales à $T_x\mathcal{S}$ au point $x \in \mathcal{S}$. Montrons que le fibré NS^2 à la sphère S^2 est trivial :

$$NS^2 \sim S^2 \times \mathbb{R}$$

En effet, si $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, on note $tx \in NS^2$ avec $t \in \mathbb{R}$. Alors on a un homéomorphisme :

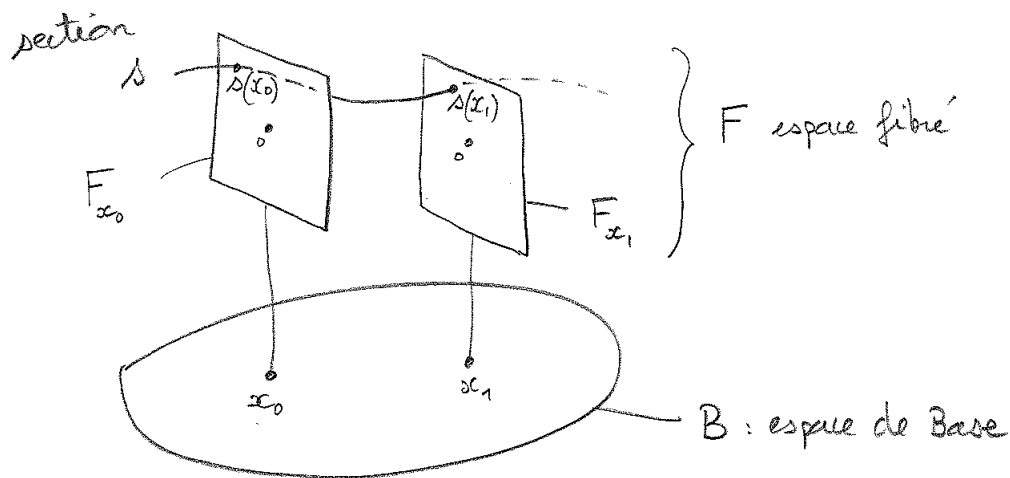
$$h : (x, tx) \in NS^2 \rightarrow (x, t) \in S^2 \times \mathbb{R}$$

- Un résultat important (mais difficile) montre que le fibré tangent TS^n est trivial seulement pour $n = 1, 3, 7$, et ces trois cas sont reliés respectivement aux nombres complexes, quaternions et octonions [16]. On montrera plus loin que le fibré TS^2 n'est pas trivial (Th. 23.1.9 page 260).

Définition 23.1.3. Si $F \rightarrow B$ est un espace fibré vectoriel, une **section globale** du fibré est une application (continue ou C^∞) $s : B \rightarrow F$ qui à chaque point de base $x \in B$ associe un point dans la fibre $s(x) \in F_x$. On note

$$C^\infty(B, F) \tag{23.1.3}$$

l'espace des sections C^∞ du fibré F .



Remarques :

- Par exemple si $F = B \times \mathbb{R}$ est le fibré trivial de rang 1, alors une section $s \in C^\infty(B, F)$ est simplement une fonction numérique à valeurs réelles $s(b) \in \mathbb{R}$ (aussi noté $s \in C^\infty(B)$ habituellement). Si $F = B \times \mathbb{R}^r$ est le fibré trivial de rang r , alors une section est simplement une fonction numérique à valeurs réelles $s(b) \in \mathbb{R}^r$. Pour un fibré quelconque, **la notion de section généralise donc la notion de fonction numérique.**
- Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface, une section globale du fibré tangent $T\mathcal{S}$ est tout simplement un **champ de vecteur** sur \mathcal{S} . $v_x \in T_x\mathcal{S}$.
- Tout espace fibré admet des sections, en particulier la **section nulle** : $s(x) = 0, \forall x$.
- En physique, une section s'appelle un **champ** (ex : un champ de vecteur est une section du fibré tangent. Un champ spinoriel est une section du fibré spinoriel). Sauf exceptions : le champ électromagnétique ou le champ de Jauge n'est pas une section d'un fibré. On verra que c'est une connexion.

Voici un résultat utile pour détecter si un espace fibré est trivial ou non.

Théorème 23.1.4. *L'espace fibré $F \rightarrow B$ est trivial si et seulement si il existe r sections globales (s_1, \dots, s_r) telles que en tout point $x \in B$, les vecteurs $(s_1(x), \dots, s_r(x))$ forment une base de l'espace vectoriel F_x (la fibre au dessus de x), continuellement par rapport à x . On dit alors que l'on **trivialise** le fibré F et que (s_1, \dots, s_r) est **une trivialisation du fibré F** .*

Démonstration. En effet si $p \in F_x$ est un point quelconque dans une fibre, on le décompose dans la base : $p = \sum_{i=1}^r t_i s_i(x)$, avec $t_i \in \mathbb{R}$, et on a un isomorphisme entre le fibré F et le fibré trivial $B \times \mathbb{R}^r$:

$$h : (x, p) \in F \rightarrow (x, t_1, \dots, t_r) \in B \times \mathbb{R}^r$$

□

On définit la boule de dimension n par :

$$B_n := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$$

Théorème 23.1.5. *Tout fibré $F \rightarrow B_n$ sur la boule $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ avec $n \geq 1$ et de rang $r \geq 1$ quelconque est trivial. Plus généralement si l'espace de base B est contractible alors $F \rightarrow B$ est trivial.*

Démonstration. (voir [16, prop.1.7, cor.1.8]). L'idée est de “progresser sur des petits ouverts”, et utiliser que le fibré est localement trivial par définition. □

23.1.1 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 sur S^1

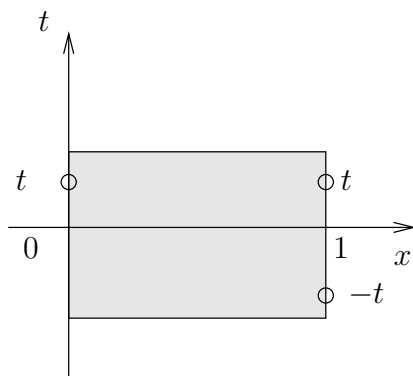
Après la définition 23.1.2 d'isomorphisme entre espaces fibrés, il est naturel de se demander si un espace fibré vectoriel $F \rightarrow B$ donné de rang r , est isomorphe au fibré trivial Eq.(23.1.2), et plus généralement de classifier (si possible) tous les fibrés vectoriels de rang r fixé au dessus d'un espace de base B fixé, i.e. déterminer l'espace $\text{Vect}_{\mathbb{R}}^r(B)$. Détecter la topologie d'un espace fibré vectoriel $F \rightarrow B$ consiste à identifier sa classe d'équivalence dans $\text{Vect}_{\mathbb{R}}^r(B)$. Ces questions sont très difficiles en général, sauf en petites dimensions.

L'exemple le plus simple est le cas où l'espace de base est le cercle $B = S^1$ et le rang est $r = 1$, c'est à dire que chaque fibre est isomorphe (comme espace vectoriel) à la droite \mathbb{R} .

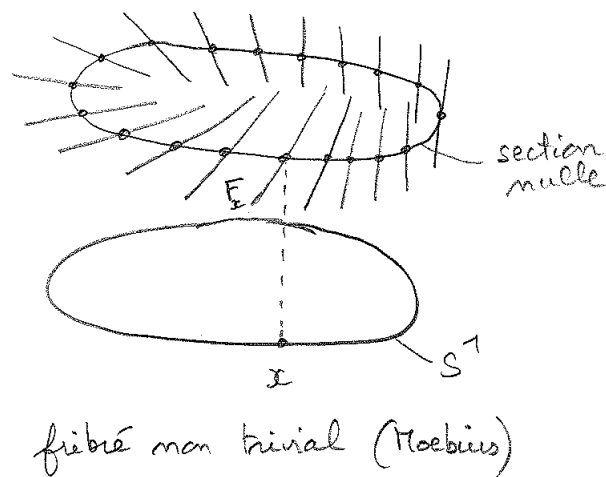
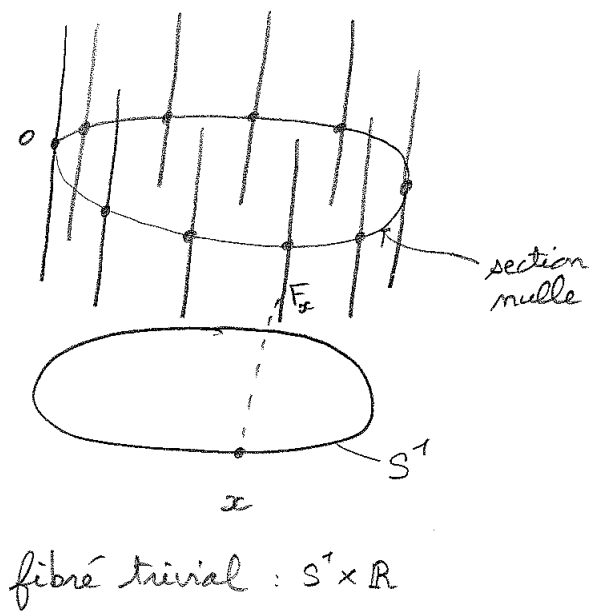
On imagine sans peine deux exemples d'espace fibré de rang 1 sur S^1 :

- Le **fibré trivial** $S^1 \times \mathbb{R}$ que l'on obtient à partir du fibré $[0, 1] \times \mathbb{R}$ sur le segment $x \in [0, 1]$, en identifiant les points $(0, t) \sim (1, t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Le **fibré de Moëbius**, que l'on obtient à partir du fibré $[0, 1] \times \mathbb{R}$ sur le segment $x \in [0, 1]$, en identifiant $(0, t) \sim (1, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, c'est à dire que l'on recolle les extrémités à "l'envers".



Le fibré de Moebius n'est pas isomorphe au fibré trivial. Une façon de le justifier est que dans le cas du fibré trivial, le complément de la section nulle ($s(x) = 0, \forall x$) a deux composantes connexes, alors que pour le fibré de Moebius, le complément n'a qu'une composante. (Faire une construction en papier que l'on coupe au ciseaux selon $s(x) = 0$).



Théorème 23.1.6. *Tout espace fibré réel $F \rightarrow S^1$ de rang 1 est isomorphe au fibré trivial ou au fibré de Möebius. Autrement dit il y a seulement deux classes d'équivalences :*

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^1(S^1) = \{0, 1\}$$

*associée à un indice $SW = 0$: fibré trivial, $SW = 1$: fibré de Moebius, qui s'appelle l'indice de **Stiefel-Whitney**. On dit que l'indice SW caractérise la topologie du fibré F .*

Démonstration. Partant d'un fibré quelconque $F \rightarrow S^1$ de rang 1, on coupe l'espace de base S^1 en un point, et on se retrouve avec le fibré $[0, 1] \times \mathbb{R}$ sur le segment $x \in [0, 1]$. Pour reconstruire le fibré initial F , il y a deux possibilités : pour tout $t \in \mathbb{R}$, identifier $(0, t) \sim (1, t)$, ou $(0, t) \sim (1, -t)$, ce qui donne respectivement le fibré trivial ou de Moebius. Plus précisément cette construction montre l'existence d'un homeomorphisme entre F et le fibré trivial ou le fibré de Moebius. \square

Remarque :

- l'indice de Stiefel-Whitney $SW = 0, 1$ donne donc le nombre de $1/2$ tours que font les fibres au-dessus de l'espace de base S^1 . Le cas $SW = 2$ (1 tour complet) est isomorphe au fibré trivial. On convient donc que l'indice $SW \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, c'est à dire SW est un entier modulo 2. On verra plus loin, Théorème 23.1.7 page 258 qu'il est intéressant d'avoir la structure additive sur les indices SW ($1 + 1 = 0$ par exemple).
- Remarquer que dans l'espace \mathbb{R}^3 , un ruban faisant un tour, ne peut pas être déformé continuellement vers le fibré trivial². Cette restriction est due au plongement dans l'espace \mathbb{R}^3 (dans \mathbb{R}^4 , cela serait possible), et n'est pas une propriété intrinsèque du fibré qui est trivial d'après la définition 23.1.2.

Calcul de l'indice topologique de Stiefel-Whitney : Nous avons donné la définition 23.1.3 d'une section s d'une fibré $F \rightarrow B$. On appelle **zéro de la section** s les points $x \in B$ tels que $s(x) = 0$. Une section est localement comme une fonction numérique à valeur réelle, donc génériquement, elle s'annule transversalement en des points isolés. Noter que "générique" signifie "sauf cas exceptionnel".

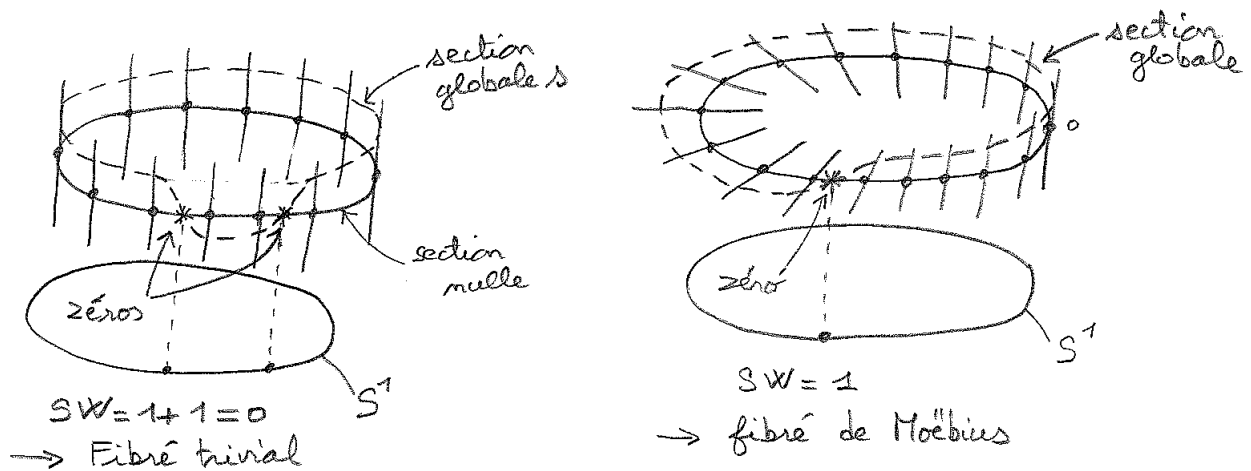
La figure suivante montre que l'on a le résultat suivant :

2. Preuve : si on découpe ce ruban sur la section $s = 0$, on obtient deux rubans entrelacés, alors que la même découpe pour un ruban trivial donne deux rubans séparés.

Théorème 23.1.7. Si $F \rightarrow S^1$ est un fibré réel de rang 1 sur S^1 , et s est une section "générique", alors l'indice topologique $SW(F)$ est donné par

$$SW(F) = \sum_{x \text{ t.q. } s(x)=0} \sigma_s(x)$$

où $\sigma_s(x) = 1$ pour un zéro générique de la section s . La somme est obtenue modulo 2, et ainsi $SW(F) \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Le résultat est indépendant de la section s choisie.



23.1.2 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 2 sur S^2

Dans cette section nous considérons un autre exemple simple : nous montrons que l'on peut caractériser la topologie d'un espace fibré vectoriel de rang 2 sur la sphère S^2 . Nous procédons de façon similaire au cas précédent. Pour simplifier on suppose que les fibres sont toutes orientées.

Construction d'un fibré de rang 2 sur S^2 . Voyons tout d'abord comment construire un espace fibré de rang 2 sur S^2 . On découpe la sphère S^2 le long de l'équateur, obtenant deux hémisphères H_1 et H_2 . On considère les fibrés triviaux $F_1 = H_1 \times \mathbb{R}^2$ et $F_2 = H_2 \times \mathbb{R}^2$ sur chaque hémisphère. Pour construire un fibré sur S^2 , il suffit de décider comment "coller" ou "identifier" les fibres de F_1 au-dessus de l'équateur avec celles de F_2 . Notons $\theta \in S^1$ l'angle³ (longitude) qui caractérise un point sur l'équateur. Notons $\varphi(\theta) \in S^1$ l'angle qui signifie que la fibre $F_2(\theta)$ est recollée à la fibre $F_1(\theta)$ après une rotation d'angle $\varphi(\theta)$. En notation complexe, $F_2(\theta) = e^{i\varphi(\theta)} F_1(\theta)$. Après recollement des deux hémisphères et des fibres au dessus de l'équateur, on obtient un fibré $F \rightarrow S^2$ de rang 2. Ainsi le fibré F que

3. Ici on note S^1 le cercle. $\theta \in S^1$ est donc repéré par un angle $\theta \in [0, 2\pi]$.

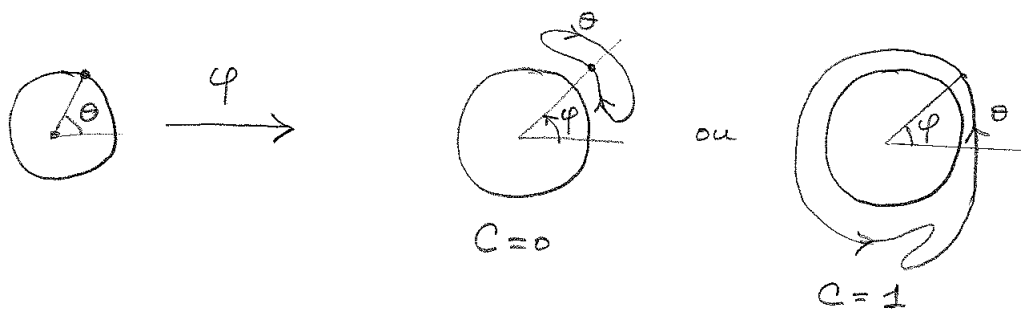
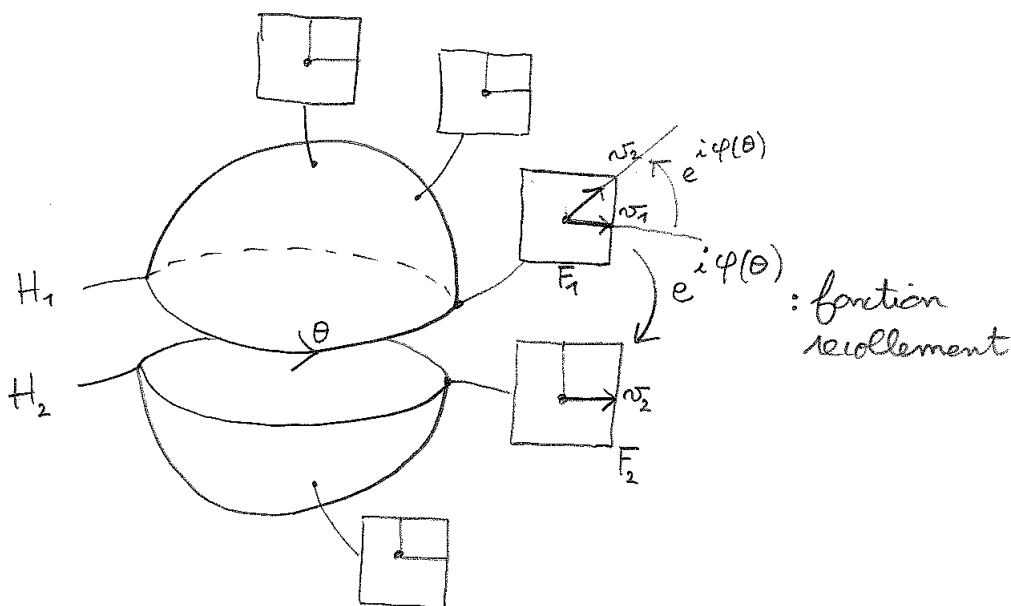
l'on vient de construire est défini par sa **fonction de recollement** sur l'équateur :

$$\varphi : \theta \in S^1 \rightarrow \varphi(\theta) \in S^1$$

C'est une fonction continue et périodique donc : $\varphi(2\pi) \equiv \varphi(0) [2\pi]$, soit

$$\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi C, \quad C \in \mathbb{Z} \tag{23.1.4}$$

l'indice entier C représente le nombre de tours que fait φ , lorsque θ fait un tour. On appelle C le **degré de l'application** $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$. Il est clair que deux fonctions φ, φ' sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même degré $C = C'$, et par conséquent les fibrés F et F' sont isomorphes si et seulement si $C = C'$.



