Première partie

Analyse de Fourier, distributions et EDP à coefficients constants

Réf : Taylor Tome 1 p.3 [28]
JM Bony, cours de l'X.
livre de Nelson 1969.
On donne les références précises à ces livres.
@@ Introduction : frise des fonctions régulières aux moins régulières.
@@ Montrer le rapport avec les **notations de Dirac** dans des remarques @@.

Chapitre 1

Dérivée et formule de Taylor

Réf : Taylor Tome 1 p.3 [28].

On utilise le livre de Nelson p.1 “flows” ref. @@.

La présentation suivante concerne des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mais peut s'étendre à des fonctions $f : E \to F$ avec E, F espaces de Banach [1].

Notation : Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sa **norme euclidienne** est $\|x\| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

La **norme infinie** est $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Définition 1.0.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction à n variables à valeur dans $\mathbb{R}^m$, c'est à dire que f a m composantes qui sont des fonctions à n variables :

$$f : \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

On dit que f est **continue** (ou f est C^0) au point $x \in \mathbb{R}^n$, si

$$\|f(x+y) - f(x)\| \to 0, \quad \text{lorsque } \|y\| \to 0.$$

Notations :

— On note $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. C'est une matrice $m \times n$ à coefficients réels. La **norme opérateur** est définie par

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

1. Cette extension est utile en mécanique pour les systèmes à nombre infini de dégrés de liberté (mouvement d'une onde). Les fonctions Hamiltonien et Lagrangien etc sont des fonctions sur ces espaces de Banach

Il y a d'autres normes utilisées (et équivalentes). Par exemple la **norme Hilbert-Schmidt** : $\|A\|_{HS} := \left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

Définition 1.0.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue en $x \in \mathbb{R}^n$. f est **différentiable** au point $x \in \mathbb{R}^n$ avec une **dérivée** ou **différentielle**

$$Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

si pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ petit,

$$f(x+y) = f(x) + (Df(x))\, y + o(y) \tag{1.0.1}$$

où $\frac{\|o(y)\|}{\|y\|} \to 0$ pour $\|y\| \to 0$, $y \neq 0$.

Remarques

— Les propriétés d'être continue ou différentiable sont indépendant du choix de la norme.

— La différentielle de f au point x est la matrice $Df(x)$ dont les éléments sont les **dérivées partielles** :

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right)_{j=1\to m, k=1\to n} \tag{1.0.2}$$

Définition 1.0.3. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

— f est C^1 si f est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et si $x \to Df(x)$ est continue.

— f est C^2 si f est C^1 et Df est C^1. On note $D^2 f := D(Df)$. etc : f est C^k si $D^{k-1}f$ est C^1.

— f est C^∞ (ou **lisse**) si f est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarques

— Noter que $x \in \mathbb{R}^n \to Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une fonction à valeurs matricielles (ou vectorielles). Pour définir la continuité il faut utiliser la norme opérateur sur $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

— Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on note $f'(x)$sa dérivée, et $f^{(k)}(x) = D^k f(x)$ sa dérivée k-ième.

Exemples

— La fonction $f : x \in \mathbb{R} \to \sin(x) \in \mathbb{R}$ est C^∞. Si k est pair, on a $f^{(k)}(x) = (-1)^{k/2} \sin(x)$ et si k est impair, $f^{(k)}(x) = (-1)^{(k+1)/2} \cos(x)$.

Exercice 1.0.4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $\alpha > 0$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha = e^{\alpha \log x} & \text{si } x > 0 \\ x^\alpha = -e^{\alpha \log |x|} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est C^∞ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $x = 0$, si $k < \alpha < k+1$, f est C^k mais pas C^{k+1} . Si $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, alors f est [2] C^∞ en $x = 0$.

Exercice 1.0.5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que f est C^0 sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en $x = 0$. (Utiliser la définition de dérivée).

— Voir figure 1.0.1, obtenue par le code python [3] suivant :

```
x=linspace(1e-5,0.2,1e5) #ainsi x=1e-5 -> 0.2 avec 1e5 points
y=x*sin(1/x)
plot(x,y)
```

Exemple La **fonction de Weierstrass**, pour $0 < \alpha < 1$, $b > 1$, est définie par

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{\alpha n}} \cos(b^n \pi x) \tag{1.0.3}$$

Remarquer que la série est absolument convergente, car $|b^\alpha| > 1$.