Théorème 23.1.8. *Tout fibré réel $F \rightarrow S^2$ de rang 2 est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus avec une fonction de recollement sur l'équateur. Sa topologie est caractérisée par un entier $C \in \mathbb{Z}$ appelé (1er) **indice de Chern**. Autrement dit*

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^2(S^2) = \mathbb{Z}$$

Démonstration. Il nous faut montrer que tout fibré F est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus. Partant d'un tel fibré F , on coupe l'espace de base S^2 le long de l'équateur noté E pour obtenir deux fibrés $F_1 \rightarrow H_1$ et $F_2 \rightarrow H_2$. Chacun de ces fibrés est trivial car⁴ les espaces de base sont des disques B_2 (voir Théorème 23.1.5). Le fibré F est donc défini par sa fonction de recollement au dessus de l'équateur E . □

Théorème 23.1.9. *Le fibré tangent TS^2 n'est pas trivial, son indice de Chern est :*

$$C(TS^2) = +2 \tag{23.1.5}$$

Exercice 23.1.10. Ecrire la preuve du théorème 23.1.9. Aide : utiliser deux champs de vecteurs v_1, v_2 sur les Hémisphères H_1, H_2 , comme pour la définition de l'indice de Chern. Solution : voir page 329.

Remarques :

- Le fibré trivial $S^2 \times \mathbb{R}^2$ a l'indice de Chern $C = 0$.
- On verra plus loin un exemple important en physique⁵ de fibré $F \rightarrow S^2$ de rang 2 réel avec l'indice de Chern $C(F) = -1$. Cela nous fera donc trois exemples de fibrés sur S^2 , avec indice $C = 0, +2, -1$.
- Dans les exemples précédents, l'indice de Chern permet de caractériser la topologie du fibré (à isomorphisme près). En dimension supérieure, il existe plusieurs indices de Chern, mais ceci ne suffisent pas en général à caractériser complètement la topologie du fibré. L'exemple le plus simple est un fibré complexe de rang 2 sur S^5 , pour qui $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^2(S^5) = \pi_4(U(2)) = \{0, 1\}$ (appelé "domaine instable"), mais dont les indices de Chern sont toujours nuls. La K-théorie est une théorie qui fournit une classification partielle des fibrés vectoriels[16].

4. Voir [16, corollaire 1.8 p.21] ou d'après l'explication suivante : on choisit un vecteur non nul $v_0 \in F_1(x_0)$ où $x_0 \in H_1$ est le pôle nord. Soit $x_\theta \in E$ un point sur l'équateur. En utilisant un transport parallèle, on transporte le vecteur v_0 du point x_0 vers $x_\theta \in E$, radialement. Cela définit une section v_1 jamais nulle du fibré $F_1 \rightarrow H_1$, montrant que ce fibré est trivial, donc isomorphe à $F_1 \simeq H_1 \times \mathbb{R}^2$. De même pour $F_2 \simeq H_2 \times \mathbb{R}^2$.

5. en rapport avec le spin 1/2 ou les systèmes quantiques à 2 états

23.1.2.1 Connexion et indice de Chern

On verra plus loin que la topologie du fibré (son indice de Chern) peut se calculer à l'aide de la courbure qui provient d'une connexion. Par exemple dans le cas du fibré tangent à une surface $T\mathcal{S}$, on a une expression pour l'indice de Chern à partir de l'intégrale de courbure, appelée **formule de Gauss-Bonnet**,

$$C(T\mathcal{S}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}} k d^2s \quad (23.1.6)$$

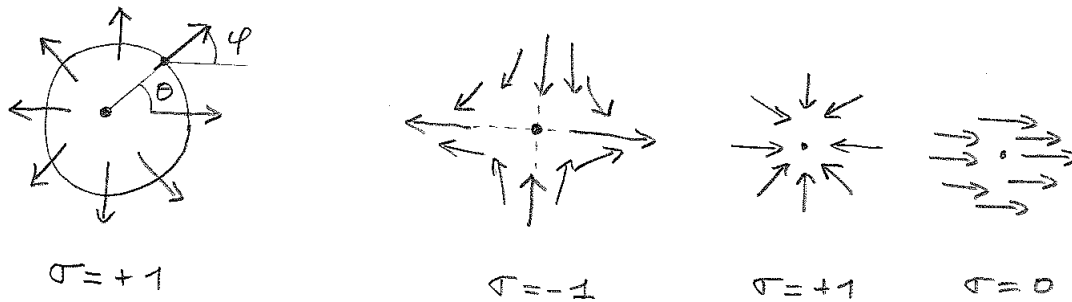
où k est la courbure de Gauss. Dans le cas de la sphère S^2 de rayon R , la courbure est $k = \frac{1}{R^2}$ partout, donnant $C(TS^2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^2} \frac{1}{R^2} d^2s = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

Remarque :

- La courbure d'une surface est une **notion de géométrie**. Elle varie continuellement et change si on déforme la surface. Au contraire, l'indice de Chern d'un fibré est un entier, c'est un **indice topologique** qui ne varie pas lorsque l'on déforme continuellement la surface. C'est une quantité plus "robuste", et indépendante de la géométrie. La formule de Gauss-Bonnet (23.1.6) est un exemple de formule où **on déduit des quantités topologiques à partir de quantités géométriques** (Si on modifie la surface continuellement l'intégrand varie, mais le résultat de l'intégrale reste un entier constant).

23.1.2.2 Topologie d'un espace fibré sur S^2 à partir des zéros d'une section

Remarquons qu'une section s d'un fibré de rang 2 sur une surface est localement comme une fonction à deux variables et à valeurs dans \mathbb{R}^2 , donc génériquement, elle s'annule transversalement en des points isolés. Si $\theta \in S^1$ paramétrise un petit cercle de points x_θ autour d'un zéro $x \in S^2$ de s , alors par hypothèse, la valeur de la section $s(x_\theta) \in F_{x_\theta} \cong \mathbb{R}^2$ est non nulle pour tout x_θ , et l'on note $\varphi \in S^1$ son argument. Au zéro est donc associé une application $\varphi : \theta \rightarrow \varphi(\theta)$ dont le degré aussi appelé **indice** du zéro de la section (défini par Eq.(23.1.4)), sera noté $\sigma_s(x) \in \mathbb{Z}$. Génériquement, $\sigma_s(x) = \pm 1$. (Noter que le signe de $\sigma_s(x)$ dépend de l'orientation choisie de l'espace de base et de la fibre. Dans le cas du fibré tangent, ces deux orientations ne sont pas indépendantes, et le résultat $\sigma_s(x)$ devient indépendant de l'orientation).



indices d'un champ de vecteur

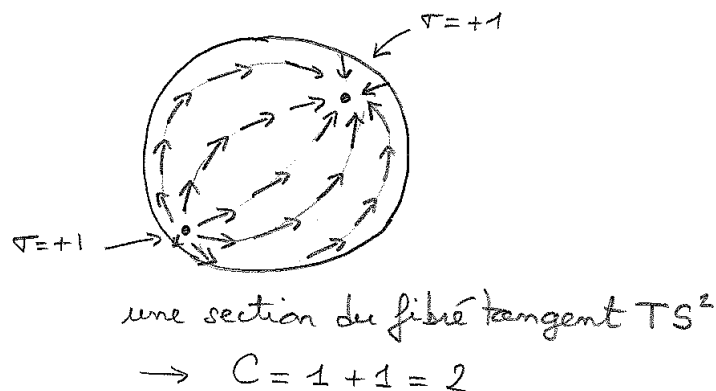
Théorème 23.1.11. Si $F \rightarrow S^2$ est un fibré réel de rang 2 sur S^2 , et s est une section "générique", alors l'indice topologique de Chern $C(F)$ est donné par

$$C(F) = \sum_{x \text{ t.q. } s(x)=0} \sigma_s(x) \in \mathbb{Z} \tag{23.1.7}$$

où $\sigma_s(x) = \pm 1$ caractérise le degré du zéro. Le résultat est indépendant de la section s choisie.

Démonstration. Dans la preuve du théorème 23.1.8, on a construit des sections jamais nulles v_1, v_2 respectivement des fibrés $F \rightarrow H_1, F \rightarrow H_2$. Si on modifie ces sections v_1, v_2 pour les faire coïncider sur l'équateur dans le but de construire une section globale s du fibré $F \rightarrow S^2$, on peut y arriver sauf en des points isolés, qui seront les zéros de s , et on s'aperçoit que la somme des indices sera égale au degré de la fonction de recollement φ donc à $C(F)$. □

Exemple du fibré tangent TS^2 La figure suivante montre un champ de vecteur sur la sphère S^2 . C'est une section globale du fibré tangent. Ce champ de vecteur a deux zéros d'indice +1 chacun. Ainsi on retrouve $C(TS^2) = +2$, soit Eq.(23.1.5).



Remarque : Si l'on souhaite expliciter le champ de vecteur, on peut prendre le vecteur fixe dans \mathbb{R}^3 : $V = (0, 0, 1)$ orienté selon l'axe z . Alors pour un point $x \in S^2$ donné, on choisit :

$$V_x = P_x V \in TS^2 \tag{23.1.8}$$

est un vecteur tangent (ici P_x est le projecteur (??)). Le champ de vecteur V_x s'annule au pôle nord et sud, avec un indice $+1$.

Exercice 23.1.12. Le fibré canonique sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

Considérons l'espace vectoriel complexe $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Il est utilisé en mécanique quantique pour décrire des systèmes à deux niveaux. Si $\psi \in \mathbb{C}^2$, $\psi \neq 0$, on associe l'espace de dimension 1 :

$$[\psi] = \{\lambda\psi, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$$

Alors l'ensemble de ces espaces est noté $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ appelé espace projectif complexe.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \cong S^2$ est une sphère.
2. Pour un point $[\psi] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ on associe l'espace vectoriel $F_{[\psi]} = [\psi]$ lui-même. On obtient un espace fibré complexe de rang 1

$$F \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$$

appelé fibré canonique sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$. Montrer que son indice de Chern est :

$$C(F \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)) = -1$$

Exercice 23.1.13. Une matrice Hermitienne 2×2 peut s'écrire :

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta + z & x + iy \\ x - iy & \delta - z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\delta \text{Id} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma})$$

avec $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\delta \in \mathbb{R}$ et les matrices de Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. On a $\text{Tr}(H) = \delta$. On va supposer $\delta = 0$.

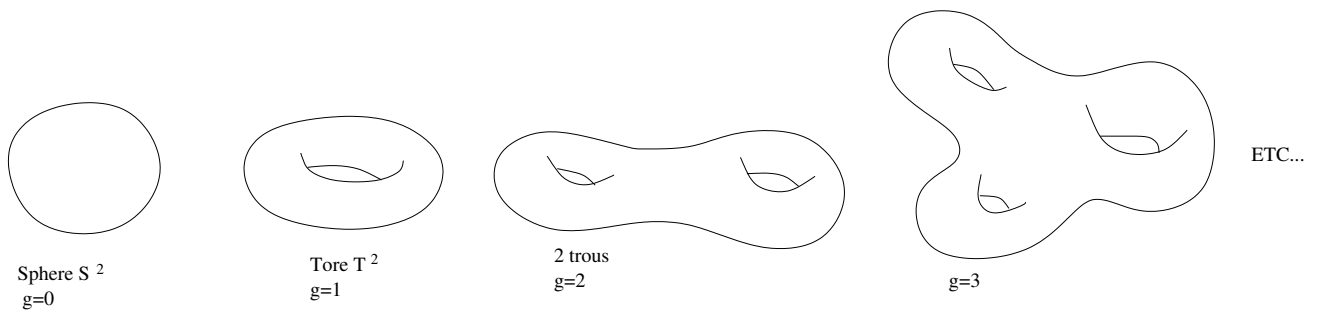


FIGURE 23.1.2 – Surfaces de genre g

1. Calculer les valeurs propres $E_-(\vec{x}) \leq E_+(\vec{x})$ de H . Pour quel(s) paramètre(s) \vec{x} a-t-on dégénérescence $E_+(\vec{x}) = E_-(\vec{x})$? Tracer les surfaces $E_\pm(x, y, 0) \in \mathbb{R}$ en fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pourquoi appelle-t-on cela le “point diabolique” ?
2. Si il n’y a pas dégénérescence, on note $F_\pm(\vec{x}) \subset \mathbb{C}^2$ les espaces propres associés (espaces complexes de dim 1). Si $B \subset \mathbb{R}^3$ est une surface plongée, qui ne contient pas les lieux de dégénérescence, on obtient donc deux espaces fibrés de rang 1 $F_\pm \rightarrow B$. Donner la valeur des indices de Chern $C(F_\pm)$, selon la surface B .
3. Plus généralement, si B est une surface (dim 2 réelle) compacte interprétée comme un “espace de paramètres”, et $b \in B \rightarrow H(b) \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ une famille continue de matrices Hermitiennes dépendant des paramètres b , à quelle condition $F_\pm \rightarrow B$ définissent des espaces fibrés de rang 1? Dans ce cas donner une formule pratique pour calculer leur indices de Chern $C(F_\pm)$.

Exercice 23.1.14. Surfaces fermées orientées

Solution : voir page 330.

On admet le résultat suivant dit “théorème de classification des surfaces” : une surface orientée fermée sans bord est homéomorphe à l’une des surface suivante, caractérisée par son **genre** $g \in \mathbb{N}$, qui est le nombre de “trous” c’est à dire de “ances” :

On note \mathcal{S} une telle surface, et on définit l’indice de Chern du fibré tangent $T\mathcal{S}$ par l’entier :

$$C(T\mathcal{S}) = \sum_{x^* \in \mathcal{S}, /s(x^*)=0} \sigma_s(x^*)$$

où s est une section générique de $T\mathcal{S}$ (i.e. champ de vecteur), et $\sigma_s(x^*) = \pm 1$ est le degré du zéro de la section en x^* . On a vu que $C(T\mathcal{S})$ ne dépend pas de la section s choisie.

1. On choisissant une section appropriée, montrer graphiquement que

$$C(T\mathcal{S}) = 2 - 2g$$

2. Une **triangulation** (respect. polygonisation) de la surface est un graphe recouvrant

la surface et dont les faces sont des triangles (respect. polygones). On note

$$\begin{aligned} V &= \text{nombre de sommets (Vertices)} \\ E &= \text{nombre d'arêtes (Edges)} \\ F &= \text{nombre de faces} \end{aligned}$$

et l'on définit l'**indice d'Euler Poincaré** par

$$\chi(\mathcal{S}) = V - E + F$$

Montrer que

$$\chi(\mathcal{S}) = C(T\mathcal{S})$$

et déduire donc que $\chi(\mathcal{S})$ est indépendant de la triangulation. (Aide : utiliser une section globale de $T\mathcal{S}$ adaptée à chaque triangle, avec un zéro au centre de la face, au milieu des arêtes, et aux sommets)

3. Choisir des exemples de triangulation (ou polygonisation) de la sphère (ou du tore) et vérifier la formule $\chi(\mathcal{S}) = C(T\mathcal{S}) = 2 - 2g$. (Ex : tétraèdre, etc...).

23.2 Connexion et dérivée covariante

23.2.1 Définition d'une connexion ou dérivée covariante

— Soit M une variété. On considère un espace fibré vectoriel

$$F \rightarrow M$$

de rang r .

Rappel : cela signifie que en tout point $x \in M$, la fibre F_x est un espace vectoriel réel (ou complexe) de dimension r . Voir définition Eq.(23.1.1) page 250.

— Eventuellement, on supposera qu'il y a une métrique⁶ dans chaque fibre F_x , notée h_x . Ainsi si $s_1, s_2 \in F_x$.

$$h_x(s_1, s_2) \in \mathbb{R} \tag{23.2.1}$$

On notera

$$|s|^2 = h_x(s, s) \tag{23.2.2}$$

la norme associée.

— Si le fibré est complexe de rang r , i.e. $\dim_{\mathbb{C}} F_x = r$, la métrique h est une **métrique hermitienne**⁷. On dit que F est un **espace fibré hermitien**.

6. Attention, il s'agit d'une métrique dans chaque fibre F_x et non pas d'une métrique sur M qui correspondrait à une métrique sur chaque espace tangent $T_x M$.

7. cad $h(as_1, bs_2) = \bar{a}b h(s_1, s_2)$, pour $a, b \in \mathbb{C}$

La notion de connexion que l'on va introduire maintenant est une structure supplémentaire sur l'espace fibré qui "connecte" les fibres les une aux autres (localement). Lorsque on se déplace continuellement d'une fibre à une autre en suivant cette connexion, on dit que l'on suit le transport parallèle. Il y a plusieurs façon équivalentes de formuler la définition d'une connexion, et la plus pratique utilise l'opérateur différentiel appelé dérivée covariante. Si on se déplace d'une fibre à une autre sans suivre la connexion, la dérivée covariante mesure la déviation par rapport au transport parallèle. Voici la définition précise, et son interprétation ci-dessous :

Définition 23.2.1. Une **connexion** D (ou **dérivée covariante**) sur un espace fibré vectoriel $F \rightarrow M$ est un opérateur différentiel d'ordre un :

$$D : C^\infty(F) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1 \otimes F) \tag{23.2.3}$$

tel que pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, et section $s \in C^\infty(F)$

$$D(fs) = (df)s + f.Ds : \tag{23.2.4}$$

appelée **règle de Leibnitz**. (équation interprétée ci-dessous). Si de plus, il y a une métrique h sur F , on impose à la connexion de préserver le produit scalaire : si $s_1, s_2 \in C^\infty(F)$,

$$d(h(s_1, s_2)) = h(Ds_1, s_2) + h(s_1, Ds_2) \tag{23.2.5}$$

(équation interprétée ci-dessous). On dit que la connexion est **compatible** avec la métrique hermitienne h .

Remarques :

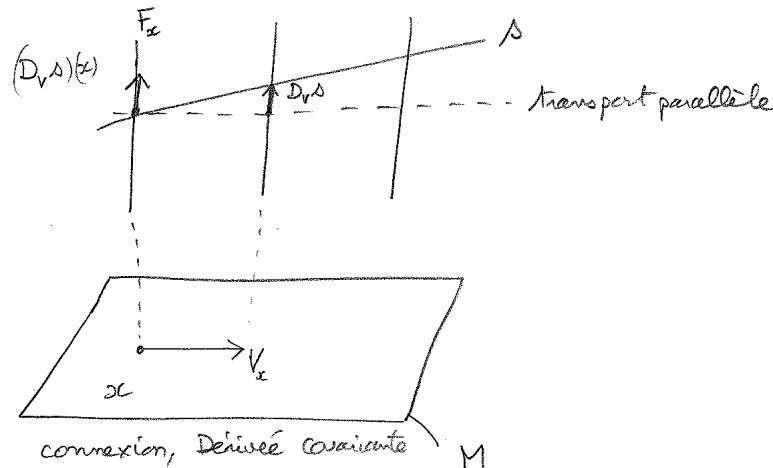
- D'une certaine façon la connexion généralise la différentielle d , Eq.(20.5.1), qui correspond au cas d'un fibré trivial $F = M \times \mathbb{R}^r$ et pour laquelle on a la règle de Leibnitz (20.5.2).
- Pour expliquer la définition ci-dessus, notons que en tout point $x \in M$, le produit tensoriel $\Lambda_x^1 \otimes F_x$ est un espace vectoriel et donc $Ds \in C^\infty(\Lambda^1 \otimes F)$ signifie que $(Ds)(x)$ est à valeur dans cet espace. $\Lambda_x^1 = T_x^*M$ est l'espace cotangent, le dual de l'espace tangent, donc la composantes dans Λ^1 de Ds est faite pour se contracter avec un vecteur tangent : si $V \in T_xM$ est un vecteur tangent alors $(D_Vs)(x) \in F_x$. Donc si $V \in C^\infty(TM)$ est un champ de vecteur et $s \in C^\infty(F)$ une section, la "dérivée covariante selon V " donne une autre section :

$$s' = D_Vs \in C^\infty(F)$$

et la relation de Leibnitz s'écrit (utilisant (18.4.1)) :

$$D_V(fs) = df(V)s + fD_Vs = V(f)s + fD_Vs \tag{23.2.6}$$

- La figure ci-dessous montre que au point $x \in M$, $D_V s(x) \in F_x$ mesure l'écart entre la section et le transport parallèle dans la direction V_x .



- En particulier, on dit que la section s suit le **transport parallèle** selon la direction V au point $x \in M$ si

$$(D_V s)(x) = 0.$$

- Expliquons Eq.(23.2.5) : Si $V \in C^\infty(TM)$ est un champ de vecteur, alors Eq.(23.2.5) et Eq.(18.4.1) donnent :

$$V(h(s_1, s_2)) = dh(s_1, s_2)(V) = h(D_V s_1, s_2) + h(s_1, D_V s_2)$$

ce qui signifie que la variation du produit scalaire $h(s_1, s_2)$ dans la direction V est liée aux dérivées covariantes $D_V s_1$ et $D_V s_2$. En particulier, si les sections s_1 et s_2 suivent le transport parallèle selon la direction V , c'est à dire si $D_V s_1 = 0$, $D_V s_2 = 0$, alors $V(h(s_1, s_2)) = 0$. Le produit scalaire $h(s_1, s_2)$ est constant et donc préservé dans la direction V .

- Sur tout fibré vectoriel, il existe toujours des connexions. (preuve : on en construit par partitions de l'unité [14, p.19])

23.2.2 Exemple : la connexion de Levi-Civita

Il s'agit d'un exemple très important, qui apparait souvent en physique et qui d'un certain point de vue est universelle, au sens ou tout fibré avec connexion peut se ramener à cette situation.

Soit \mathcal{H} un espace vectoriel (réel ou complexe) fixé munit d'une métrique h (Euclidienne ou Hermitienne), et M une variété différentiable. Soit $r \geq 1$ entier. On suppose donnée une application C^∞ :

$$F : x \in M \rightarrow F_x \subset \mathcal{H} \tag{23.2.7}$$

où pour tout $x \in M$, F_x est un sous espace vectoriel de \mathcal{H} de dimension r . Cela définit un espace fibré vectoriel de rang r sur M noté $F \rightarrow M$. Notons

$$P_x : \mathcal{H} \rightarrow F_x$$

le projecteur orthogonal sur F_x .

Théorème 23.2.2. *L'opérateur différentiel*

$$D := P_x d \tag{23.2.8}$$

où d la différentielle ordinaire dans \mathcal{H} , est une connexion compatible avec la métrique, appelée **connexion de Levi-Civita**.

Démonstration. Vérifions d'abord que D satisfait bien Eq.(23.2.4). On utilise le fait que pour une section $s \in C^\infty(F)$, $s(x) \in F_x$, donc $P_x s(x) = s(x)$. On calcule dans l'espace \mathcal{H} :

$$D(fs) = Pd(fs) = P((df)s + fds) = (df)Ps + fPds = (df)s + fDs.$$

On vérifie maintenant que D vérifie la relation de compatibilité Eq.(23.2.5). Une section $s_1 \in C^\infty(F)$ peut être considérée comme une application $s_1 : M \rightarrow \mathcal{H}$. Alors

$$dh(s_1, s_2) = h(ds_1, s_2) + h(s_1, ds_2)$$

or $Ps_2 = s_2$ et P est un projecteur orthogonal donc $P^\dagger = P$, donc

$$h(ds_1, s_2) = h(ds_1, Ps_2) = h(P^\dagger ds_1, s_2) = h(Pds_1, s_2) = h(Ds_1, s_2)$$

de même $h(s_1, ds_2) = h(s_1, Ds_2)$. On obtient Eq.(23.2.5). \square

Nous allons considérer maintenant deux exemples particuliers mais importants en physique de connexion de Levi-Civita provenant d'une application comme (23.2.7).

23.2.2.1 Exemple : fibré tangent TM d'une variété $M \subset \mathbb{R}^n$. Pendule de Foucault

Pendule de Foucault : Pour plus de détails, voir le cours [12].

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (donc ici $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$), considérons une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ lisse. En chaque point $x \in \mathcal{S}$, l'espace tangent $T_x \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est un sous espace linéaire de \mathbb{R}^3 . Ainsi l'application $F : x \in \mathcal{S} \rightarrow F_x := T_x \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est de la forme (23.2.7).

La connexion de Levi-Civita $D = P_x d$ définie plus haut est dans le cas présent une connexion sur le fibré tangent $T\mathcal{S}$.

Il se trouve que cette connexion a une importance directe dans l'évolution du "**pendule de Foucault**". Dans ce cas, on considère la surface $\mathcal{S} = S^2$ (surface de la Terre, fixe par

rapport aux étoiles). Le direction du pendule de Foucault est repérée par un vecteur tangent $v_x \in T_x S^2$. Comme la Terre tourne, le point x se déplace sur la surface S^2 . On montre que par “principe d’inertie”, et dans le régime adiabatique (période du pendule \ll période de rotation de la Terre) que le vecteur v_x suit le transport parallèle :

$$Dv_x = 0$$

Cette équation détermine l’évolution du pendule.

Remarque 23.2.3. Le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^3 induit un produit scalaire sur chaque espace tangent $T_x \mathcal{S}$, autrement dit une métrique g sur la surface \mathcal{S} appelée métrique induite. On montrera dans la Section 23.3 que la connexion de Levi-Civita considérée ici est identique à la connexion de Riemann définie directement par cette métrique g . (La connexion de Riemann est associée à une variété Riemannienne, et ne nécessite pas que celle-ci soit plongée dans un espace Euclidien. On parle de connexion “intrinsèque”).

Fibré tangent TM d’une variété $M \subset \mathbb{R}^n$ Plus généralement si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de l’espace euclidien $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, on a les mêmes considérations, i.e. une connexion de Levi-Civita sur l’espace tangent TM et une métrique induite g sur M . De plus la connexion de Riemann définie plus loin coïncide avec cette connexion de Levi-Civita.

— Dans le cas d’un sous-espace linéaire $M \subset \mathbb{R}^n$ alors $T_x M = M$ est constant. Par conséquent le projecteur P_x est aussi constant et pour une famille de vecteurs $v \in T_x M = M$, la dérivée covariante $D = Pd = d$ s’identifie à la dérivée ordinaire d .

Dans le cas d’une variété $M \subset \mathbb{R}^n$ (penser une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$), il y a plusieurs notions importantes que l’on peut considérer à partir de la connexion de Levi-Civita :

Géodésiques : Si $\gamma(t)$ est une courbe paramétrée sur M , alors on considère son vecteur vitesse $v(t) = \frac{d\gamma}{dt}$ (vecteur tangent à γ), et par définition on dit que γ est une **géodésique** si $v(t)$ suit le transport parallèle, i.e.

$$D_v v = 0 \tag{23.2.9}$$

ou $\frac{Dv}{dt} = 0$. Intuitivement cela signifie que $v(t)$ reste le plus parallèle possible. (Noter que dans le cas d’un sous-espace linéaire cela donne $\frac{dv}{dt} = 0$ soit $v = cste$. Donc une géodésique est une droite paramétrée de sorte à avoir une vitesse constante).

— De façon “expérimentale” pour construire une géodésique sur une surface \mathcal{S} , partant d’un point x_0 et d’un vecteur vitesse $v_0 \in T_{x_0} \mathcal{S}$, il suffit de poser soigneusement un ruban de scotch partant de ces conditions initiales. Plus généralement montrer l’équivalent de cette affirmation pour une variété $M \subset \mathbb{R}^n$?

— En relativité générale, l’espace temps est une variété Lorentzienne M . Si on imagine $M \subset \mathbb{R}^{1,n}$ comme sous-variété d’un espace linéaire de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ (on suppose que $T_x M$ n’est pas de type espace en aucun point), le fibré tangent TM a une connexion de Levi-Civita. En relativité, la “ligne d’univers d’une particule libre” est une géodésique. Le transport parallèle d’un repère le long de cette géodésique définit le “**référentiel d’inertie**” de la particule.

Holonomie : On verra ci-dessous la notion d’holonomie induite par la connexion. Par exemple, l’angle de Foucault mesuré après un jour est une holonomie. Pour une surface, l’holonomie est est angle. Plus généralement dans le cas $M \subset \mathbb{R}^n$, l’holonomie est une transformation orthogonale de $O(n)$ ($SO(n)$ si la variété est orientée). En relativité, l’holonomie a une importance pour l’effet de “précession de Thomas” (ref : Itzykson-Zuber).

23.2.2.2 Exemple de la Connexion de Berry

Pour plus de détails, voir le cours [12].

En mécanique quantique l’état d’un système physique est représenté par un vecteur $\psi \in \mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert. L’équation de Schrödinger qui régit l’évolution temporelle de $\psi(t)$ est linéaire (on a posé $\hbar = 1$) :

$$i \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi \tag{23.2.10}$$

et par conséquent cela définit une évolution sur l’espace projectif $[\psi(t)] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$. Il est donc naturel de considérer le fibré canonique $F \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ qui est un fibré de rang 1 complexe, et où une fibre au dessus de $[\psi]$ avec $\psi \in \mathcal{H}, \psi \neq 0$, est définie par

$$F_{[\psi]} := \{\lambda\psi, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

c’est à dire les vecteurs proportionnels à ψ . On a une application

$$F : [\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow F_{[\psi]} \subset \mathcal{H}$$

qui est de la forme (23.2.7). Par conséquent il y a une connexion de Levi-Civita sur le fibré canonique, appelée “**connexion de Berry**” en physique. On montre que l’évolution quantique ne suit pas le transport parallèle de cette connexion :

Proposition 23.2.4. *Si $\psi(t)$ est solution de l’équation de Schrödinger (23.2.10), alors la dérivée covariante est donnée par :*

$$\frac{D\psi}{dt} = -i \frac{\langle \psi | \hat{H} \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \cdot \psi \tag{23.2.11}$$

on voit apparaitre “l’énergie moyenne” $E_\psi := \frac{\langle \psi | \hat{H} \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$.

Exercice 23.2.5. Montrer (23.2.11).

23.2.3 Expression de la connexion par rapport à une trivialisaton locale du fibré

(réf : J.P. Demailly chap.V [10]).

Soit $F \rightarrow M$ un espace fibré vectoriel de rang r munit d'une connexion D . Soit $U \subset M$ un petit domaine ouvert, tel que le fibré $F \rightarrow U$ soit trivial⁸.

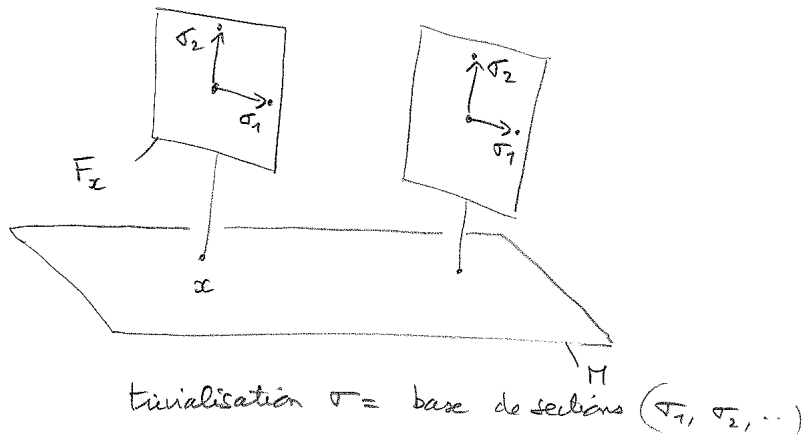
23.2.3.1 Choix de Jauge

On rappelle une définition déjà donnée au Th. 23.1.4 page 255.

Définition 23.2.6. Un "choix de Jauge" ou trivialisaton du fibré $F \rightarrow U$ est un ensemble de r sections C^∞ de "référence"

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \tag{23.2.12}$$

tels que pour tout $x \in U$, $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x))$ forme une base de la fibre F_x .



Ainsi, une section $s \in C^\infty(F)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base :

$$s(x) = \sum_{\mu=1}^r \psi^\mu(x) \sigma_\mu(x) = \psi \cdot \sigma$$

où $\psi^\mu(x) \in \mathbb{R}$ formant les composantes⁹, sont des fonctions C^∞ à valeurs réelles (ou complexes pour un fibré vectoriel complexe).

8. Rappelons que pour des raisons de topologie (voir Th. 23.1.4 page 255), si le fibré F n'est pas trivial, il n'est pas possible de trouver une trivialisaton sur tout l'espace M , mais cela est toujours possible sur un voisinage U d'un point par définition d'un espace fibré. (Il suffit que U soit contractile).

9. Par convention, on utilisera des indices grecs μ, ν, \dots pour les composantes dans la fibre F_x , et des indices i, j, \dots pour les coordonnées sur M ou les composantes dans l'espace tangent.

Pour chaque $\mu \in \{1, \dots, r\}$, la dérivée covariante de la section σ_μ est $D\sigma_\mu$. C'est une 1-forme à valeur dans F que l'on décompose aussi par rapport à la base $(\sigma_\lambda)_\lambda$:

$$D\sigma_\mu = \sum_{\lambda=1}^r A_\mu^\lambda \sigma_\lambda \tag{23.2.13}$$

où composante $A_\mu^\lambda \in C^\infty(\Lambda^1)$ est une 1-forme sur $U \subset M$, et l'ensemble de ces composantes forment une matrice¹⁰ :

$$A := (A_\mu^\lambda)_{\mu, \lambda=1 \dots r} \in C^\infty(\Lambda^1 \otimes \text{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r))$$

appelée la **matrice de 1-formes de connexion** ou **“potentiel de Jauge”** qui représentent la connexion par rapport à la trivialisat. Noter que A dépend du choix de Jauge σ .

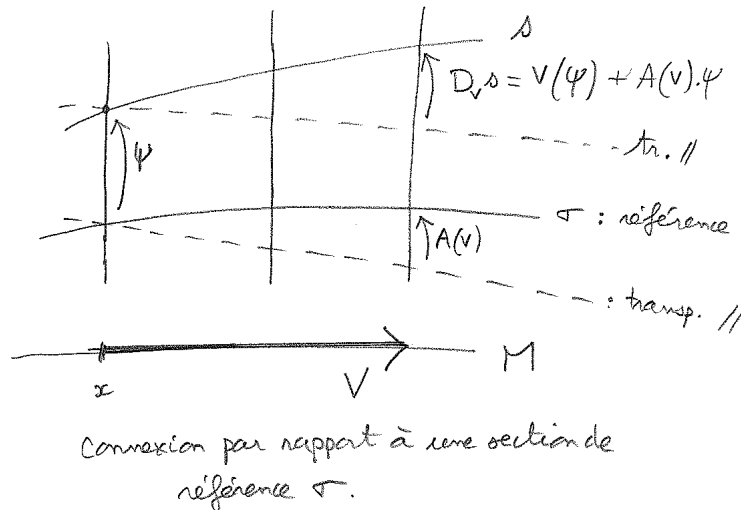
La règle de Leibnitz (23.2.4) donne alors :

$$\begin{aligned} Ds &= D\left(\sum_\mu \psi^\mu \sigma_\mu\right) = \sum_\lambda d\psi^\lambda \sigma_\lambda + \sum_\mu \psi^\mu D\sigma_\mu \\ &= \sum_\lambda d\psi^\lambda \sigma_\lambda + \sum_{\lambda, \mu} \psi^\mu A_\mu^\lambda \sigma_\lambda = \sum_\lambda \left(d\psi^\lambda + \sum_\mu \psi^\mu A_\mu^\lambda\right) \sigma_\lambda \end{aligned} \tag{23.2.14}$$

donc en abrégé :

$$\boxed{Ds \underset{\sigma}{\simeq} d\psi + \psi A} \tag{23.2.15}$$

Interprétation : si $V \in T_x M$ est un vecteur tangent alors la dérivée covariante $D_V s \underset{\sigma}{\simeq} V(\psi) + \psi A(V)$ est représenté sur la figure suivante (dans le cas simple d'un fibré en droites, i.e. de rang $r = 1$).



10. Rappel : $\text{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ est l'espace des matrices $r \times r$ (ou homomorphismes de \mathbb{R}^r dans \mathbb{R}^r). Ce sera $\text{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r)$ pour un fibré complexe.

Écriture dans un système de coordonnées Si (x_1, \dots, x_n) est un système de coordonnées locales sur $U \subset M$, alors pour chaque indice $\mu, \nu = 1 \dots r$ la 1 forme A_μ^ν s'écrit

$$A_\mu^\nu = \sum_{j=1}^n A_{\mu,j}^\nu(x) dx^j$$

avec les composantes

$$A_{\mu,j}^\nu(x) = i\mathcal{A}_{\mu,j}^\nu(x) \in \mathbb{C}.$$

De même

$$d\psi^\lambda = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^j} dx^j$$

et donc (23.2.14) donne

$$Ds = \sum_{\lambda=1}^r \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^j} + i \sum_{\mu} \psi^\mu \mathcal{A}_{\mu,j}^\lambda \right) (dx^j \otimes \sigma_\lambda) \quad (23.2.16)$$

faisant apparaître la composante $\left(\frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^j} + i \sum_{\mu} \psi^\mu \mathcal{A}_{\mu,j}^\lambda \right)$ qui est l'expression que l'on rencontre dans les livres de physique comme définition de la dérivée covariante.

23.2.3.2 Cas d'un fibré hermitien :

Si de plus F est un fibré hermitien de rang r , cela signifie qu'il y a une métrique h_x dans chaque fibre F_x , voir eq.(23.2.1). Chaque espace F_x est un espace hermitien ¹¹.

11. Rappels sur le groupe unitaire et ses générateurs :

Il faut avoir présent à l'esprit les résultats suivants sur le **groupe $U(r)$ des matrices $r \times r$ unitaires**, c'est à dire $U \in U(r)$ vérifie $U^*U = Id$. Si F est un espace vectoriel complexe de dimension r munit d'une métrique hermitienne h , alors un opérateur unitaire est représenté dans *une base orthonormée* par une matrice unitaire.

Si on écrit $U = \exp(A)$, on dit que A est un générateur de U (ou élément de **l'algèbre de Lie $u(r)$**). alors $U^*U = Id \Leftrightarrow \exp(A^*) \exp(A) = \exp(0) \Leftrightarrow A^* + A = 0$. Autrement dit A est une matrice anti-hermitienne :

$$A^* = -A$$

Une écriture équivalente (préférée en physique quantique) est $U = \exp(iH)$ avec H hermitien : $H^* = H = -iA$. On écrit

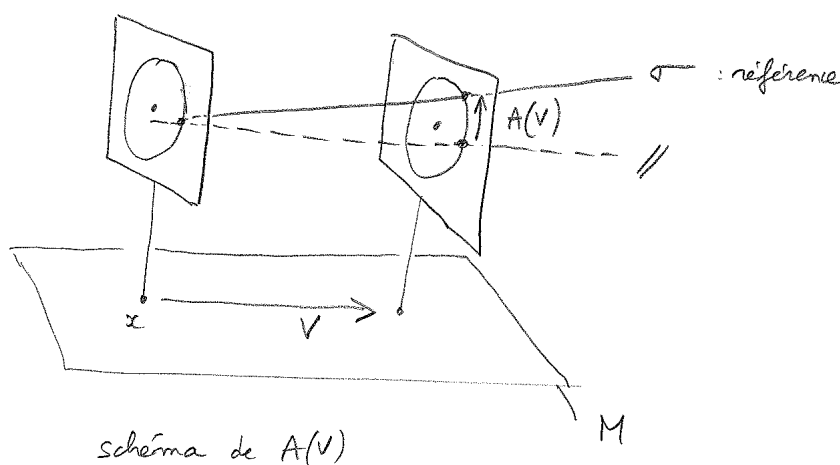
$$H \in \text{Herm}(\mathbb{C}^r)$$

Dans le cas $r = 1$, (une matrice unitaire $U \in U(1)$ est un nombre complexe de module 1), $U \equiv e^A = e^{i\varphi}$, avec $A = i\varphi \in i\mathbb{R}$.