— Voir figure 1.0.2, obtenue par le code python suivant :

```
a=0.5; b=2;
x=linspace(-5,5,1001) #ainsi x=-5 -> 5 avec 1001 points
y=cos(pi*x)
for n in range(15):
         y=y+cos(b**n*pi*x)/b**(a*n)
plot(x,y)
```

2. Dans la suite du cours, on verra de façon surprenante que ce résultat est en rapport avec le spectre discret de l'"oscillateur harmonique quantique".

3. **python** est un langage informatique simple, puissant et gratuit, **http ://www.python.org/** et **http ://www.scipy.org/**. On lance python par **ipython -pylab**

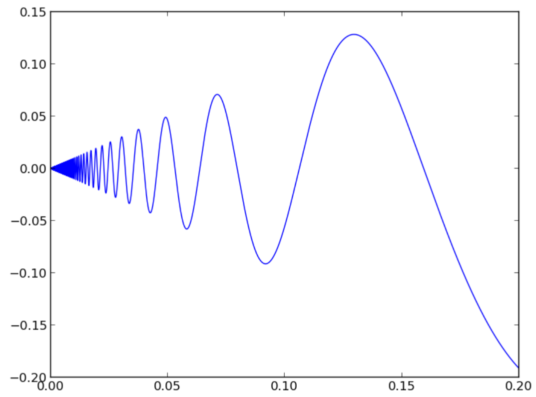

FIGURE 1.0.1 – Fonction $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

— Le graphe de la fonction f de Weierstrass est une "**fractale**". Voici la définition de la dimension fractale :
Si $F \subset \mathbb{R}^n$ est un sous ensemble borné de points de $\mathbb{R}^n$, pour $\delta > 0$, on note $N_\delta(F)$ le plus petit nombre de cubes de côté δ qui recouvrent F. Intuitivement, la dimension $\dim(F)$ est telle que pour $\delta \to 0$,

$$N_\delta(F) \sim \frac{\mathrm{Vol}(F)}{\delta^{\dim(F)}} \Leftrightarrow \dim(F) \sim \frac{\log N_\delta(F)}{\log(1/\delta)}$$

(rem : ce peut être remplacé par des boules de diamètre δ ou $\leq \delta$). Cela donne la définition :
Définition 1.0.6. La "**box dimension**" ou "**dimension fractale**" $\dim_B(F)$ d 'un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\dim_B F := \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log(1/\delta)}$$

si la limite existe.
Par exemple, pour le graphe de la fonction f de Weierstrass, on verra (exercice @@) que $\dim_B f = 2 - \alpha$. Ainsi $1 < \dim f < 2$. (Voir [11, p.41]).
— On peut aussi utiliser le logiciel xcas [5] ; on écrit :
```
f:=cos(pi*x); b:=2; a:=0.5; for(n:=1;n<=7;n:=n+1) { f:=f+cos(b^n*pi*x)/b^(a*n);}
plot(f);
```
On montre (voir exercices ci-dessous) que f est continue mais non dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$. Cependant f vérifie :

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \; C > 0, \; \forall y \text{ proche de } x$$

On dit alors que f est **Hölder continue d'exposant** α ou f est C^α (avec $0 < \alpha < 1$).

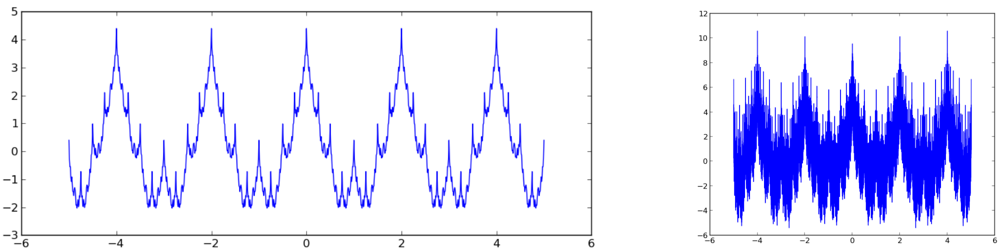

FIGURE 1.0.2 – Fonction de Weierstrass (15) (1) pour $\alpha = 0.5$, $b = 2.$ et (2) pour pour $\alpha = 0.1$, $b = 2$

Mais f n'est pas Lipchitz [4]. Par exemple la fonction $x \to \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$ mais elle est Hölder continue d'exposant $1/2$.