Proposition 23.2.7. *Pour un fibré hermitien, il est naturel de choisir les sections σ de références (23.2.12) formant une base orthonormée, c'est à dire que en tout point $x \in M$:*

$$h_x(\sigma_\mu(x), \sigma_\nu(x)) = \delta_{\mu,\nu}$$

Par rapport à un tel choix de trivialisation, la matrice de connexion $A(x)$ est anti-hermitienne, c'est à dire : $A^(x) = -A(x)$. Dans le cas d'un fibré hermitien de rang $r = 1$, alors $A(x) \in i\mathbb{R}$. Voir figure.*



Démonstration. Avec l'équation de compatibilité (23.2.5) on déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= dh(\sigma_\mu, \sigma_\nu) = h(D\sigma_\mu, \sigma_\nu) + h(\sigma_\mu, D\sigma_\nu) \\ &= h\left(\sum_\lambda A_\mu^\lambda \sigma_\lambda, \sigma_\nu\right) + h\left(\sigma_\mu, \sum_\lambda A_\nu^\lambda \sigma_\lambda\right) \\ &= \sum_\lambda \bar{A}_\mu^\lambda \underbrace{h(\sigma_\lambda, \sigma_\nu)}_{\delta_{\lambda,\nu}} + \sum_\lambda A_\nu^\lambda h(\sigma_\mu, \sigma_\lambda) = \bar{A}_\mu^\nu + A_\nu^\mu \\ &= (A^*)_\nu^\mu + A_\nu^\mu \end{aligned}$$

donc

$$A^* + A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad iA = (iA)^*$$

□

23.2.3.3 Transformation de Jauge

Si $\tilde{\sigma}$ est une autre trivialisation (i.e. autre choix de Jauge) du fibré $F \rightarrow U$, avec $U \subset M$, on écrit

$$\tilde{\sigma}(x) = T(x) \sigma(x), \quad x \in U, \quad T(x) \in GL(F_x) \tag{23.2.17}$$

où $T(x) \in GL(F_x)$ est une application linéaire inversible de F_x , i.e. une matrice $r \times r$ inversible qui transforme la base $\sigma(x)$ en la base $\tilde{\sigma}(x)$. On dit que Eq.(23.2.17) est **une transformation de Jauge**. $T(x) \in GL(F_x)$ dépend de $x \in U$ de façon C^∞ .

Noter que si le fibré F est hermitien et que les bases $\tilde{\sigma}, \sigma$ sont orthonormées, alors $T(x) \in U(r)$ est une transformation unitaire (ou $T(x) \in O(r)$ orthogonale dans le cas d'un fibré réel). Si de plus le fibré est de rang $r = 1$, alors

$$T(x) = e^{i\varphi(x)}, \quad \varphi(x) \in \mathbb{R}$$

est un nombre de module 1, caractérisé par une phase $\varphi(x)$.

Proposition 23.2.8. Avec un changement de trivialisatation Eq.(23.2.17), la matrice de 1-forme de connexion A se transforme comme :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} + dT.T^{-1} \tag{23.2.18}$$

Une section s s'écrit :

$$s = \tilde{\psi}.\tilde{\sigma} = \psi.\sigma$$

et donc les composantes se transforment comme :

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)T^{-1}(x) = (T^{-1}(x))^t \psi(x)$$

Remarque 23.2.9. Dans le cas d'un **fibré hermitien de rang $r = 1$** , alors $T(x) = e^{i\varphi(x)}$, $A \in C^\infty(\Lambda^1)$ est une 1-forme à valeur dans $i\mathbb{R}$, et on obtient

$$\tilde{A} = e^{i\varphi} A e^{-i\varphi} + d(e^{i\varphi}) e^{-i\varphi} \tag{23.2.19}$$

$$= A + i d\varphi \tag{23.2.20}$$

Dans un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) , on écrit la 1-forme

$$A = i\mathcal{A} = \sum_i i\mathcal{A}_i(x) dx^i \tag{23.2.21}$$

Les composantes réelles $\vec{\mathcal{A}}(x) = (\mathcal{A}_1(x), \dots, \mathcal{A}_n(x))$ de Eq.(23.2.19) s'écrivent :

$$\vec{\tilde{\mathcal{A}}} = \vec{\mathcal{A}} + \vec{\text{grad}}(\varphi)$$

qui est l'expression de Transformation de Jauge rencontrée en électromagnétisme pour le potentiel vecteur.

Démonstration. On a par définition

$$D\tilde{\sigma} = \tilde{A}\tilde{\sigma}, \quad D\sigma = A\sigma$$

donc en utilisant la règle de Leibnitz

$$\begin{aligned} D(T\sigma) &= \tilde{A}T\sigma \\ \Leftrightarrow dT\sigma + TA\sigma &= \tilde{A}T\sigma \\ \Leftrightarrow dT + TA &= \tilde{A}T \\ \Leftrightarrow \tilde{A} &= dT.T^{-1} + TAT^{-1} \end{aligned}$$

Aussi

$$s = \tilde{\psi}.\tilde{\sigma} = \psi.\sigma = \psi.T^{-1}\tilde{\sigma} \implies \tilde{\psi} = \psi.T^{-1} = (T^{-1})^t.\psi$$

□

23.2.4 Courbure

Avant de définir la courbure, on généralise l'action de la dérivée covariante aux p-formes à valeur dans F . Le cas $p = 0$ est déjà défini par Eq.(23.2.3).

Définition 23.2.10. On définit la dérivée covariante agissant sur l'espace des sections $C^\infty(\Lambda^p \otimes F)$:

$$D : C^\infty(\Lambda^p \otimes F) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1} \otimes F)$$

pour tout $p \geq 0$, en imposant que si $f \in C^\infty(\Lambda^p)$ et $s \in C^\infty(F)$ alors

$$D(fs) = (df)s + (-1)^p f \wedge Ds$$

Il découle de (20.5.2) que pour tout $s \in C^\infty(\Lambda^q \otimes F)$ alors

$$D(f \wedge s) = df \wedge s + (-1)^p f \wedge Ds$$

Remarques :

- Cela est similaire à la loi de Leibnitz des formes différentielles Eq.(20.5.2). C'est une extension de la loi de Leibnitz aux formes différentielles à valeurs dans un fibré F .
- Si $s \in C^\infty(\Lambda^q \otimes F)$, et

$$s \underset{\sigma}{\simeq} \psi$$

alors comme pour Eq.(23.2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} Ds &\underset{\sigma}{\simeq} d\psi + (-1)^q \psi \wedge A \\ &\underset{\sigma}{\simeq} d\psi + A \wedge \psi \end{aligned} \tag{23.2.22}$$

Théorème 23.2.11. *”Définition de la courbure Ω ”. Pour tout $s \in C^\infty(\Lambda^q \otimes F)$ on a :*

$$DDs = \Omega \wedge s \quad (23.2.23)$$

avec

$$\Omega \in C^\infty(\Lambda^2 \otimes \text{Hom}(F))$$

(c'est à dire que en chaque point $x \in M$, $\Omega(x) \in \Lambda_x^2 \otimes \text{Hom}(F_x)$ est une 2-forme à valeur dans les transformations linéaires de la fibre F_x (ou anti-hermitien, $i\text{Herm}(F_x)$, si le fibré est hermitien). Ω est appelé **tenseur de courbure**.

Par rapport à une trivialisatation σ ,

$$\Omega \underset{\sigma}{\simeq} \Omega_\sigma = dA + A \wedge A \quad (23.2.24)$$

(où $A \wedge A$ signifie la matrice de 2-formes : $(A \wedge A)_\mu^\nu := \sum_{\lambda=1}^r A_\mu^\lambda \wedge A_\lambda^\nu$), et $\Omega_\sigma(x) \in \Lambda_x^2 \otimes \text{Hom}(\mathbb{R}^r)$ est la matrice de 2-formes qui représente Ω dans la base $(\sigma_\mu)_\mu$ c'est à dire

$$\Omega \sigma_\nu = \sum_\mu (\Omega_\sigma)_\nu^\mu \sigma_\mu$$

Remarque : de façon similaire on peut écrire l'effet sur les composantes. Si $s = \sum_\nu \psi^\nu \sigma_\nu$ alors $\Omega \wedge s = \sum_\mu \psi'^\mu \sigma_\mu$ avec $\psi'^\mu = \sum_\nu (\Omega_\sigma)_\nu^\mu \wedge \psi^\nu$.

Démonstration. On a

$$Ds \underset{\sigma}{\simeq} d\psi + A \wedge \psi$$

donc

$$\begin{aligned} DDs &\underset{\sigma}{\simeq} d(d\psi + A \wedge \psi) + A \wedge (d\psi + A \wedge \psi) \\ &\underset{\sigma}{\simeq} d^2\psi + dA \wedge \psi - A \wedge d\psi + A \wedge d\psi + A \wedge A \wedge \psi \\ &\underset{\sigma}{\simeq} (dA + A \wedge A) \wedge \psi \end{aligned}$$

□

Proposition 23.2.12. *“Autre expression de la courbure” (qui sert souvent de définition, [29] p.462). Pour tout champ de vecteur $U, V \in C^\infty(TM)$, et section $s \in C^\infty(\Lambda^q \otimes F)$*

$$\Omega(U, V)s = [D_U, D_V]s - D_{[U, V]}s \quad (23.2.25)$$

où $[D_U, D_V] := D_U D_V - D_V D_U$, et $[U, V]$ a été étudié en Eq.(18.3.8).

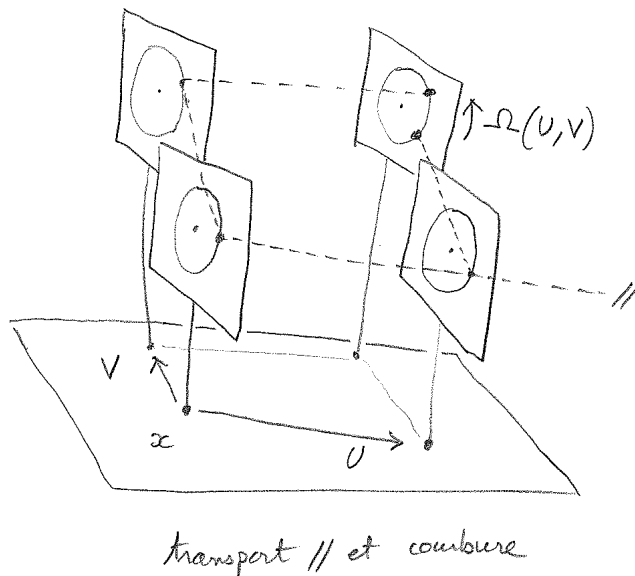


FIGURE 23.2.1 – Transport parallèle et courbure.

Démonstration. (tiré de [10] prop.3.6) Dans un système de coordonnées et pour une trivialisatation σ du fibré,

$$V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad s \simeq_{\sigma} \psi$$

$$Ds \simeq_{\sigma} d\psi + A \wedge \psi$$

$$A = \sum_j A_j dx^j$$

donc

$$\begin{aligned} D_V s &= V(\psi) + A(V)\psi \\ &= \sum_j V^j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + A_j \psi \right) \end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul, on peut supposer que en un point donné $x \in M$ alors $A(x) = 0$ (cela s'obtient par une transf. de Jauge (23.2.18), avec $T(x) = Id$, $dT(x) = -A(x)$) alors d'après (23.2.24)

$$\Omega_{\sigma}(x) = dA(x).$$

Donc

$$\begin{aligned}\Omega(U, V) s &= (dA)(U, V) \psi = \left(\sum_{i,j} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^j \right) (U, V) \psi \\ &= (U^i V^j - V^i U^j) \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \psi\end{aligned}$$

Par ailleurs (rappel que $A_i(x) = 0$),

$$\begin{aligned}D_U D_V s &\simeq_{\sigma} \sum_i U^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i \right) \sum_j V^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + A_j \right) \psi \\ &= \sum_{i,j} U^i \left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) + U^i V^j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + U^i V^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \psi\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}D_U D_V s - D_V D_U s &= \sum_{i,j} \left(U^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} - V^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) \\ &\quad + (U^i V^j - V^i U^j) \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \psi\end{aligned}$$

or d'après Eq.(??), si $W = [U, V]$ alors

$$\begin{aligned}D_W s &\simeq_{\sigma} \sum_j W^j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(U^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} - U^j \frac{\partial V^i}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right)\end{aligned}$$

donc

$$[D_U, D_V] s = D_{[U,V]} s + \Omega(U, V) s$$

□

Exercice 23.2.13. monter que une autre écriture possible de $A \wedge A$ est :

$$A \wedge A = \frac{1}{2} [A, A] := \frac{1}{2} \left(\sum_{\lambda=1}^r A_{\mu}^{\lambda} \otimes A_{\lambda}^{\nu} \right)_{\mu}^{\nu} \quad (23.2.26)$$

Proposition 23.2.14. “*Changement de Jauge pour la courbure*” Sous le changement de Jauge (23.2.17) alors

$$\Omega_{\tilde{\sigma}}(x) = T(x) \Omega_{\sigma}(x) T(x)^{-1} \quad (23.2.27)$$

Démonstration. Cette formule découle directement du fait que $\Omega(x) \in \Lambda^2(x) \otimes \text{End}(F_x)$ et que c'est la formule de transformation de la matrice Ω_σ d'un endomorphisme. En effet :

$$\Omega \tilde{\sigma}_\mu = \sum_{\mu} (\Omega_{\tilde{\sigma}})_\nu^\mu \tilde{\sigma}_\mu = \sum_{\mu} (\Omega_{\tilde{\sigma}})_\nu^\mu \sum_{\lambda} T_\mu^\lambda \sigma_\lambda$$

mais aussi :

$$\begin{aligned} \Omega \tilde{\sigma}_\mu &= \Omega \left(\sum_{\nu} T_\mu^\nu \sigma_\nu \right) = \sum_{\nu} T_\mu^\nu \Omega \sigma_\nu \quad \text{car } \Omega \text{ est un tenseur} \\ &= \sum_{\nu} T_\mu^\nu \sum_{\lambda} (\Omega_\sigma)_\nu^\lambda \sigma_\lambda \end{aligned}$$

Par identification des composantes devant σ_λ , on obtient :

$$\sum_{\mu} (\Omega_{\tilde{\sigma}})_\nu^\mu T_\mu^\lambda = \sum_{\nu} T_\mu^\nu (\Omega_\sigma)_\nu^\lambda \Leftrightarrow \Omega_{\tilde{\sigma}} T = T \Omega_\sigma \Leftrightarrow \Omega_{\tilde{\sigma}} = T \Omega_\sigma T^{-1}$$

□

Remarque 23.2.15. dans le cas d'un **fibré Hermitien de rang 1**, d'une part la matrice $\Omega_\sigma(x)$ est 1×1 , c'est à dire que c'est une 2-forme à valeur nombre (complexe). Les termes commutent et par conséquent

$$\Omega_{\tilde{\sigma}}(x) = \Omega_\sigma(x)$$

Autrement dit, la courbure est une 2-forme sur M indépendante du choix de Jauge. Ce résultat se retrouve à partir de (23.2.24) car $A \wedge A = 0$ (car A est une matrice 1×1) donc

$$\Omega_\sigma = dA \tag{23.2.28}$$

et par changement de Jauge (23.2.19), $\tilde{A} = A + id\varphi$ on obtient

$$\Omega_{\tilde{\sigma}} = d\tilde{A} = dA + idd\varphi = dA = \Omega_\sigma$$

car $dd\varphi = 0$.

23.2.5 Expression de la courbure pour la connexion de Levi-Civita

Considérons à nouveau l'exemple (23.2.7) d'un espace fibré $F \rightarrow M$ où les fibres $F_x \subset \mathcal{H}$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace hermitien \mathcal{H} fixé. La métrique sur \mathcal{H} induit une connexion $D = Pd$ sur F appelée connexion de Levi-Civita, eq.(23.2.8).

Proposition 23.2.16. *Pour la connexion de Levi-Civita $D = Pd$, la courbure est*

$$\Omega = P(dP \wedge dP)P \in C^\infty(\Lambda^2 \otimes \text{Hom}(F)) \quad (23.2.29)$$

C'est à dire que ses composantes sont

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} P_{\mu\alpha} (dP_{\alpha\beta} \wedge dP_{\beta\gamma}) P_{\gamma\nu}$$

Démonstration. On a

$$D^2s = Pd(Pds) = P(dP \wedge ds)$$

or $s = Ps$ donc

$$ds = d(Ps) = (dP)s + Pds$$

donc

$$D^2s = P(dP \wedge dP)s + (PdPP) \wedge ds$$

or $P^2 = P$ (projecteur) donc

$$\begin{aligned} dPP + PdP &= dP \Leftrightarrow PdPP + PdPP = PdPP \\ &\Leftrightarrow PdPP = 0 \end{aligned}$$

donc

$$D^2s = P(dP \wedge dP)Ps = \Omega s$$

donc

$$\Omega = P(dP \wedge dP)P = \frac{1}{2}P[dP, dP]P$$

(comme pour (23.2.26).)

□

23.2.5.1 Cas d'un fibré de rang 1

On utilise les "notations de Dirac" : si E est un espace vectoriel, $u \in E$ est noté $|u\rangle$. Un vecteur dual $\alpha \in E^*$ est noté $\langle\alpha|$. Le crochet de dualité est noté $\alpha(u) = \langle\alpha|u\rangle$. Un opérateur A de rang 1 sur E peut s'écrire : $A = |u\rangle\langle\alpha|$ avec $u \in E$, $\alpha \in E^*$. Si E est muni d'un produit scalaire aussi noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, et $u \in E$ on note $\langle u| \in E^*$ le dual métrique. Ainsi le projecteur orthogonal $P : E \rightarrow E$ sur u s'écrit :

$$P = \frac{|u\rangle\langle u|}{\langle u|u\rangle} = |u\rangle\langle u|.$$

(dans la deuxième expression, on a supposé $\|u\|^2 = \langle u|u\rangle = 1$).

Proposition 23.2.17. *Dans le cas d'un fibré complexe de rang $r = 1$, si $\sigma(x) \in F_x \subset \mathcal{H}$ est une trivialisatation locale unitaire de F , alors le projecteur orthogonal sur F_x est*

$$P_x = |\sigma\rangle\langle\sigma|,$$

la 1 forme de connection $A \in C^\infty(M; \Lambda^1)$, (23.2.13), est

$$A = \langle\sigma|d\sigma\rangle,$$

courbure $\Omega \in C^\infty(M; \Lambda^2 \otimes \text{Hom}(F))$ est

$$\Omega(x) = |\sigma\rangle\langle d\sigma| \wedge |d\sigma\rangle\langle\sigma| = \Omega_0(x) P_x$$

avec la deux forme sur M :

$$\Omega_0 = \left(\sum_{\mu, \nu} \langle\partial_\mu\sigma|\partial_\nu\sigma\rangle (dx^\mu \wedge dx^\nu) \right)$$

qui est indépendante de la trivialisatation.

Démonstration. le projecteur orthogonal $P_x : \mathcal{H} \rightarrow F_x$ s'écrit (avec la notation de Dirac) :

$$P_x = |\sigma(x)\rangle\langle\sigma(x)|$$

D'après (23.2.13), on a

$$A\sigma = D\sigma = P d\sigma = |\sigma\rangle\langle\sigma|d\sigma\rangle$$

donc $A = \langle\sigma|d\sigma\rangle$. On a $dP = |d\sigma\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle d\sigma|$ et utilisant $1 = \langle\sigma|\sigma\rangle$ donc $\langle\sigma|d\sigma\rangle + \langle d\sigma|\sigma\rangle = 0$, la formule (23.2.29) donne

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= P(dP \wedge dP)P = |\sigma\rangle\langle\sigma|(|d\sigma\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle d\sigma|) \wedge (|d\sigma\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle d\sigma|)|\sigma\rangle\langle\sigma| \\ &= |\sigma\rangle\langle\sigma|d\sigma\rangle \wedge \langle\sigma|d\sigma\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle\sigma|d\sigma\rangle \wedge \langle d\sigma|\sigma\rangle\langle\sigma| \\ &\quad + |\sigma\rangle\langle d\sigma| \wedge |d\sigma\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle d\sigma|\sigma\rangle \wedge \langle d\sigma|\sigma\rangle\langle\sigma| \\ &= |\sigma\rangle\langle d\sigma| \wedge |d\sigma\rangle\langle\sigma| \\ &= \left(\sum_{\mu, \nu} \langle\partial_\mu\sigma|\partial_\nu\sigma\rangle (dx^\mu \wedge dx^\nu) \right) P_x = \Omega_0(x) P_x \end{aligned}$$

□

@@Plus généralement, Ecrire explicitement l'expression de la courbure si le fibré F de rang r est donné dans une base fixe.

23.2.6 Transport parallèle, holonomie et courbure

23.2.6.1 Transport parallèle

Supposons $F \rightarrow M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion. Soit $\gamma(t) \in M$ une courbe paramétré C^∞ sur M , $t \in [0, 1]$. On note $V(t) = \frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$ le vecteur vitesse.

Si $v(0) \in F_{\gamma(0)}$ est un vecteur donné dans la fibre $F_{\gamma(0)}$ au dessus du point initial, on définit le vecteur $v(t) \in F_{\gamma(t)}$ dans chaque fibre par la condition de “transport parallèle” :

$$\frac{Dv(t)}{dt} := D_{V(t)}v(t) = 0$$

Cela définit de façon unique $v(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ (car par rapport à une trivialisation locale c'est une equation différentielle ordinaire du premier ordre).

Ainsi on obtient une application linéaire

$$\mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(1)} : \begin{cases} F_{\gamma(0)} & \rightarrow F_{\gamma(1)} \\ v(0) & \rightarrow v(1) \end{cases}$$

appelée “transport parallèle le long de la courbe γ ”. Elle ne dépend pas de la paramétrisation¹² de la courbe.

On a la formule de composition évidente pour tout point intermédiaire $t \in [0, 1]$,

$$\mathcal{T}_{\gamma(t) \rightarrow \gamma(1)} \circ \mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(t)} = \mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(1)}$$

Proposition 23.2.18. *Dans le cas d'un fibré Hermitien de rang r , avec une métrique compatible, alors le transport parallèle préserve la norme dans les fibres, i.e. c'est est un opérateur unitaire*

$$\mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(1)} \in U(F_{\gamma(0)}, F_{\gamma(1)})$$

(respect. $\mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(1)} \in O(F_{\gamma(0)}, F_{\gamma(1)})$ est orthogonal si le fibré est réel).

Démonstration. d'après la condition de compatibilité

$$\frac{d \|v(t)\|^2}{dt} = \frac{dh(v(t), v(t))}{dt} = h\left(\frac{Dv}{dt}(t), v(t)\right) + h\left(v(t), \frac{Dv}{dt}v(t)\right) = 0$$

donc la norme est conservée. □

12. En effet, un changement de paramétrage donnera un changement de vecteur vitesse $V' = c.V$ mais la dérivée covariante est linéaire en V donc on a $D_{V'}v = D_{cV}v = cD_Vv = 0$.

23.2.6.2 Holonomie

Considérons un cas particulier où la courbe γ est fermée, c'est à dire que $\gamma(1) = \gamma(0)$. Alors $F_{\gamma(0)} = F_{\gamma(1)}$ et le transport parallèle donne un endomorphisme :

$$\mathcal{T}_{\gamma(0)} := \mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(1)} \in \text{End}(F_{\gamma(0)})$$

appelé **holonomie de la courbe γ mesurée au point $\gamma(0)$** . On a vu que $\mathcal{T}_{\gamma(0)}$ est indépendant de la paramétrisation. Mais $\mathcal{T}_{\gamma(0)}$ dépend du point de départ $\gamma(0)$ sur la courbe fermée. En fait pas tant que cela comme le montre l'exercice suivant.

On peut convenir de définir $\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ par "périodicité" c'est à dire $\gamma(t+n) := \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$. On définit alors $\mathcal{T}_{\gamma(t)} := \mathcal{T}_{\gamma(t) \rightarrow \gamma(t+1)} \in \text{End}(F_{\gamma(t)})$ comme étant l'holonomie mesurée au point $\gamma(t)$.

Exercice 23.2.19. Si $\gamma(t)$ est un autre point sur la courbe fermée γ , montrer que :

$$\mathcal{T}_{\gamma(t)} = \mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(t)} \circ \mathcal{T}_{\gamma(0)} \circ (\mathcal{T}_{\gamma(0) \rightarrow \gamma(t)})^{-1} \in \text{End}(F_{\gamma(t)})$$

autrement dit les holonomies mesurées en différents points sont des applications conjuguées. (Elles ont donc le même spectre).

Conséquence de Proposition 23.2.18 :

Proposition 23.2.20. Dans le cas d'un fibré Hermitien de rang r avec une métrique compatible, l'holonomie est un opérateur unitaire

$$\mathcal{T}_{\gamma(0)} \in U(F_{\gamma(0)})$$

(respect. $\mathcal{T}_{\gamma(0)} \in O(F_{\gamma(0)})$ est orthogonal si le fibré est réel. Si de plus la variété M est simplement connexe alors $\mathcal{T}_{\gamma(0)} \in SO(F_{\gamma(0)})$).

Remarque 23.2.21.

- dans le cas d'un **fibré de rang 1**, l'holonomie $\mathcal{T}_{\gamma(0)} \in \text{End}(F_{\gamma(0)})$ est un nombre (réel ou complexe) non nul. Les transformations commutent et donc l'holonomie

$$\mathcal{T}_{\gamma(t)} = \mathcal{T}_{\gamma(0)}$$

est indépendante du point de mesure et on peut donc la noter \mathcal{T}_γ .

- Si de plus, c'est un **fibré hermitien de rang 1**, alors $\mathcal{T}_\gamma \in U(1)$ est un nombre complexe de module 1 qui s'écrit :

$$\mathcal{T}_\gamma = e^{ih(\gamma)}$$

où $h(\gamma) \in \mathbb{R} \text{ mod } 2\pi$ est une "phase" appelée "**phase de Berry**" en physique.

- Dans le cas d'un fibré réel de rang 1, avec une métrique compatible, l'holonomie est $\mathcal{T}_\gamma \in O(1) = \{-1, 1\}$. C'est un indice topologique. Cette situation apparait pour le fibré de Moebius par exemple (pour lequel l'holonomie est $\mathcal{T}_\gamma = -1$).
- Dans le cas d'un fibré réel de rang 2 avec une métrique compatible l'holonomie est $\mathcal{T}_\gamma \in O(2) = \{-1, 1\} \times SO(2)$, c'est encore un groupe commutatif donc l'holonomie ne dépend pas du point de mesure. A nouveau la partie dans $SO(2)$ est caractérisée par un angle $h(\gamma) \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$. Dans le cas du pendule de Foucault, l'**angle de Foucault** est

$$\varphi_{\text{Foucault}} = h(\gamma) - 2\pi$$

voir [12].

Supposons que F est un **fibré hermitien de rang 1** (ou **fibré réel euclidien de rang 2 orienté**).

Proposition 23.2.22. *Dans le cas d'un fibré hermitien de rang 1 $F \rightarrow M$, si $\gamma \subset U$ est un chemin fermé contenu dans un domaine $U \subset M$ où on a une trivialisatoin σ de $F \rightarrow U$, et si γ est le bord d'une surface K :*

$$\gamma = \partial K, \quad K \subset U$$

Alors l'holonomie $h(\gamma)$ de la connexion au dessus du chemin γ est donnée par

$$h(\gamma) = \exp\left(i \oint_{\gamma=\partial K} A\right) = \exp\left(i \int_K \Omega\right)$$

Voir figure.

Remark 23.2.23. Dans le cas d'un fibré de rang 1, et de la connexion de Levi-Civita avec une Section σ , alors

$$A = i\mathcal{A} = -i\langle \sigma | d\sigma \rangle : 1\text{-forme réelle.}$$

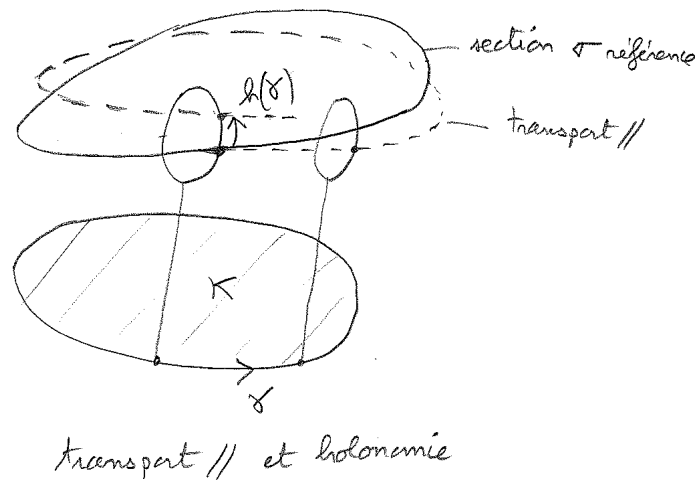
donc

$$h(\gamma) = i \oint \langle \sigma | \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \rangle dx^i$$

Démonstration. cela découle de la formule de Stokes et de (23.2.28).

Détailler @@ (cf chap 1)

□



Remarques :

- Cette formule est utile dans le cas de l’effet Aharonov -Bohm, où $\Omega \equiv B$ est le champ magnétique, et donc l’holonomie est reliée au flux du champ B . (Voir sujet proposé).
- Il n’y a pas de formule analogue pour un fibré général de rang $r \geq 2$ (sauf si fibré Abélien, cf Fedosov p.23 [14]). Le problème vient du fait que les opérateurs de courbures $\Omega(x)$ ne commutent pas en différents points x . Cependant la formule (23.2.25) donne un résultat “infinitésimal” dans le cas général (interprétation : U, V génèrent un petit chemin γ parallélogramme sur M). Voir figure 23.2.1.

23.2.7 Propriétés de la courbure

Théorème 23.2.24. *Si la courbure est nulle : $\Omega = 0$, on dit que F est un **fibré plat**, alors dans un voisinage de chaque point, il existe une base de sections parallèles :*

$$D\sigma_\mu = 0$$

Cela signifie que au-dessus d’un tel voisinage, le fibré F est isomorphe à un fibré trivial $F = U \times \mathbb{R}^r$ avec la connection du fibré trivial qui est simplement la dérivée extérieure : $Ds = ds$.

Démonstration. @@ voir [10] p.297, ou [29] p.463. Si $\Omega = 0$, alors d’après (23.2.25), dans un système de coordonnées locales on a

$$0 = \Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \left[D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \right]$$

Pour tout μ , il est alors possible de résoudre localement les équations $D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \sigma_\mu(x) = 0$ (th. de Frobenius). Si $(\sigma_\mu(0))_\mu$ est une base de $F_{x=0}$ alors dans un voisinage de $x = 0$, $(\sigma_\mu(x))_\mu$ est une base de F_x . \square

Théorème 23.2.25. Identité de Bianchi :

$$D\Omega = 0$$

Démonstration. Pour tout $s \in C^\infty(\Lambda^p \otimes F)$ on a

$$D^3 s = D^2(Ds) = \Omega \wedge Ds$$

et aussi

$$D^3 s = D(D^2 s) = D(\Omega s) = D\Omega \wedge s + \Omega \wedge Ds$$

donc $D\Omega \wedge s$ pour tout s , donc

$$D\Omega = 0$$

\square

23.2.8 L'électromagnétisme est une théorie de Jauge abélienne

(ref : Itzikson-Zuber [17] p.31, Voir [25] ou [9].)

Rappelons que pour un fibré complexe de rang 1, la courbure $\Omega \in C^\infty(\Lambda^2)$ est une deux forme sur M à valeur dans $i\mathbb{R}$.

Modèle géométrique On considère une variété Lorentzienne (M, g) de dimension 4. On considère un espace fibré hermitien de rang 1, $F \rightarrow M$; muni d'une connexion D compatible avec une métrique notée $h_x(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{F_x}$. Une section $s \in C^\infty(F)$ de ce fibré est appelé un **champ complexe (scalaire)**. Le **Lagrangien** de ce champ est défini au point $x \in M$ par

$$\mathcal{L}_s(x) := \|Ds(x)\|_{\Lambda_x^1 \otimes F_x}^2 - m^2 \|s(x)\|_{F_x}^2 - \|\Omega\|_{\Lambda_x^2}^2$$

où $m > 0$ est la "masse" du champ.

Signification physique : La variété Lorentzienne (M, g) modélise l'espace-temps. Il va apparaitre ci-dessous que la courbure Ω de la connexion décrit un **champ électromagnétique** sur l'espace temps et que le champ s décrit une **particule chargée de spin 0 de masse m** , par exemple un pion π^+ ou π^- soumis à ce champ électromagnétique. Pour montrer cela on va écrire le Lagrangien dans un système de coordonnées et retrouver les équations connues en physique.

23.2.8.1 Expression dans un système de coordonnées :

On suppose un système de coordonnées locales x^i , $i = 0, 1, 2, 3$ sur M , et on note $g = \sum g_{i,j} dx^i \otimes dx^j$ la métrique de Lorentz de signature $(-1, +1, +1, +1)$.

Supposons que σ soit une trivialisatation unitaire du fibré F (cad $|\sigma(x)| = 1, \forall x \in M$) alors on écrit

$$s(x) = \psi(x) \sigma(x)$$

où $\psi \in C^\infty(M)$ est une fonction complexe sur l'espace-temps (champs scalaire complexe). On a vu en (23.2.16) que

$$Ds = \sum_j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \mathcal{A}_j \psi \right) dx^j \otimes \sigma$$

avec $A = i \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_j dx^j$ la 1-forme de connexion et avec $\mathcal{A}_j(x) \in \mathbb{R}$ composante réelle. Alors

$$\|Ds\|_{\Lambda^1 \otimes F}^2 = \langle Ds, Ds \rangle_{\Lambda^1 \otimes F} = \sum_{i,j} (g^{-1})_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + i \mathcal{A}_i \psi \right)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + i \mathcal{A}_j \psi \right)$$

Notons (comme dans les livres de physique)

$$(g)^{ij} := (g^{-1})_{i,j}, \quad \mathcal{A}^i := g^{ij} \mathcal{A}_j$$

$$\partial_i \psi := \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

$$\partial^i \psi := g^{ij} \partial_j \psi$$

Par ailleurs posons

$$\mathcal{F} := i\Omega \in C^\infty(M; \Lambda^2)$$

qui est une 2 forme à valeurs réelles. On écrit ses composantes

$$\mathcal{F} = \sum_{i,j} \mathcal{F}_{i,j} dx^i \otimes dx^j.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\Omega\|_{\Lambda_x}^2 &= \langle \Omega, \Omega \rangle_{\Lambda_x^2} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle_{\Lambda_x^2} = \sum_{i,j,i',j'} \mathcal{F}_{i,j} \mathcal{F}_{i',j'} \langle dx^i \otimes dx^j, dx^{i'} \otimes dx^{j'} \rangle \\ &= \sum_{i,j,i',j'} \mathcal{F}_{i,j} \mathcal{F}_{i',j'} g^{i,i'} g^{j,j'} = \sum_{i,j} \mathcal{F}_{i,j} \mathcal{F}^{i,j} \end{aligned}$$

et le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_s(x) = \sum_i \overline{(\partial^i \psi + i \mathcal{A}^i \psi)} (\partial_i \psi + i \mathcal{A}_i \psi) - m^2 |\psi|^2 - \sum_{i,j} \mathcal{F}_{i,j} \mathcal{F}^{i,j}$$

Voir Itzikson-Zuber [17] p.31.

23.2.8.2 Equations variationnelles

Proposition 23.2.26. *Soit l'action du champ :*

$$I(s, D) := \int_M \mathcal{L}_s(x) \mu_{\text{vol}}(x)$$

que l'on considère comme fonctionnelle dépendant de la section $s \in C^\infty(F)$ et de la connexion D .

1. L'action $I(s, D)$ est **extrémale** par rapport aux variations du champ s si et seulement si s vérifie l'équation de "**Klein-Gordon**"

$$D^* D s - m^2 s = 0 \tag{23.2.30}$$

où D^* est le dual de D

$$D^* : C^\infty(\Lambda^p \otimes F) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p-1} \otimes F)$$

2. L'action $I(s, D)$ est **extrémale** par rapport aux variations de la connexion D si et seulement l'équation de "**Maxwell**" est vérifiée :

$$d^* \Omega = \langle D s, s \rangle_{F_x} \tag{23.2.31}$$

Remarque 23.2.27.

1. On définit le Laplacien sur F par $\Delta_F := D^* D$, (cf [10] p.335). C'est un opérateur autoadjoint. Alors (23.2.30) s'écrit :

$$\Delta_F s - m^2 s = 0$$

2. Dans l'équation (23.2.31), la connexion intervient dans la courbure Ω et dans le membre de droite. En posant $\mathcal{F} := i\Omega \in C^\infty(\Lambda^2)$ deux forme à valeurs réelles appelée "**tenseur électromagnétique**" et $J := i\langle D s, s \rangle_F$ 1-forme à valeurs réelles appelée "**densité de courant**", alors l'équation de Maxwell (23.2.31) s'écrit :

$$J = d^* \mathcal{F}$$

On retrouve l'équation de Maxwell sous la forme (21.0.6) déjà étudiée. On y avait retrouvé la formulation de Maxwell de 1865, dans le cas de l'espace-temps de Minkowski.

3. Dans un système de coordonnées l'équation de Klein-Gordon s'écrit :

$$\overline{(\partial^i + iA^i)} (\partial_i + iA_i) \psi + m^2 \psi = 0$$

et pour l'équation de Maxwell on a vu que $Ds = \sum_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + A_i \psi \right) dx^i \otimes \sigma$ donc

$$\begin{aligned} J &= i \langle Ds, s \rangle = i \sum_i \overline{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + i A_i \psi \right)} \psi dx^i \\ &= \sum_i \left(-i \partial_i \bar{\psi} \cdot \psi + A_i |\psi|^2 \right) dx^i \end{aligned}$$

(c'est l'écriture habituelle dans les livres de physique, cf [17, (1-160) p.31].)

Démonstration. Soit $\beta \in C_c^\infty(F)$ une section à support compact. On note $s_\tau = s + \tau\beta$ une variation de la section $s \in C^\infty(F)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$. Alors $I(s)$ est extrémale si la variation suivante est nulle pour tout β :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} I(s + \tau\beta)_{/\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int \left(\langle D(s + \tau\beta), D(s + \tau\beta) \rangle - m^2 \langle (s + \tau\beta), (s + \tau\beta) \rangle \right) \mu_{vol} \\ &= 2 \int \left(\langle D\beta, Ds \rangle - m^2 \langle \beta, s \rangle \right) \mu_{vol} \\ &= 2 \int \langle \beta, D^* Ds - m^2 s \rangle \mu_{vol} \end{aligned}$$

vrai pour tout β , d'où $D^* Ds - m^2 s = 0$.