Remarquer que f est construite comme somme de fonctions $c(\xi)\cos(\xi x)$ de fréquence $\xi_n = b^n \pi$ et d'amplitude $c(\xi) = \frac{1}{b^{\alpha n}} = \frac{\pi^\alpha}{\xi^\alpha}$. Cette amplitude décroit assez faiblement pour les hautes fréquences $|\xi| \to \infty$ (comme $1/\xi^\alpha$) est on verra plus loin @@ que c'est cela qui est responsable de la “non régularité” de la fonction.

Exercice 1.0.7. Pour la fonction (13), montrer que :

1. Il existe $C_1 > 0$ t.q.
$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_1.h^\alpha$$
C'est à dire que f est Hölder continue d'exposant α.
2. Si b est assez grand, montrer que $\exists C_2 > 0, \forall x, \forall h_0 > 0$, $\exists h < h_0$ t.q.
$$|f(x+h) - f(x)| \geq C_2.h^\alpha$$
Cela implique que en tout point x, f n'est pas Hölder continue d'exposant $\alpha' > \alpha$.
3. Montrer que le graphe de f a la “box dimension” ou “dimension fractale” :
$$\dim_B f = 2 - \alpha$$

Proposition 1.0.8. (*) Loi du produit. *(Nelson p.4.) Supposons donnés $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ des fonctions C^k et une application bilinéaire notée $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to x.y \in \mathbb{R}^k$. Alors $f.g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est C^k et :*
$$D(f.g)(x)y = Df(x)y.g(x) + f(x).Dg(x)y \tag{1.0.4}$$

4. Par définition, f est **Lipchitz** si
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$
avec $C > 0$ et $\forall y$ proche de x.

Démonstration. On suppose que f, g sont C^1. Alors d'après la définition (1.0.1),

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + (Df(x))\, y + o(y), \\ g(x+y) &= g(x) + (Dg(x))\, y + o(y) \end{aligned}$$

donc

$$f(x+y) . g(x+y) = f(x) . g(x) + (Df(x))\, y . g(x) + f(x) . (Dg(x))\, y + o(y)$$

ce qui montre que $f.g$ est C^1 et on obtient (1.0.4). On montre par récurrence que si f, g sont C^k alors $f.g$ est C^k. □

Proposition 1.0.9. Loi de composition. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dérivable en x et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ est dérivable en $f(x)$ alors*

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$$

est dérivable en x et

$$D(g \circ f) = (Dg)(f(x)) . Df(x) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l\right) \tag{1.0.5}$$

Si f, g sont C^k alors $g \circ f$ est C^k.

Remarque : En explicitant le produit des matrices des dérivées partielles (1.0.2), la formule (1.0.5) s'écrit

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x^k}(f(x)) . \frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x)$$

Démonstration. On a d'après (1.0.1) $f(x+y) = f(x) + (Df(x))\, y + o(y)$ et $g(f+h) = g(f) + (Dg(f))\, h + o(h)$ donc avec $f = f(x)$ et $h = (Df(x))\, y + o(y)$ cela donne

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) = g(f(x) + h) = g(f(x)) + (Dg(f(x)))\, h + o(h) \\ &= g(f(x)) + (Dg(f(x)))\, (Df(x))\, y + o(y) \end{aligned}$$

donc $f \circ g$ est C^1 et on obtient (1.0.5). On montre que par récurrence que si f, g sont C^k alors $g \circ f$ est C^k. □

Proposition 1.0.10. Formule de Taylor. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^{k+1} en $x = 0$, alors*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f^{(2)}(0)\,x^2 + \ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\,x^k + r_k(x)$$

appelée ***Série de Taylor*** *avec le reste*

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{1}{k!}\int_0^x (x-s)^k f^{(k+1)}(s)\,ds \qquad &&: \textit{reste intégral} \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\theta(x)) \ \ \textit{avec } 0 \le \theta(x) \le x \qquad &&: \textit{reste de Taylor-Lagrange} \\ &= o\left(x^k\right) \end{aligned}$$