On verra en Prop 23.2.28 que si D_λ est une famille de connexions dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la variation de la connexion s'écrit $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} D_\lambda \right)_{\lambda=0} = C \in C^\infty(\Lambda^1 \otimes \text{End}(F))$. Cela implique¹³ $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Omega_\lambda \right)_{\lambda=0} = dC$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} I(D_\lambda)_{/\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \left(\langle D_\lambda s, D_\lambda s \rangle_{\Lambda_x^1 \otimes F_x} - \langle \Omega_\lambda, \Omega_\lambda \rangle_{\Lambda_x^2} \right) \mu_{vol} \\ &= 2 \int \left(\langle C s, Ds \rangle_{\Lambda_x^1 \otimes F_x} - \langle dC, \Omega \rangle_{\Lambda_x^2} \right) \mu_{vol} \\ &= 2 \int \left(\langle C, \langle s, Ds \rangle_{F_x} \rangle_{\Lambda_x^1} - \langle C, d^* \Omega \rangle_{\Lambda_x^1} \right) \mu_{vol} \end{aligned}$$

pour tout $C \in C^\infty(\Lambda^1 \otimes \text{End}(F))$ donc $\langle s, Ds \rangle_{F_x} - d^* \Omega = 0$. \square

23.2.9 Théories de Jauge non abéliennes (Yang-Mills)

Il s'agit d'une généralisation immédiate de la formulation précédente au cas d'un fibré de rang $r \geq 1$ quelconque.

13. En effet d'après (23.2.28), $\Omega = dA$, or $C = \frac{\partial A}{\partial \lambda}$ donc $\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = dC$.

Modèle géométrique On considère une variété Lorentzienne (M, g) de dimension 4 qui modélise l'espace-temps. On considère un espace fibré hermitien de rang $r \geq 1$, $F \rightarrow M$ muni d'une connexion D compatible avec une métrique notée $h_x(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{F_x}$. Une section $s \in C^\infty(F)$ de ce fibré est appelé un **champ complexe**. Le **Lagrangien** de ce champ est défini au point $x \in M$ par

$$\mathcal{L}_s(x) := \|Ds(x)\|_{\Lambda_x^1 \otimes F_x}^2 - m^2 \|s(x)\|_{F_x}^2 - \|\Omega\|_{\Lambda_x^2 \otimes \text{Herm}(F_x)}^2$$

où $m \in \mathbb{R}$ est la "masse" du champ.

Noter que la nouveauté par rapport au cas précédent de l'électromagnétisme (fibré de rang $r = 1$) est que dans une trivialisatation locale, $s \in C^\infty(F)$ a r composantes complexes appelées en physique "**champs scalaires**". La courbure $\Omega \in C^\infty(\Lambda^2 \otimes \text{Herm}(F_x))$ est une deux forme à valeur dans les endomorphismes Hermitiens de F_x . Or $\dim(\text{Herm}(F_x)) = r^2$. Donc dans une trivialisatation locale, Ω est représenté par r^2 deux formes (champs de tenseurs) appelés en physique les "**champs de bosons intermédiaires**". Noter que le "groupe de structure" est $U(r) = SU(r) \times U(1)$ et de façon équivalente le générateur de $U(1)$ est $\text{Id} \in \text{Herm}(F_x)$ et les générateurs de $SU(r)$ sont les endomorphismes $\text{Herm}(F_x)$ de trace nulle. Ces derniers forment un espace de dimension $r^2 - 1$. Le produit scalaire dans $\text{Herm}(F_x)$ utilisé dans $\|\Omega\|_{\Lambda_x^2 \otimes \text{Herm}(F_x)}^2$ est simplement le **produit scalaire de Hilbert-Schmidt** : si F est un espace vectoriel hermitien, et $A, B \in \text{End}(F)$ alors

$$\langle A, B \rangle_{H.S.} := \text{Tr}(A^*B)$$

Signification physique :

- La théorie "**interaction électro-faible**" est une théorie de Yang-Mills : on considère un fibré Hermitien vectoriel complexe de rang $r = 2$. La courbure Ω a $r^2 = 4$ composantes (des champs de tenseurs), appelées les **champs de photon** γ , **boson** Z_0, W_+, W_- . en particulier le photon est générateur du sous groupe $U(1)$ et les autres de $SU(2)$. La section s décrit une particule de masse m soumises à ces champs de "forces électro-faibles". La section s a $r = 2$ composantes. Dans ce cas le Lagrangien est plus compliqué que ci-dessus avec la présence du champs de Higgs, responsable d'une "brisure de symétrie".
- La théorie "**Quantum Chromodynamique**" (Q.C.D.) ou "**théorie de la force nucléaire forte**" ou "**interaction forte**" est une théorie de Yang-Mills : on considère un fibré Hermitien vectoriel complexe de rang $r = 3$. Mais avec le groupe de structure $SU(3)$ (et non pas $U(3)$). La courbure Ω a $r^2 - 1 = 8$ composantes (des champs de tenseurs), appelées les **champs de gluons** $(g_i)_{i=1, \dots, 8}$. La section s décrit une particule de masse m soumises à ces champs de "forces nucléaires fortes". La section s a $r = 3$ composantes, appelées "**couleurs**" R, V, B .

23.2.10 Variation et changement de connexion

ref : Fedosov : p.22.

Etant donné une espace fibré vectoriel $F \rightarrow M$, celui ci admet plusieurs connexions possibles. Une connexion n'est pas un tenseur (car $D(fs) \neq fD(s)$) mais la proposition suivante montre que la différence entre deux connexions est un tenseur.

Les résultats de cette sections seront utiles pour établir des formules variationnelles en théorie de Jauge (où les champs de "Bosons intermédiaires" sont modélisés par des connexions sur un fibré) ou en relativité générale.

Proposition 23.2.28. (Taylor [29] ex.1 et 2 p.465, et ex.5 p.468) Si D, \tilde{D} sont deux connexions sur un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ alors elles sont reliées par

$$\tilde{D}_U s = D_U s + C(U, s)$$

pour tout champ de vecteur $U \in C^\infty(TM)$ et section $s \in C^\infty(E)$, où C est un champ de tenseur, i.e. une section :

$$C \in C^\infty(T^* \otimes E^* \otimes E)$$

(cela signifie que $C(U, s) \in E$ et $C(fU, s) = C(U, fs) = fC(U, s)$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$). Inversement si C est une telle section, et D une connexion alors $\tilde{D} = D + C$ est aussi une connexion.

Notons $C_U(s) := C(U, s)$. On déduit que les courbures respectives sont reliées par

$$\tilde{\Omega}(U, V)s = \Omega(U, V)s + [C_U, D_V]s - [C_V, D_U]s \tag{23.2.32}$$

$$- C_{[U, V]}s + [C_U, C_V]s \tag{23.2.33}$$

appelée **identité de Palatiny**,

Démonstration. Posons $C(U, s) = \tilde{D}_U s - D_U s$. D'après la définition 20.2.1 page 213, pour vérifier que c'est un tenseur il faut vérifier la propriété de linéarité par rapport aux arguments en tant que fonctions : pour tout $f \in C^\infty(M)$, il faut que $C(fU, s) = fC(U, s)$ et $C(U, fs) = fC(U, s)$. Remarquer que pour la dérivée covariante, on a $D_{fU}s = fD_U s$ mais par contre d'après la loi de Leibnitz (23.2.6) : $D_U(fs) = U(f)s + fD_U(s)$ ce qui signifie que D n'est pas un tenseur, mais plutôt un opérateur différentiel d'ordre 1. D'après la loi de Leibnitz justement, $C(U, fs) = f\tilde{D}_U(s) - fD_U(s) = fC(U, s)$ et $C(fU, s) = fC(U, s)$.

On utilise ensuite simplement Eq.(23.2.25) : $\tilde{\Omega}(U, V)s = [\tilde{D}_U, \tilde{D}_V]s - \tilde{D}_{[U, V]}s$. On écrit

$$\tilde{D}_U \tilde{D}_V s = \tilde{D}_U (D_V s + C(V, s)) = D_U (D_V s) + C(U, D_V s) + D_U (C(V, s)) + C(U, C(V, s))$$

de même

$$\tilde{D}_V \tilde{D}_U s = D_V (D_U s) + C(V, D_U s) + D_V (C(U, s)) + C(V, C(U, s))$$

donc

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Omega}(U, V) s &= D_U(D_V s) + C(U, D_V s) + D_U(C(V, s)) + C(U, C(V, s)) \\
 &\quad - D_V(D_U s) - C(V, D_U s) - D_V(C(U, s)) - C(V, C(U, s)) \\
 &\quad - D_{[U, V]} s - C([U, V], s) \\
 &= \Omega(U, V) s + C(U, D_V s) - D_V(C(U, s)) - (C(V, D_U s) - D_U(C(V, s))) \\
 &\quad - C([U, V], s) + C(U, C(V, s)) - C(V, C(U, s))
 \end{aligned}$$

Ce qui donne (23.2.32). □

23.2.11 Dérivée covariante de tenseurs

Ref : [29, p.464], [28, p.131], [19] p.53.

La définition première de dérivée covariante (23.2.3) s'applique à des sections du fibré $F \rightarrow M$. On peut alors facilement étendre la notion de dérivée covariante à des produits tensoriels de fibrés, en exigeant la loi ordinaire de la dérivée d'un produit (leibniz) ainsi que d'autres propriétés naturelles.

— Si l'on considère les fonctions $f \in C^\infty(M)$ comme des sections d'un fibré trivial, on convient que la dérivée covariante est égale à la dérivée extérieure :

$$Df := df \tag{23.2.34}$$

(et donc $D_U f = ((df) U) = U(f)$).

23.2.11.1 Produit tensoriel de Fibrés. Dérivée covariante D sur $F_1 \otimes F_2$

Si $F_1 \rightarrow M, F_2 \rightarrow M$ sont deux fibrés avec des dérivées covariantes respectives D_1, D_2 , alors sur le **fibré produit tensoriel** $F_1 \otimes F_2$ (où par définition une fibre est $(F_1 \otimes F_2) := (F_1)_x \otimes (F_2)_x$) on considère la dérivée covariante :

$$D(s_1 \otimes s_2) := (D_1 s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (D_2 s_2)$$

étendue par linéarité.

23.2.11.2 Fibré dual, trace partielle. Dérivée covariante D sur F^*

Si $F \rightarrow M$ est un fibré, on définit le **fibré dual** $F^* \rightarrow M$ par le fait que chaque fibre est l'espace dual : $F_x^* = (F_x)^*$ des fibres de F .

Si on considère des produits tensoriels de fibrés comme $F \otimes F \otimes F^*$ il y a la notion de **contraction d'indices**, aussi appelée **trace partielle** qui est une opération dans chaque fibre au dessus de $x \in M$ fixé : si $(e_j)_j$ est une base de F_x , $(f^k)_k$ est la base duale dans F_x^* (i.e. $f^k(e_j) = \delta_{j=k}$), alors $(e_i \otimes e_j \otimes f^k)_{i,j,k}$ est une base $(F \otimes F \otimes F^*)_x$, et un tenseur

$t \in F \otimes F \otimes F^*$ se décompose comme $t = \sum_j t_k^{i,j} (e_i \otimes e_j \otimes f^k)$. On définit par exemple la contraction entre le premier indice et le troisième indice par :

$$\text{Tr}_{1,3}(t) := \sum_j \sum_i t_i^{i,j} e_j \in F_x$$

Bien que l'on ait utilisé une base, cette définition est intrinsèque, i.e. ne dépend pas de la base choisie. On a par conséquent une opération de contraction d'indices sur les sections (toujours entre un fibré et son dual). Par exemple :

$$\text{Tr}_{1,3} : C^\infty(F \otimes F \otimes F^*) \rightarrow C^\infty(F)$$

etc

On exige que la dérivée covariante commute avec l'opération de contraction d'indice :

$$\text{Tr}_{1,3}(D(t)) := D(\text{Tr}_{1,3}(t)) \tag{23.2.35}$$

Alors si D est une dérivée covariante sur $F \rightarrow M$, cela définit uniquement une **dérivée covariante D sur le fibré dual F^*** . En effet si $s \in C^\infty(F)$, et $\alpha \in C^\infty(F^*)$ alors $\text{Tr}_{1,2}(\alpha \otimes s) = \alpha(s) \in C^\infty(M)$ est une fonction donc avec les conventions précédentes, on écrit sur le fibré $F^* \otimes F$:

$$D(\alpha \otimes s) = (D\alpha) \otimes s + \alpha \otimes Ds$$

on fait la contraction d'indices :

$$\text{Tr}_{1,2}(D(\alpha \otimes s)) = \text{Tr}_{1,2}((D\alpha) \otimes s) + \text{Tr}_{1,2}(\alpha \otimes Ds)$$

et (23.2.34) et (23.2.35) donnent :

$$d(\alpha(s)) = (D\alpha)(s) + \alpha(Ds)$$

(on observe que la dualité est respectée) et on obtient l'expression suivante qui détermine $D\alpha$:

$$(D\alpha)(s) = d(\alpha(s)) - \alpha(Ds)$$

23.2.11.3 Dérivée covariante D sur $\text{Hom}(F_1, F_2) = F_1^* \otimes F_2$

Comme autre exemple, considérons $A \in C^\infty(\text{Hom}(F_1, F_2))$ où F_1, F_2 sont deux fibrés avec connexions respectives D_1, D_2 . On veut montrer que la dérivée covariante de A est déterminée à partir de D_1 et D_2 . Pour $s_1 \in C^\infty(F_1)$, on a $A(s_1) \in C^\infty(F_2)$, et les définitions

qui précèdent nous permettent d'écrire¹⁴ :

$$D(A(s_1)) = (DA)(s_1) + A(Ds_1)$$

donc DA est déterminée par :

$$(DA)(s_1) = D(A(s_1)) - A(Ds_1).$$

23.2.11.4 Dérivé covarinate d'une métrique

Autre exemple : si h est une métrique hermitienne du fibré $F \rightarrow M$, i.e. une métrique $h(s_1, s_2)$ dans chaque fibre F_x , alors $h \in C^\infty(F^* \otimes F^*)$. Et on a

$$d(h(s_1, s_2)) = (Dh)(s_1, s_2) + h(Ds_1, s_2) + h(s_1, Ds_2)$$

En particulier, on déduit que la condition que la métrique h soit "compatible" avec la connexion, d'après la définition (23.2.5), s'écrit tout simplement que sa dérivée covariante est nulle :

$$Dh = 0$$

23.2.11.5 Formule générale

Plus généralement et de façon similaire, la dérivée covariante est bien définie sur un fibré de la forme $F^* \otimes \dots \otimes F^* \otimes F \otimes \dots \otimes F$ à partir de la dérivée covariante D sur F . On a la formule pour $t \in C^\infty((F^*)^{\otimes a} \otimes (F)^{\otimes b})$:

$$\begin{aligned} d(t(s_1, \dots, s_a, \alpha_1, \dots, \alpha_b)) &= (Dt)(s_1, \dots, s_a, \alpha_1, \dots, \alpha_b) + t(Ds_1, s_2, \dots) + \dots + t(s_1, \dots, D\alpha_1, \alpha_2, \dots) \\ \Leftrightarrow (Dt)(s_1, \dots, s_a, \alpha_1, \dots, \alpha_b) &= d(t(\dots)) - t(Ds_1, s_2, \dots) - \dots - t(s_1, \dots, D\alpha_1, \alpha_2, \dots) \end{aligned} \tag{23.2.36}$$

14. Comme on a l'équivalence $Hom(F_1, F_2) = F_1^* \otimes F_2$, une autre façon équivalente (plus compliquée) est d'écrire pour $\alpha_2 \in C^\infty(F_2)$,

$$d(A(s_1, \alpha_2)) = (DA)(s_1, \alpha_2) + A(Ds_1, \alpha_2) + A(s_1, D\alpha_2)$$

que l'on peut écrire :

$$d(\alpha_2(A(s_1))) = \alpha_2((DA)s_1) + \alpha_2(A(Ds_1)) + (D\alpha_2)(A(s_1))$$

et par ailleurs $d(\alpha_2(A(s_1))) = (D\alpha_2)(A(s_1)) + \alpha_2(D(A(s_1)))$. On déduit : $\alpha_2(D(A(s_1))) = \alpha_2((DA)s_1) + \alpha_2(A(Ds_1))$ vrai $\forall \alpha_2$, et l'on trouve le même résultat : $D(A(s_1)) = (DA)(s_1) + A(Ds_1)$.

23.3 Connexion de Riemann sur une variété Riemannienne

Dans la section précédente, on a étudié un espace fibré $F \rightarrow M$ munit d'une connexion hermitienne. Dans cette section on va considérer **un cas particulier d'un tel fibré, qui est très important. Il s'agit du fibré tangent** à la variété M de base :

$$F = TM$$

C'est un fibré réel de rang $n = \dim M$. On supposera de plus que M est une variété Riemannienne, c'est à dire qu'il y a un tenseur métrique g comme défini page 164. Comme les fibres sont justement les espaces tangents $F_x = T_x M$, g est une métrique sur le fibré au sens considéré dans Eq.(23.2.1).

23.3.1 Connexion de Riemann

Ce qui est particulier dans le cas d'une connexion sur le fibré tangent (contrairement à une connexion générale Eq.(23.2.3)), est que dans l'écriture $D_U V$, les éléments U, V appartiennent tous deux au même espace qui est l'espace tangent.

Cette remarque est à l'origine du résultat fondamental suivant :

Théorème 23.3.1. *Il existe une unique connexion sur le fibré tangent TM , appelée connexion de Riemann notée :*

$$D : C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1 \otimes TM) \quad (23.3.1)$$

qui **préserve la métrique** (comme on l'a écrit dans Eq.(23.2.5)) : si $U, V, W \in C^\infty(TM)$

$$U(g(V, W)) = g(D_U V, W) + g(V, D_U W) \quad (23.3.2)$$

et qui vérifie de plus :

$$D_U V - D_V U = [U, V], \quad \forall U, V \in C^\infty(TM) \quad (23.3.3)$$

appelée condition de "**torsion nulle**". Cette connexion est alors déterminée par l'expression

$$2g(D_U V, W) = U g(V, W) + V g(U, W) - W g(U, V) + g([U, V], W) - g([U, W], V) - g([V, W], U) \quad (23.3.4)$$

(En effet, cela détermine bien la connexion D car g est non dégénérée et utilisant la notation (??), on a $D_U V = \tilde{g}^{-1}(g(D_U V, \cdot))$)

Démonstration. Dans l'équation (23.3.2) on permute U, V, W et on utilise la symétrie et linéarité de g afin d'exprimer :

$$\begin{aligned} Ug(V, W) + Vg(U, W) - Wg(U, V) &= g(D_U V, W) + g(V, D_U W) + g(D_V U, W) \\ &\quad + g(U, D_V W) - g(D_W U, V) - g(U, D_W V) \\ &\quad + g(D_U V, W) - g(D_U V, W) \\ &= 2g(D_U V, W) + g(D_V U - D_U V, W) \\ &\quad + g(D_V W - D_W V, U) + g(D_U W - D_W U, V) \end{aligned}$$

Alors eq.(23.3.3) implique (23.3.4). Cela montre l'unicité de la connexion.

Pour montrer l'existence, inversement, on suppose que la connexion D est déterminée par (23.3.4), et on déduit que :

$$2g(D_U V - D_V U, W) = \dots = 2g([U, V], W)$$

vraie pour tout W , ce qui implique (23.3.3). De plus, on a

$$2g(D_U V, W) + 2g(V, D_U W) = 2g(D_U V, W) + 2g(D_U W, V) = \dots = 2Ug(V, W)$$

Ce qui montre (23.3.2) et donc (??). □

23.3.1.1 Exemple : Sous variété d'un espace euclidien

Théorème 23.3.2. *Si on considère une sous variété lisse de l'espace euclidien*

$$M \subset \mathbb{R}^n$$

alors les espace tangents $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ ont admettent la connexion de Levi-Civita (23.2.8) $D = Pd$. Par ailleurs M a une métrique g induite par la métrique Euclidienne de \mathbb{R}^n qui définit une connexion de Riemann sur TM . Ces deux connexions sont identiques.

Démonstration. On utilise l'unicité de la connexion de Riemann. On a déjà vérifié (23.2.5) page 268. Il reste à vérifier (23.3.3) :

$$\begin{aligned} D_U V - D_V U &= Pd_U V - Pd_V U \\ &= P(UV - VU) = UV - VU = [U, V] \end{aligned}$$

On a utilisé que si $f \in C^\infty(M)$, $d_U(Vf) = U(V(f))$ et $PU = U$, $PV = V$. □

En particulier pour la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, la connexion (??) sur TS^2 est une connexion de Riemman. On a déjà étudié quelques aspects de la connexion de Riemmann dans le cas d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ au chapitre ??.

23.3.1.2 Expression par rapport à une trivialisaton

Supposons donné un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) . Cela donne donc une base de $T_x M$ notée $\frac{\partial}{\partial x^i}$ et donc une trivialisaton du fibré tangent TM avec :

$$\sigma_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1 \dots n$$

Ce qu'il y a de particulier avec le fibré tangent, très visible ici, est que l'espace de la fibre $T_x M$ n'est pas indépendant de l'espace de base M .

En reprenant les notations (23.2.13) :

$$D \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

où A_i^j est une 1-forme qui s'écrit donc :

$$A_i^j = \sum_{k=1}^n A_{i,k}^j dx^k$$

Les composantes $A_{i,k}^j$ qui sont des fonctions numériques sur M s'appellent **symboles de Christoffel**.

On a ainsi :

$$D \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j A_{i,k}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{23.3.5}$$

Remarque : une notation parfois utilisée pour la dérivée covariante est

$$\alpha_{;j} := D \frac{\partial}{\partial x^j} \alpha$$

Exercice : (cf [28] p.49).

Utilisant (23.3.4), montrer que dans un système de coordonnées, les symboles de Christoffels sont donnés par :

$$\sum_l g_{kl} A_{i,j}^l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \sum_l g_{li} A_{jk}^l + g_{lk} A_{ji}^l$$

et la symétrie des indices :

$$A_{ij}^l = A_{ji}^l$$

Démonstration. Appliquer (23.3.4) pour $U = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $V = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $W = \frac{\partial}{\partial x^k}$ et utiliser $[U, V] = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} = 0$ etc pour obtenir la première identité. La compatibilité avec la métrique (23.3.2) donne la deuxième identité. Finalement, la condition de torsion nulle (23.3.3) donne $D_U V = D_V U$ soit la symétrie $A_{ij}^l = A_{ji}^l$. \square

Définition 23.3.3. Soit un chemin paramétré $\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(t) \in M$ et $V_t := \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$ le vecteur vitesse au point $\gamma(t)$ (voir page 147). La courbe γ est une **géodésique** si

$$D_{V_t} V_t = 0, \quad \forall t \tag{23.3.6}$$

On a déjà vu la définition d'une géodésique page 269.

Exercice : Dans un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) , si $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, montrer que eq.(23.3.6) s'écrit :

$$\forall i, \quad \ddot{x}^i + \sum_{j,k} \dot{x}^k \dot{x}^j A_{kj}^i = 0 \tag{23.3.7}$$

(Rem : cela ressemble aux équations de Newton : accélération = forces).

Démonstration. Si $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ alors

$$V_t = \sum_i \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Donc utilisant la formule de Leibnitz (23.2.4)

$$D_{V_t} V_t = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = D_{V_t} \left(\sum_i \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_i (d\dot{x}^i(V^t)) \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^i D_{V_t} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

or

$$d\dot{x}^i(V^t) = V_t(\dot{x}^i) = \frac{d\dot{x}^i(\gamma(t))}{dt} = \ddot{x}^i$$

donc

$$0 = \sum_i \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_k \dot{x}^k \sum_j \dot{x}^j D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

or $D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_k A_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_k \dot{x}^k \sum_j \dot{x}^j \sum_i A_{k,j}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_i \left(\ddot{x}^i + \sum_{j,k} \dot{x}^k \dot{x}^j A_{k,j}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

donnant (23.3.7). □

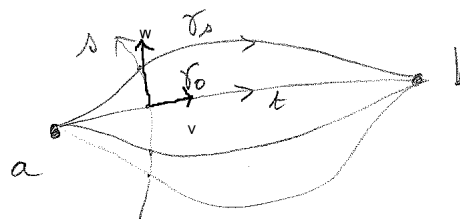
Proposition 23.3.4. Soit $\gamma_s(t)$ est une famille de chemins (où $t \in [0, 1]$ est le paramètre le long du chemin γ_s , et $s \in \mathbb{R}$ paramétrise les différents chemins). On suppose que les extrémités sont fixées en $a, b \in M$:

$$\gamma_s(0) = a, \quad \gamma_s(1) = b, \quad \forall s$$

Alors le chemin $\gamma_0 = \gamma_{s=0}$ est une géodésique (i.e. vérifie Eq.(23.3.6)) si et seulement sa longueur est extrémale :

$$\left(\frac{dl(\gamma_s)}{ds} \right)_{/s=0} = 0$$

pour toutes les familles de chemin possibles (la longueur $l(\gamma_s)$ a été définie par (18.5.12)).



Variation de chemins

Démonstration. (de [28] p.48). On a $l(\gamma_s) = \int_0^1 \sqrt{g(V_t, V_t)} dt$ où $V_t \equiv \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}$ est le vecteur tangent vitesse à $\gamma_s(t)$. D'après Proposition 18.5.11, la longueur est indépendante de la paramétrisation. Pour simplifier, on peut donc supposer que la paramétrisation est choisit telle que $\|V_t\|_{s=0} = \left(\sqrt{g(V_t, V_t)} \right)_{s=0} = c$ (i.e. vitesse constante). En chaque point $\gamma_0(t)$ de la courbe γ_0 , on introduit le vecteur tangent "de déformation"

$$W_t \equiv \left(\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \right)_{s=0}$$

En particulier aux extrémités,

$$W_0 = W_1 = 0 \tag{23.3.8}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{dl(\gamma_s)}{ds} \right)_{s=0} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{g(V_t, V_t)} \right) \right)_{s=0} dt = \int_0^1 \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial s} (g(V_t, V_t)) \right)_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^1 (W_t (g(V_t, V_t))) dt \end{aligned}$$

(d'après la définition (18.3.1)). Ensuite (23.3.2) donne $W_t(g(V_t, V_t)) = 2g(D_{W_t}V_t, V_t)$. De plus $[W_t, V_t] = \frac{\partial^2 \gamma_s(t)}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 \gamma_s(t)}{\partial t \partial s} = 0$ donc (23.3.3) implique que $D_{W_t}V_t = D_{V_t}W_t$ et donc $W_t(g(V_t, V_t)) = 2g(D_{V_t}W_t, V_t)$. Aussi (23.3.2) donne $g(D_{V_t}W_t, V_t) = V_t(g(W_t, V_t)) - g(W_t, D_{V_t}V_t)$. Alors

$$\left(\frac{dl(\gamma_s)}{ds}\right)_{s=0} = \frac{1}{c} \int_0^1 (V_t(g(W_t, V_t)) - g(W_t, D_{V_t}V_t)) dt$$

Mais $V_t(g(W_t, V_t)) dt = d(g(W_t, V_t))$ et donc

$$\int_0^1 (V_t(g(W_t, V_t))) dt = \int_0^1 d(g(W_t, V_t)) = g(W_1, V_1) - g(W_0, V_0) = 0$$

d'après le théorème de Stokes, et (23.3.8). Il reste

$$\left(\frac{dl(\gamma_s)}{ds}\right)_{s=0} = -\frac{1}{c} \int_0^1 g(W_t, D_{V_t}V_t) dt$$

appelée “**formule de première variation de la longueur**”. Or toutes les variations de chemin possibles correspond à tous les choix possibles de champ de vecteur W_t , et donc $\left(\frac{dl(\gamma_s)}{ds}\right)_{s=0} = 0$ implique $D_{V_t}V_t = 0$ c'est à dire que γ_0 est une géodésique. La réciproque est claire. \square

23.3.2 Courbure de Riemann

Définition 23.3.5. D'après la définition 23.2.11 page 277, le fibré tangent TM munit de la connexion de Riemann D , eq.(23.3.1), a la courbure Ω notée ici R , et appelée **courbure de Riemann**. Elle est donnée par (23.2.25) :

$$R(U, V)W = [D_U, D_V]W - D_{[U, V]}W \tag{23.3.9}$$

avec

$$R \in C^\infty(\Lambda^2 \otimes \text{Hom}(TM))$$

Remarque : Comme $\Lambda_x^2 \otimes \text{Hom}(T_x M)$ signifie une 2-forme à valeur dans un opérateur linéaire de $T_x M$, le tenseur R a 4 indices. C'est à dire que relativement à un système de coordonnées

$$R \simeq \sum_{k, l} R_{jkl}^i (dx^k \wedge dx^l) \tag{23.3.10}$$

où à k, l fixés, on considère i, j comme les éléments d'une matrice. Cette matrice correspond à la transformation de la figure 23.2.1. De façon plus précise, on a $R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Exercice : Utilisant (23.3.9) et (23.3.5), montrer :

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial A^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial x^l} + \sum_p A^i_{pk} A^p_{jl} - A^i_{pl} A^p_{jk} \quad (23.3.11)$$

Démonstration. On choisit $U = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $V = \frac{\partial}{\partial x^l}$, $W = \frac{\partial}{\partial x^j}$ et utilise $[U, V] = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k} = 0$. Alors d'après (23.3.5)

$$D_V W = \sum_m A^m_{jl} \frac{\partial}{\partial x^m}$$

et d'après Leibnitz (23.2.6)

$$\begin{aligned} D_U (D_V W) &= \sum_m D_U \left(A^m_{jl} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \sum_m \frac{\partial A^m_{jl}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^m} + A^m_{jl} D_U \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial A^i_{jl}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_p A^p_{jl} \sum_i A^i_{kp} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i \left(\frac{\partial A^i_{jl}}{\partial x^k} + \sum_p A^i_{pk} A^p_{jl} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

et de même pour $D_V (D_U W)$ en échangeant les indices k et l . Ensuite (23.3.10) donne $R(U, V)W = \sum_i R^i_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^i}$. La relation (23.3.9), donne $R(U, V)W = D_U (D_V W) - D_V (D_U W)$ et implique alors (23.3.11). \square

Définition 23.3.6. Le **tenseur de Ricci** est un tenseur symétrique d'ordre 2 :

$$r_{jk} := \sum_i R^i_{jik} \quad (23.3.12)$$

ce qui signifie qu'il est obtenu par une trace du tenseur de Riemann (opération indépendante du système de coordonnées).

La **courbure scalaire** est

$$S := \sum_{jk} (g^{-1})^{kj} r_{jk} \in C^\infty(M) \quad (23.3.13)$$

(une trace aussi). En tout point $x \in M$, $S(x) \in \mathbb{R}$ est un nombre, S est une fonction sur M .

Proposition 23.3.7. Dans le cas d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ ($\dim \mathcal{S} = 2$), alors $R = S = 2K_{Gauss}$ où $K_{Gauss} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ est la courbure de Gauss.

Démonstration. @@ \square

Interprétations :

- (ref : [29] p.484) Etant donné deux vecteurs tangents $U, V \in T_x M$, on définit **la courbure sectionnelle** $K(U, V)$ comme la courbure de Gauss dans le plan Π engendré par (U, V) . On montre que

$$K(U, V) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{|U|^2 |V|^2 - (g(U, V))^2}$$

et que $K(U, V)$ ne dépend que du plan Π .

- Une autre propriété est que K détermine le tenseur de Riemann R . ([29] p.479).
- La valeur diagonale du tenseur de Ricci dans la direction $U : r(U, U)$ (ce qui détermine r qui est symétrique) est donnée par $(n - 1)$ fois la moyenne de K sur les plans Π qui contiennent U .
- Le tenseur de Riemann caractérise la déformation de la métrique g par rapport à une métrique euclidienne : il existe un système de coordonnées t.q. au point $x = 0$ on a

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ijkl} x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^4)$$

- Le tenseur de Ricci caractérise la déformation de la forme volume par rapport au volume euclidien :

$$\mu_{vol} = \left(1 - \frac{1}{6} r_{jk} x^j x^k + \mathcal{O}(|x|^4) \right) \mu_{eucl.}$$

- La courbure scalaire caractérise le volume d'une petite boule B_ε (ou de sa surface ∂B_ε) de rayon ε , par rapport au volume euclidien :

$$\frac{Vol(B_\varepsilon)}{Vol_{eucl}(B_\varepsilon)} = 1 - \frac{S}{6(n+2)} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

$$\frac{Vol(\partial B_\varepsilon)}{Vol_{eucl}(\partial B_\varepsilon)} = 1 - \frac{S}{6n} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

23.3.3 Equations d'Einstein de la relativité générale

On considère ici un modèle très simple de matière et de rayonnement électromagnétique dans l'univers, couplés à la géométrie de l'espace-temps. Ref : [28, p.172],[30, chap.18].

23.3.3.1 Les champs

Supposons que

- M est une variété Lorentzienne de dimension 4 qui représente l'espace-temps. Soit

$$g \in C^\infty(S(T^*M \otimes T^*M))$$

le tenseur métrique, qui d'après (23.3.1), (23.3.9) et (23.3.13) détermine une connexion de Riemann D , le tenseur de Riemann R et **la courbure S de l'espace-temps**.

— Soit

$$A \in C^\infty(\Lambda^1)$$

une 1-forme qui représente le **champ électromagnétique**. (Voir section 21.0.3).

On note $F = dA$.

— Soit

$$U \in C^\infty(TM)$$

un champ de vecteur que l'on suppose de type temps et normalisé en tout point $x \in M : g(U_x, U_x) = -1$. U représente les trajectoires d'un **nuage de poussière chargé électriquement** dans l'univers (U est tangent aux lignes d'univers). De plus

$$\mu \in C^\infty(M)$$

est une fonction qui représente la densité de masse de ce nuage, et on note $\sigma = e \cdot \mu$ sa densité de charge (avec $e > 0$ une constante). (on ne modélise ici donc qu'un seul type de matière).

Les trois champs métrique g , électromagnétique A et matière U et μ décrits ci-dessus interagissent entre eux d'après les données suivantes.

23.3.3.2 L'action

On définit le **Lagrangien total** de ce modèle par :

$$\mathcal{L}_{tot}(x) = \mathcal{L}_{grav}(x) + \mathcal{L}_{e.m.}(x) + \mathcal{L}_{int}(x) + \mathcal{L}_{mat}(x)$$

avec $x \in M$, et l'**action** par :

$$I(g, A, U) := \int_M \mathcal{L}_{tot} \mu_{vol}$$

avec le Lagrangien gravitationnel, appelé "**Lagrangien d'Hilbert Einstein**"

$$\mathcal{L}_{grav}(x) = \frac{1}{16\pi\kappa} (S(x) + \Lambda), \quad I_{grav} = \int_M \mathcal{L}_{grav} \mu_{vol}$$

où $S(x)$ est la courbure scalaire (23.3.13), et $\Lambda \in \mathbb{R}$ une constante, appelée **constante cosmologique**.

Le Lagrangien électromagnétique déjà défini en (21.0.15) est :

$$\mathcal{L}_{e.m.}(x) := -\frac{1}{2} \langle F, F \rangle_{\Lambda_x^2}$$

Le Lagrangien d'interaction Matière-rayonnement est :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \langle A, \mathcal{J} \rangle_{\Lambda_x^1}$$

avec la densité de courant $\mathcal{J} = \sigma U$.

Le Lagrangien pour la matière est :

$$\mathcal{L}_{mat}(x) = \frac{1}{2}\mu\langle U, U \rangle_{T_x M}$$

Les équations de la physique correspondent aux champs tels que l'action $I(g, A, U)$ est extrémale par rapport aux variations à support compact des champs g, A, U .

Théorème 23.3.8. (*Besse 4.17 p.120 [6]*), (*Taylor T3 [30], chap.18*)

Premières variations de l'action :

Si la métrique g est modifiée en $g + \tau h$ avec $\tau \in \mathbb{R}$, et $h \in C^\infty(S(T^*M \otimes T^*M))$ une direction de variation à support compact, alors

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_{grav}(g + \tau h)_{/\tau=0} = \frac{1}{16\pi\kappa} \int \langle G, h \rangle \mu_{vol}$$

où

$$G^{jk} := r^{jk} - \frac{1}{2}Sg^{jk} - \Lambda g^{jk}$$

est appelé **tenseur d'Einstein**, $G \in C^\infty(S(T^*M \otimes T^*M))$. De même

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_{e.m.+int+mat.}(g + \tau h)_{/\tau=0} = \int \langle T, h \rangle \mu_{vol}$$

où

$$T^{jk} = -\frac{1}{4\pi} \underbrace{\left(\tilde{F}^2 + \frac{1}{2}\langle F, F \rangle Id \right)}_{e.m.} + \underbrace{\mu U \otimes U}_{mat}$$

$$\tilde{F}^2 := F_{i,m} F_j^m$$

est appelé **tenseur énergie impulsion**. Ils vérifient :

$$div(G) = div(T) = 0 \tag{23.3.14}$$

Corollaire 23.3.9. L'action totale $I_{tot}(g)$ est stationnaire par rapport aux variations de la métrique g si et seulement si est vérifiée l'équation d'Einstein :

$$G = 8\pi\kappa T \tag{23.3.15}$$

Démonstration. @@

□

Il faut aussi étudier les variations de l'action par rapport aux champs A et U

Proposition 23.3.10. *L'action totale $I_{tot}(A)$ est stationnaire par rapport aux variations du champ A si et seulement si est vérifiée l'équation de Maxwell (21.0.6) :*

$$d^*F = 4\pi\mathcal{J}$$

avec la densité de courant $\mathcal{J} := \sigma U$.

Proposition 23.3.11. *L'action totale $I_{tot}(U)$ est stationnaire par rapport aux variations du champ U si et seulement si est vérifiée l'équation pour la matière :*

$$\mu D_U U = eg^{-1}(F(U)) \tag{23.3.16}$$

(où $F_x \in \Lambda_x^2$ donc $F_x : T_x M \rightarrow T_x^* M$, et $g_x^{-1} : T_x^* M \rightarrow T_x M$ donc $g^{-1}(F(U)) \in T_x M$). Cette équation signifie que sans champs e.m. ($F = 0$), les particules vérifient $D_U U = 0$, i.e. les lignes d'univers sont des géodésiques d'après (23.3.6). Le champ électromagnétique F dévie ces lignes (Force de Lorentz). On a aussi

$$\operatorname{div}(\mu U) = 0$$

qui traduit la "conservation de la matière".