Démonstration. On fait une récurrence. Pour $k = 0$, il faut montrer que

$$f(x) = f(0) + r_0(x), \qquad r_0(x) = \int_0^x f'(s)\,ds$$

Ce résultat est vrai, appelé le **théorème fondamental de l'analyse.** Ensuite, on suppose que la formule est vraie pour $k \ge 0$, et on suppose f est C^{k+2}. Alors avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \int_0^x \frac{(x-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,ds \\ &= \left[-\frac{(x-s)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(s)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-s)^{k+1}}{k+1!} f^{(k+2)}(s)\,ds \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(0) + r_{k+1}(x) \end{aligned}$$

Cela prouve la formule avec le reste intégral. Pour avoir le reste de Taylor-Lagrange, on utilise l'égalité de la moyenne : si f est continue alors

$$\exists c \in [a,b] \ \text{ tq } \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$$

Ainsi il existe $0 \le \theta(x) \le x$ tel que

$$r_k(x) = f^{(k+1)}(\theta(x)) \int_0^x \frac{(x-s)^k}{k!} ds = f^{(k+1)}(\theta(x)) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

□

Proposition 1.0.11. Formule de Taylor. *pour* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *@@ Voir Nelson p.12, et interprétation de* $D^k f \in L\left(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k}, \mathbb{R}^m\right)$ *comme un tenseur symétrique. Application à la masse effective en theorie de Bloch.*

Exemple

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o\left(x^5\right)$$

@@ dessin des approximations successives @@

Exemple de fonction plate en $x = 0$ **:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On a pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \to 0$ pour $x \to 0$, et de même $f^{(k)}(x) \to 0$ pour $x \to 0$. Donc f est C^∞sur $\mathbb{R}$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dit que la fonction f est **plate en** $x = 0$. Autrement dit sa série de Taylor est nulle. Mais $f(x) > 0$ si $x > 0$ ce qui montre que la série de Taylor en $x = 0$ ne permet pas d'obtenir $f(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 1.0.12. En s'inspirant de la fonction plate $e^{-1/x}$ donner l'expression d'une fonction $\alpha(x)$, C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\alpha(x) = 0$ pour $|x| > 1$ et $\alpha(x) = 1$ pour $|x| < 1/2$, avec l'allure suivante :

Ce type de fonction est très utile en mathématiques pour étudier des phénomènes localisés ("partitions de l'unité").

Solution : Considérons $f(x) = e^{-\frac{1}{X}+1}$ puis $y = 1 - x$ et

$$g(y) = 1 - f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}+1} = 1 - e^{1-\frac{1}{1-y}} = 1 - e^{\frac{y}{y-1}}$$

Soit

$$z = F(y) = (f \circ g)(y) = e^{1-\frac{1}{x}} = \exp\left(1 - \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{y}{y-1}\right)}\right)$$

qui a l'allure suivante, plate en $x = 0, 1$ et réalise donc la "première marche". On réalise la deuxième marche de façon similaire.

Une autre solution est de considérer $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ qui est plate en $x = \pm 1$. Ensuite on convolue $f(x)$ avec $g(x) = 0$ si $x < 0$, $g(x) = x$ si $0 < x < 1$, $g(x) = 1$ si $x > 1$, et on obtient une marche.

Remarque en physique une telle fonction plate apparait en physique statistique avec la **loi de Boltzmann :**

$$f(T) = \frac{1}{Z} e^{-E/(kT)}$$

qui donne la probabilité d'occupation d'un micro-état d'énergie E.

Théorème 1.0.13. (*) *(Nelson p.35) . La série de Taylor d'une fonction peut être quelconque : soit $a_0, a_1, \dots a_k, \dots \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite quelconque. Il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction C^∞ en 0 dont la série de Taylor en $x = 0$ est$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (c'est à dire que $f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} a_k$).*

Voir aussi livre de Pham et livre de Ramis.

On verra plus loin avec les inégalités de Cauchy que pour une fonction réelle analytique la suite $|a_k|$ ne peut pas croitre plus que $1/r^k$ avec $r > 0$ qui est le rayon de convergence. Ainsi $a_k = e^k$ par exemple ne peut pas correspondre à une fonction réelle analytique.

Démonstration. Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \alpha\left(|a_k| x^2\right)$$

appelée **Resommation de Borel.** où $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ est définie dans l'exercice (1.0.12) :$\alpha(x) = 0$ pour $|x| > 1$ et $\alpha(x) = 1$ pour $|x| < 1/2$. Montrons que cette série converge. Le k-ième terme est nul sauf si

$$|a_k| x^2 < 1 \Leftrightarrow |a_k| x^k < x^{k-2} \text{ avec } k \geq 2$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x^k\right| \underbrace{\alpha\left(|a_k| x^2\right)}_{\leq 1} \leq |a_0| + |a_1| x + \sum_{k \geq 2} |x|^{k-2}$$

la dernière série est convergente pour $|x| < 1$. La série de départ est donc absolument convergente pour $|x| < 1$. De même on montre que la dérivée k-ième de la série est une série ACV pour $|x| < 1$, donc f est C^∞ pour $|x| < 1$. Comme $\alpha(x) = 1$ dans un voisinage de 0, on déduit que la série de Taylor de f en $x = 0$ est $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. □

Définition 1.0.14. (Taylor p.14) Une fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ est **réelle analytique** en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si il existe $r > 0$ tel que pour tout x tel que $|x - x_0| < r$, $f(x)$ est égal à sa série de Taylor qui est convergente :

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

On peut alors remplacer $x \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{C}$ dans l'expression précédente et cela définit une **extension analytique de** $f(x)$ dans un voisinage complexe de x_0. Le **rayon de convergence** est la plus grande valeur de r possible.

Remarque

- L'ensemble des fonction réelles analytiques sur $\mathbb{R}^n$ est noté : $C^{\omega}(\mathbb{R}^n)$.
- On verra que l'extension analytique est une "extension holomorphe" au Chapitre suivant.

Exemple

La fonction $f(x) = \sin(x)$ est réelle analytique sur $\mathbb{R}$ et possède une extension analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Contre-exemple : La fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

n'est pas réelle analytique en $x = 0$. En effet sa série de Taylor est nulle alors que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Exemple simple de continuation analytique (méromorphe) Considérons l'intégrale

$$I(s) = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt$$

qui est clairement convergente pour $s > 1$, et donne $I(s) = \frac{1}{-s+1}\left[t^{-s+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{s-1}$. Cette dernière expression a une extension analytique unique pour $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ avec un pole en $s = 1$. On dit que c'est une **extension méromorphe** de $I(s)$ alors que l'expression intégrale n'a plus de sens. Par exemple :

$$I(-2) = \underbrace{\text{"} \int_1^{\infty} t^2 dt \text{"}}_{pas\, de\, sens} = -\frac{1}{3}$$

Exercice 1.0.15. (*) Construire une fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ mais qui n'est pas analytique réelle en aucun point $x \in \mathbb{R}$. Aide : après le chapitre sur les séries de Fourier, utiliser la série de Fourier et le fait que pour tout N, C, α, on a pour $x \to \infty$, $e^{-\alpha x} \ll e^{-C \log^2 x} \ll \frac{1}{x^N} = e^{-N \log x}$.

La proposition suivant montre que pour une fonction analytique réelle les coeficients de la série de Taylor ne peuvent pas croite trop vite (et ne sont donc pas quelconque, comme c'est le cas pour une fonction C^{∞} d'après Théorème 1.0.13).

Proposition 1.0.16. "Inégalité de Cauchy". *Si f est une fonction réelle analytique en x_0 de rayon de convergence r alors les termes dans la série de Taylor "ne croissent pas trop vite" pour $k \to \infty$:,*

$$\forall R < r, \qquad \underbrace{\left| \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) R^k \right|}_{terme\, k\, de\, la\, série\, de\, Taylor} < \mathcal{O}(1)$$

Démonstration. (Chabat p.63) voir chapitre fonctions holomorphes @@. □

La proposition suivante montre que pour une fonction analytique réelle, les coefs de la série de Taylor en un point détermine la fonction dans le voisinage de son extension analytique.

Proposition 1.0.17. *(Taylor p.193). Si f est une fonction réelle analytique pour $|x| < r$, et si $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, cad que f est "plate en $x = 0$", alors $f(x) = 0$ pour tout $|x| < r$. Plus généralement Si f est une fonction réelle analytique pour $|x| < r$ alors $f(x)$ est uniquement déterminé par la série $\left(f^{(k)}(0)\right)_{k \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. Soit

$$K := \left\{ x \in]-r, r[, \quad tq\, f^{(k)}(x) = 0, \forall k \geq 0 \right\}$$

Cet ensemble $K \subset]-r, r[$ est fermé (car intersection dénombrable de fermés). Pour tout $x_0 \in K$, $f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = 0$ pour x proche de x_0 donc $f^{(k)}(x) = 0$ et donc K est aussi ouvert. Par conséquent $K =]-r, r[$. Ensuite, si deux fonctions f et g vérifient $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0), \forall k$, alors $h = f - g$ vérifie $h^{(k)}(0) = 0$ donc $h(x) = 0, \forall x \in]-r, r[$ d'après ce qui précède et donc $f = g$. □

Notation : On note $C_0^\infty(\mathbb{R})$l'ensemble des **fonctions à support compact** c'est à dire tel qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $|x| > R$.