Remarques :

- Les équations (23.3.14) n'impliquent pas de conservation de l'énergie ! cf [28] chap.2 section 7. Il faut supposer en plus une symétrie de l'espace temps : existence d'un groupe d'isométrie de type temps, par exemple un univers "stationnaire".
- Dans un référentiel où la matière est au repos ($U = (1, 0, 0, 0)$) et si $g = -dt \otimes dt + \sum_i dx^i \otimes dx^i$ (Minkowski, i.e. sans courbure d'espace) alors les équation (23.3.16) s'écrit sous la forme "Equation de Newton avec force de Lorentz" à faible vitesse :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

et

$$(T_{mat})_{0,0} = \mu$$

qui correspond à l'énergie de masse au repos de la matière (" mc^2 "), et

$$(T_{em})_{00} = \frac{1}{8\pi} (|E|^2 + |B|^2)$$

qui est la densité d'énergie du champ électromagnétique. ([28] p.169)

- On montre ([30], p529) que si $V_x \in T_x M$ est un vecteur unitaire de type temps, et \mathcal{S}_V est l'hypersurface orthogonale (de type espace) alors la courbure scalaire de cette hypersurface est liée à l'énergie observée dans le référentiel défini par V_x :

$$\underbrace{S_x(\mathcal{S}_V)}_{\text{courbure scalaire}} = 16\pi\kappa \underbrace{T_x(V_x, V_x)}_{\text{énergie observée}}$$

signifiant que **“le contenu en énergie est responsable de la courbure”**.

- On montre aussi que si $W(s)$ est un champ de vecteur mesurant l'écartement entre deux géodésiques voisines (appelé champ de vecteur de Jacobi) ($W(s)$ est de type espace, et le paramètre s est le temps propre) alors

$$\frac{d^2}{ds^2}g(W, W) \underbrace{=}_{\text{géométrie}} -2r(V, V) \underbrace{=}_{\text{eq. Einstein}} -16\pi\kappa \underbrace{\left(T(V, V) + \frac{1}{2}\text{Tr}(T)\right)}_{\geq 0} \quad (23.3.17)$$

donc

$$\frac{d^2}{ds^2}g(W, W) \leq 0$$

signifiant qu'il y a une accélération “attractive” (les géodésiques initialement parallèles se rapprochent). Les équations d'Einstein ont les mêmes effets qu'une force gravitationnelle attractive.

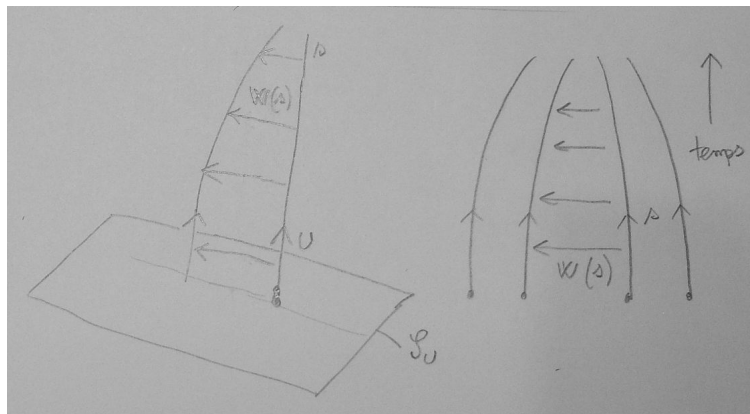


FIGURE 23.3.1 – Cette figure illustre l'équation (23.3.17) qui relie l'accélération de l'écartement de géodésiques voisines au contenu en énergie de l'espace temps.

23.3.4 Modèles cosmologiques en relativité générale

On présente ici quelques modèles qui ont joué (ou jouent encore) un rôle important en cosmologie. Ces notes sont basées sur les références [32, chap.5, p.91] et [8, chap.5, p.111].

23.3.4.1 Description de l'espace temps M_ϵ

On va construire trois modèles particuliers d'espace temps M_ϵ indicé par $\epsilon = -1, 0, 1$.

On considère une variété Riemannienne de dimension trois Σ_ϵ , appelé espace homogène défini par (selon la valeur de ϵ)

— Cas $\epsilon = 0$. L'espace **Euclidien**

$$\Sigma_0 := \mathbb{R}^3 := \{x = (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3\}$$

avec la métrique Euclidienne $h_0 = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$.

— Cas $\epsilon = 1$. La **sphère**

$$\Sigma_1 := S^3 := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

avec la métrique h_1 induite de la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^4 .

— Cas $\epsilon = -1$. L'espace **hyperbolique**

$$\Sigma_{-1} := \mathbb{H}^3 := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1^2 - (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 1 \text{ et } x_1 > 0\}$$

avec la métrique h_{-1} induite de la métrique de Minkowski sur \mathbb{R}^4 .

Remarque 23.3.12. Pour chaque indice $\epsilon = -1, 0, 1$ on peut écrire les définitions ci-dessus comme

$$\Sigma_\epsilon = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1^2 + \epsilon(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 1\}$$

avec la condition supplémentaire $x_1 > 0$ pour $\epsilon = 0, -1$. Σ_ϵ possède la métrique induite sur \mathbb{R}^4 : $h = x_1^2 + \epsilon(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$, sauf pour $\epsilon = 0$.

Remarque 23.3.13. notations : \mathbb{R}_t signifie que t est le nom de la variable sur \mathbb{R} . Pour une fonction à une variable comme $R(t)$ on note $\dot{R}(t) := \frac{dR}{dt}$.

Définition 23.3.14. Soit $R \in C^\infty(\mathbb{R}_t; \mathbb{R})$. Un **espace temps de Robertson-Walker** est le produit direct

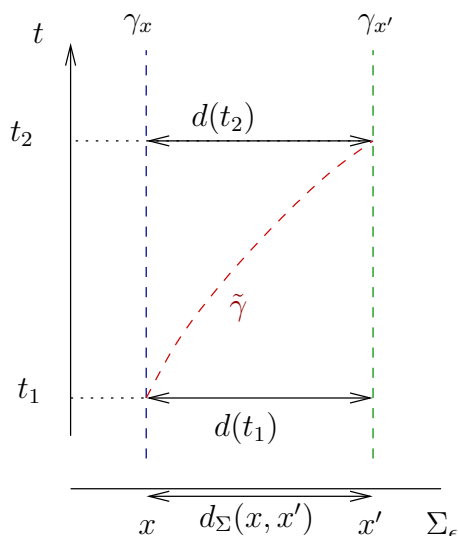
$$M_\epsilon = \mathbb{R}_t \times \Sigma_\epsilon \tag{23.3.18}$$

munit de la métrique Lorenzienne g_ϵ sur M_ϵ :

$$g_\epsilon = -dt \otimes dt + (R(t))^2 h_\epsilon \tag{23.3.19}$$

où $(\Sigma_\epsilon, h_\epsilon)$ a été défini plus haut.

Avec quelques hypothèses, on obtiendra l'expression de la fonction $R(t)$ dans la proposition (23.3.21).



23.3.4.2 Lignes d'univers cosmologiques

Soit $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$ fixé. Soit $x \in \Sigma_\epsilon$ est un point fixé.

La courbe $\gamma_x := \{(t, x), t \in \mathbb{R}\} \subset M$ est une géodésique de type temps appelée **ligne d'univers cosmologique**. On a $\frac{d\gamma_x(t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$ donc $\left\| \frac{d\gamma_x(t)}{dt} \right\| \stackrel{(23.3.19)}{=} 1$ ce qui montre que t est le temps propre pour cette ligne d'univers. Elle représente un observateur immobile dans ce modèle cosmologique. Si (e_1, e_2, e_3) est une base o.n. de $T_x \Sigma_\epsilon$ alors

$$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{R(t)} (e_1, e_2, e_3) \in T_{\gamma_x(t)} M_\epsilon$$

est une base orthonormée pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et cela forme un référentiel inertiel (i.e. transporté parallèlement) appelé **référentiel cosmologique** pour ce modèle.

Soit $x, x' \in \Sigma_\epsilon$ sont deux points donnés.

On note $d_\Sigma(x, x')$ la distance entre ces deux points pour la métrique h_ϵ . Alors la distance entre les points $\gamma_x(t)$ et $\gamma_{x'}(t)$ pour la métrique g_ϵ est d'après l'expression (23.3.19)

$$d(t) := d(\gamma_x(t), \gamma_{x'}(t)) = R(t) d_\Sigma(x, x') \quad (23.3.20)$$

ainsi $R(t)$ mesure la distance (instantanée) entre des points immobiles de cet univers à la date t . Pour deux dates t_1, t_2 on a donc

$$\frac{d(t_2)}{d(t_1)} \stackrel{(23.3.20)}{=} \frac{R(t_2)}{R(t_1)}. \quad (23.3.21)$$

Lemme 23.3.15. On a

$$\frac{d}{dt} (d(\gamma_x(t), \gamma_{x'}(t))) = H(t) d(\gamma_x(t), \gamma_{x'}(t)) \quad (23.3.22)$$

appelée **Loi de Hubble**, avec

$$H(t) := \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \in \mathbb{R},$$

appelé le **facteur de Hubble**.

Démonstration. On a $\frac{d}{dt} (d(\gamma_x(t), \gamma_{x'}(t))) \stackrel{(23.3.20)}{=} \dot{R}d_\Sigma \stackrel{(23.3.20)}{=} \dot{R} \frac{d}{R} = Hd$. \square

Remarque. La formule (23.3.22) est l'équivalent infinitésimal de (23.3.21).

Notons $\gamma_{x,x'}$ la géodésique sur Σ_ϵ reliant les deux points x, x' (cette géodésique est unique car Σ_ϵ est simplement connexe) paramétrée par $s \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$\left\| \frac{d\gamma_{x,x'}(s)}{ds} \right\|_h = 1, \quad (23.3.23)$$

et $\gamma_{x,x'}(0) = x$, $\gamma_{x,x'}(d(x, x')) = x'$.

Rappelons la fréquence d'un faisceau lumineux (géodésique de type lumière) expliquée en @@.

Lemme 23.3.16. Soit $t_1 \in \mathbb{R}$. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_s; \mathbb{R}_t)$ défini par $f(0) = t_1$ et

$$\frac{df}{ds} = R(f(s)). \quad (23.3.24)$$

Alors la courbe

$$\tilde{\gamma}(s) = (f(s), \gamma_{x,x'}(s)) \in \mathbb{R}_t \times \Sigma_\epsilon = M_\epsilon$$

est l'unique **géodésique de type lumière** joignant la ligne γ_x à la ligne $\gamma_{x'}$ et partant du point $(t_1, x) \in \gamma_x$. Elle rejoint $\gamma_{x'}$ au point $(t_2, x') \in \gamma_{x'}$ avec $t_2 = t_1 + f(d(x, x'))$.

Si $\nu_1 = \left(g\left(\frac{d\gamma_x}{dt}, \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\right)\right)^{-1}$ est la fréquence pour l'observateur γ_x au point (t_1, x) et $\nu_2 = \left(g\left(\frac{d\gamma_{x'}}{dt}, \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\right)\right)^{-1}$ la fréquence pour l'observateur $\gamma_{x'}$ au point (t_2, x') alors

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)}. \quad (23.3.25)$$

Remarque 23.3.17. (23.3.24) est une équation différentielle ordinaire, où $f : s \rightarrow t = f(s)$ est le flot engendré par le champ de vecteur R sur \mathbb{R}_t .

Démonstration. On a

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \left(\frac{df}{ds}, \frac{d\gamma_{x,x'}(s)}{ds} \right) \quad (23.3.26)$$

et $\left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\|_g \stackrel{(23.3.19), (23.3.23)}{=} \left| \frac{df}{ds} \right|^2 - (R(t))^2 \stackrel{(23.3.24)}{=} 0$, ce qui montre que $\tilde{\gamma}$ est de type lumière.

Il reste à montrer que c'est une géodésique. On a $\frac{d\gamma_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$ donc

$$g \left(\frac{d\gamma_x}{dt}, \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right) \stackrel{(23.3.26)}{=} g \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{df}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \right) \stackrel{(23.3.19)}{=} -\frac{df}{ds} \stackrel{(23.3.24)}{=} -R(f(s)) = -R(t).$$

□

Exercice 23.3.18. en pratique on observe le facteur

$$z := \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} \tag{23.3.27}$$

appelé “**red-shift**” ou décalage vers le rouge. Exprimer le rapport de distances $d(t_2)/d(t_1)$ définie en (23.3.20) à partir de z .

Solution 23.3.19. On a

$$z \stackrel{(23.3.27)}{=} \frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \stackrel{(23.3.25)}{=} \frac{R(t_2)}{R(t_1)} - 1 = \frac{d(t_2)}{d(t_1)} - 1.$$

23.3.4.3 Tenseur énergie impulsion et équations d'Einstein

Soit $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}_t; \mathbb{R})$ une fonction appelée densité d'énergie et $p \in C^\infty(\mathbb{R}_t; \mathbb{R})$ une fonction appelée densité de pression.

On considère le tenseur énergie impulsion de type $(0, 2)$ symétrique,

$$T = (\mu + p) \frac{\partial}{\partial t} \otimes \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} p g^{-1} \tag{23.3.28}$$

Proposition 23.3.20. *L'équation d'Einstein (23.3.15) appliquée au modèle d'espace M_ϵ de Robertson Walker (23.3.18) et pour le tenseur énergie impulsion (23.3.28), donne les équations de Friedmann pour les fonctions $\mu(t), p(t)$:*

$$\mu = \frac{3}{R^2} (\dot{R}^2 + \epsilon) - \Lambda \tag{23.3.29}$$

$$p = -2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\epsilon}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \Lambda \tag{23.3.30}$$

où $\Lambda \in \mathbb{R}$ est la constante cosmologique. Cela implique la relation

$$\frac{d}{dt} (\mu R^3) = -3\dot{R}R^2 p \tag{23.3.31}$$

Démonstration. On admet ce résultat. Pour montrer la dernière relation, on a

$$\mu R^3 \stackrel{(23.3.29)}{=} 3R (\dot{R}^2 + \epsilon) - \Lambda R^3$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu R^3) &= 3\dot{R}(\dot{R}^2 + \epsilon) + 6R\dot{R}\ddot{R} - 3\Lambda R^2\dot{R} \\ &= 3\dot{R}R^2 \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\epsilon}{R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{R} - \Lambda \right) \\ &= -3\dot{R}R^2 p \end{aligned}$$

□

On considèrera deux cas particuliers : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$p(t) = 0 \quad : \text{"poussières"}$$

$$p(t) = \frac{1}{3}\mu(t) \quad : \text{"radiations"}.$$

(ces relations s'appellent "équation d'état"). Pour traiter ces deux cas on écrira

$$p = \frac{\kappa}{3}\mu, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (23.3.32)$$

avec $\kappa = 0$ pour décrire des poussières et $\kappa = 1$ pour décrire des radiations.

Proposition 23.3.21. *L'équation de Friedmann (23.3.31) et l'équation d'état (23.3.32) donnent : il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\mu(t)(R(t))^{3+\kappa} = C. \quad (23.3.33)$$

et alors

$$\left(\dot{R}(t)\right)^2 = \frac{1}{3} \left(C R(t)^{-(3+\kappa)} + \Lambda \right) R(t)^2 - \epsilon. \quad (23.3.34)$$

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt}(\mu R^3) \stackrel{(23.3.31)}{=} -3\dot{R}R^2 p \stackrel{(23.3.32)}{=} -\kappa \dot{R}R^2 \mu$$

Donc pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu R^\alpha) &= \frac{d}{dt}(\mu R^3 R^{\alpha-3}) = \frac{d}{dt}(\mu R^3) R^{\alpha-3} + (\alpha-3)\mu \dot{R}R^{\alpha-4}R^3 \\ &= -\kappa \dot{R}R^2 \mu R^{\alpha-3} + (\alpha-3)\mu \dot{R}R^{\alpha-4}R^3 \\ &= (\alpha-3-\kappa)\mu \dot{R}R^{\alpha-1} = 0 \end{aligned}$$

si $\alpha = 3 + \kappa$, donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\mu R^{3+\kappa} = C$. Ensuite

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &\stackrel{(23.3.29)}{=} \frac{1}{3}(\mu + \Lambda)R^2 - \epsilon \\ &\stackrel{(23.3.33)}{=} \frac{1}{3}(C R^{-(3+\kappa)} + \Lambda)R^2 - \epsilon \end{aligned}$$

□

Proposition 23.3.22. *Soit*

$$\Omega(t) := \frac{\mu(t) + \Lambda}{3H^2(t)}, \quad H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}.$$

appelée *densité*. Alors

$$\begin{aligned} \Omega > 1 &\Leftrightarrow \epsilon = +1, & : \text{espace } \Sigma = S^3, \\ \Omega = 1 &\Leftrightarrow \epsilon = 0, & : \text{espace } \Sigma = E^3, \\ \Omega < 1 &\Leftrightarrow \epsilon = -1, & : \text{espace } \Sigma = \mathbb{H}^3, \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\Omega(t) = \frac{(\mu + \Lambda) R^2}{3\dot{R}^2} \stackrel{(23.3.29)}{=} \frac{(\dot{R}^2 + \epsilon)}{\dot{R}^2} = 1 + \frac{\epsilon}{\dot{R}^2}$$

donc $\Omega > 1 \Leftrightarrow \epsilon > 0$.

Remarque 23.3.23. [8, p125,p140] D'après l'observation du fonc diffu cosmologique, et des super-novas, les astrophysiciens pensent que l'univers est dans une situation avec une densité $\Omega \sim 1$, contenant de la "dark energy", et avec $\epsilon = 0$ (espace Σ euclidien). □

23.3.4.4 Solutions de l'équation d'évolution de Friedmann-LeMaître

On va résoudre l'équation d'évolution (23.3.34) pour certains cas.

Proposition 23.3.24. *Si $\Lambda = 0$, et $\epsilon = 0$ (espace Σ Euclidien) alors*

$$R(t) = \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{C}{3} \right)^{1/2} \right)^\alpha t^\alpha, \quad \alpha = \frac{2}{3 + \kappa}, \quad t \geq 0.$$

plus généralement, pour toutes valeurs de Λ et ϵ alors pour $R \ll 1$ on a :

$$R(t) = \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{C}{3} \right)^{1/2} \right)^\alpha t^\alpha (1 + o(1)).$$

Cette singularité en $t = 0$ s'appelle le **big-bang**.

Démonstration. Eq. (23.3.34) donne

$$\dot{R} = \left(\frac{C}{3} \right)^{1/2} R^{-\frac{1+\kappa}{2}} (1 + o(1)) \tag{23.3.35}$$

où le reste est nul si $\Lambda = 0$ et $\epsilon = 0$. On suppose $R(t) = ct^\alpha$. Alors (23.3.35) donne

$$c\alpha t^{\alpha-1} = \left(\frac{C}{3}\right)^{1/2} c^{-\frac{1+\kappa}{2}} t^{-\frac{(1+\kappa)\alpha}{2}} (1 + o(1))$$

Donc

$$\alpha - 1 = -\frac{(1+\kappa)\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3+\kappa}$$

et

$$c\alpha = \left(\frac{C}{3}\right)^{1/2} c^{-\frac{1+\kappa}{2}} \Leftrightarrow c = \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{C}{3}\right)^{1/2}\right)^\alpha.$$

□

Comportement pour $R \gg 1$:

Proposition 23.3.25. *Pour $R \gg 1$ (assez grand), si $\Lambda \neq 0$ on a un comportement exponentiel :*

$$R(t) = R(0) e^{\pm\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} t} (1 + O(R^{-2}))$$

Si $\Lambda = 0$ et $\epsilon = -1$, alors on a une croissance linéaire

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}t + O(R^{-1}).$$

Démonstration. Eq. (23.3.34) donne

$$\dot{R}(t) = \pm \left(\frac{1}{3}CR^{-(1+\kappa)} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - \frac{1}{3}\epsilon \right)^{1/2}.$$

Si $\Lambda \neq 0$ alors

$$\dot{R}(t) = \pm \left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{1/2} R (1 + O(R^{-2})).$$

La solution est

$$R(t) = R(0) e^{\pm\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} t} (1 + O(R^{-2})).$$

Si $\Lambda = 0$ et $\epsilon = -1$ alors

$$\dot{R}(t) = \pm \left(\frac{1}{3} + O(R^{-1}) \right)^{1/2}.$$

Donc

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}t + O(R^{-1})$$

□