Remarque : d'après ci-dessus, si f est réelle analytique sur $\mathbb{R}$ et à support compact alors $f = 0$.

Définition 1.0.18. Si la série de Taylor a un rayon de convergence nul (fonction non réelle analytique), on dit que la série de Taylor est **divergente** et que c'est **une série asymptotique**.

Cf Article de F. Pham et Livre de Ramis @@.

Exemple (Article de F.Pham).

Soit
$$f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$$
Sa série en $x = 0$ est
$$f(x) = x - x^2 2x^3 - 6x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n + \ldots$$
(preuve : utiliser $\int_0^\infty t^n e^{-t/x} dt = \int_0^\infty s^n e^{-s} ds = n!$)

C'est une série divergente. Si S_n désigne la somme des n premiers termes, alors $R_n := |f(x) - S_n|$ diverge mais est minimum pour $n_0 \simeq 1/x$ et $R_{n_0} \simeq e^{-1/x}$ qui est extrèment petit !

Ce style de série divergente apparait en physique (théorie des perturbations, mécanique classique ou quantique). L'exemple précédent montre que même si la série est divergente, il est interessant de la sommer jusqu'à un certain ordre n_0 car cela donne une bonne approximation de la fonction étudiée $f(x)$. Par exemple en Q.E.D., il y a la **constante de structure fine**
$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c 4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{137.04\ldots}$$
et la plupart des résultats physiques sont exprimés par une série en puissances de α (à l'aide de la théorie de perturbation). Ces séries sont divergentes [5], mais il se trouve que les premiers termes sont très conformes aux résultats expérimentaux !

Exercice 1.0.19. Exemple de série asymptotique en physique.

5. En effet il est attendu que les séries de Taylor soient divergentes car $\alpha < 0$ correspond à une théorie où deux électrons s'attirent. Les résultats sont très différents du cas $\alpha > 0$, autrement dit les résultats ne sont pas une fonction réelle analytique en $\alpha = 0$.

(réf : Negel-Orland p.54.)

Il s'agit d'un modèle très simple mais le même phénomène se rencontre très souvent en physique avec la "théorie des perturbations". Considérons la fonction de potentiel

$$V_g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4$$

qui dépend de la "constante de couplage" $g \in \mathbb{R}$ et la "fonction de partition classique"

$$Z(g) := \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-V_g(x)} \tag{1.0.6}$$

D'après l'allure de $V_g(x)$ il est clair que l'intégrale est convergente pour $g \geq 0$et divergente pour $g < 0$. On va montrer :

1. Montrer que la fonction $Z(g)$ définie en (1.0.6) est non analytique en $g = 0$. Aide : Calculer la série asymptotique de $Z(g) = \sum_{n \geq 0} g^n Z_n$ et montrer que la série est divergente. Utiliser l'intégrale Gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}\,(2n-1)!!$$

   où $(2n-1)!! := (2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ appelée **double factorielle**, et la **formule de Stirling**

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

2. Afin d'étudier la série asymptotique, on pose

$$R_n := \left| Z(g) - \sum_{m=0}^{n} g^m Z_m \right|$$

   Montrer que $R_n \leq g^{n+1} |Z_{n+1}|$. Aide : utiliser le reste de la formule de Taylor.

3. On va étudier le module du terme de la série $M(n) := g^n |Z_n|$ (qui est une majoration de R_{n-1}). Montrer que $M(n)$ est minimum autour du terme $n_0 \simeq \frac{1}{4g}$ (grand si $g \ll 1$) et que $M_{min}(g) := M(n_0) \simeq e^{-n_0} \simeq e^{-1/4g}$ (très petit si $g \ll 1$). Commentaires ? Calculer n_0 et $M_{min}(g)$ pour $g = 0.1$ et $g = 0.01$.

@@ Rajouter section sur la resommation de Borel. Voir ReedSimon Vol4, p.44.

Chapitre 2

Séries de Fourier

Joseph Fourier a développé cette théorie à Grenoble en 1807 et la publié dans un article révolutionnaire.

@@ trouver l'article @@.

réf : Taylor [28] p.177.

Définition 2.0.1. Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$, C^{∞} et de période 1 : $f(x+1)=f(x),\forall x$. La **série de Fourier de** f est la suite notée $(\mathcal{F}f)(n)$ ou $\hat{f}(n)$ pour $n\in\mathbb{Z}$, définie par :

$$(\mathcal{F}f)(n):=\hat{f}(n):=\int_{0}^{1}e^{-i2\pi nx}f(x)\,dx$$

Remarques :

- On note $S^{1}:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'espace des nombres où $x\in\mathbb{R}$ est identifié à $x+1$ (et $x+n$). C'est un cercle. Une fonction $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$, vérifiant $f(x+1)=f(x)$ est donc identifiée à une fonction $f:S^{1}\rightarrow\mathbb{C}$ et inversement. On note $f\in C^{\infty}(S^{1})$.
- Si $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$ est une fonction de période $X>0$, on se ramène au cas ci-dessus par changement de variable en posant simplement $f(x):=F(xX)$ qui est de période 1.

Exemples :

- si $n_0\in\mathbb{Z}$ est fixé et $\varphi_{n_0}(x)=e^{i2\pi n_0 x}$ appelé **mode de Fourier** de fréquence n_0. Alors $\hat{\varphi}_{n0}(n)=\delta_{n,n_0}$. On dit parfois que $\hat{f}(n)$ est la composante de Fourier de fréquence n. Remarquer que la composante de fréquence nulle est tout simplement la moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\hat{f}(0)=\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$

- Si $f(x) = \cos(2\pi x) = \frac{1}{2}\left(e^{i2\pi x} + e^{-i2\pi x}\right)$, alors $\hat{f}(1) = \hat{f}(-1) = \frac{1}{2}$ et $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \neq -1, 1$.
- On remarque que si $f(x) \in \mathbb{R}$ (fonction réelle, $\overline{f(x)} = f(x)$) alors $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}, \forall n$, et inversement. En effet

$$\hat{f}(-n) = \int_0^1 e^{i2\pi nx} f(x)\, dx = \overline{\int_0^1 e^{-i2\pi nx} \overline{f(x)} dx} = \overline{\int_0^1 e^{-i2\pi nx} f(x)\, dx} = \overline{\hat{f}(n)}$$

Exercice 2.0.2. Soit la fonction $f(x)$ définie par

$$f(x) = x \text{ si } x \in [0,1[, \qquad f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.0.1}$$

Montrer que sa série de Fourier est

$$\text{si } n \neq 0, \quad \hat{f}(n) = \frac{i}{2\pi n} \qquad \hat{f}(0) = \frac{1}{2}. \tag{2.0.2}$$

Remarquer que $\left|\hat{f}(n)\right|$ décroit comme $1/n$ pour $n \to \infty$. On verra l'interprétation de cela à la Section @@.

Les proposition suivantes montrent que la décroissance des coefficients de Fouriers $\left|\hat{f}(n)\right|$ pour $n \to \pm\infty$ est en relation avec la régularité de la fonction $f(x)$.

Proposition 2.0.3. *Si $f \in C^k(S^1)$ alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{C}{|n|^k}$$

Démonstration. On utilise la même démarche que dans (A.1.1) avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) := & \int_0^1 e^{-i2\pi nx} f(x)\, dx = \left(\frac{i}{2\pi n}\right)^k \int_0^1 \partial_x^k \left(e^{-i2\pi nx}\right) f(x)\, dx \\ = & \left(\frac{-i}{2\pi n}\right)^k \int_0^1 e^{-i2\pi nx} \partial_x^k f(x)\, dx\end{aligned}$$

donc

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \left(\frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^1 \left|\partial_x^k f(x)\right| dx\right) \frac{1}{|n|^k} = \frac{C}{|n|^k}$$

$\square$

Par conséquent si $f(x)$ est C^{∞} alors la série $\hat{f}(n)$ décroit plus vite que toute puissance, c'est une série de l'**espace de Schartz** définit par :

$$s(\mathbb{Z}) := \left\{ u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \forall k, \exists C, \forall n, |u(n)| \leq \frac{C}{|n|^{k}} \right\}$$

Et on retient :

Corollaire 2.0.4. *La transformée de Fourier est une opération linéaire :*

$$\mathcal{F} : C^{\infty}\left(S^{1}\right) \to s(\mathbb{Z})$$

Dans le cas d'une fonction réelle analytique, les coefficients de Fourier décroissent exponentiellement vite :

Théorème 2.0.5. *Si $f \in C^{\omega}(S^{1})$ (fonction réelle analytique) avec un rayon d'analyticité r alors*

$$\forall 0 < y_0 < r, \exists C, \forall n \quad \left|\hat{f}(n)\right| \leq C e^{-y_0 2\pi |n|}$$

Démonstration. (A lire après le chapitre sur les fonctions holomorphes, car nécessite le théorème de Cauchy).

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-i2\pi n x} f(x)\, dx$$

Supposons $n > 0$. Voulant utiliser le théorème de Cauchy, comme $x \to e^{-i2\pi n x} f(x)$ est holomorphe sur la bande $\{(x+iy), -r < y < r\}$, on se donne $0 < y_0 < r$, et on déforme le contour d'intégration en posant $X = x - iy_0 \in \mathbb{C}$ avec $x = 0 \to 1$ et y_0 fixe :

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-i2\pi n (x - iy_0)} f(X)\, dx = e^{-2\pi n y_0} \int_0^1 e^{-i2\pi n x} f(X)\, dx$$

donc

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq e^{-y_0 2\pi n} \left(\int_0^1 |f(X)|\, dx \right)$$

Si $n < 0$ il faut choisir le contour $X = x + iy_0 \in \mathbb{C}$ pour obtenir la décroissance $e^{y_0 2\pi n} = e^{-y_0 2\pi |n|}$. □

Proposition 2.0.6. *Le* ***produit scalaire*** *entre deux fonctions* $f, g \in C^\infty(S^1)$ *et la norme* L^2 *de* f *sont définis par*

$$(f, g) := \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\, dx, \qquad \|f\|_{L^2} := (f, f)^{1/2}$$

Le ***produit scalaire*** *entre deux suites* $u, v \in s(\mathbb{Z})$ *et la norme* l^2 *de* u *sont définis par :*

$$(u, v) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{u(k)} v(k), \qquad \|u\|_{l^2} := (u, u)^{1/2}$$

On note $L^2(S^1)$ *l'espace* $C^\infty(S^1)$ *complété pour la norme* $\|f\|$ *et* $l^2(\mathbb{Z})$ *l'espace* $s(\mathbb{Z})$ *complété pour la norme* $\|u\|$*. Ce sont des* ***espaces de Hilbert****.*

Proposition 2.0.7. *On définit l'****opérateur adjoint*** *de* $\mathcal{F} : C^\infty(S^1) \to s(\mathbb{Z})$*, noté* $\mathcal{F}^* : s(\mathbb{Z}) \to C^\infty(S^1)$ *par :*

$$(\mathcal{F} f, u) = (f, \mathcal{F}^* u), \quad \forall f \in C^\infty\left(S^1\right), \forall u \in s(\mathbb{Z}).$$

Alors

$$(\mathcal{F}^* u)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) e^{i2\pi n x}$$

et on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id_{s(\mathbb{Z})}$$

Démonstration. Pour trouver l'expression de $\mathcal{F}^*$ on écrit pour tout f, u :

$$\begin{aligned}(f, \mathcal{F}^* u) &= (\mathcal{F} f, u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(n)} u(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{i2\pi n x} \overline{f(x)} dx\, u(n) \\ &= \int_0^1 \overline{f(x)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi n x} u(n) \right) dx\end{aligned}$$

et donc $(\mathcal{F}^* u)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi nx} u(n)$. Alors pour tout $u \in s(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\mathcal{F}^* u)(n) &= \int_0^1 e^{-i2\pi nx}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi mx} u(m)\right)dx \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\underbrace{\int_0^1 e^{i2\pi(m-n)x}dx}_{\delta_{n,m}}\right)u(m) = u(n)\end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathrm{Id}_{s(\mathbb{Z})}$. □

La proposition suivante montre que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{C^\infty}$ et ses conséquences, mais c'est plus délicat.

Proposition 2.0.8. *On a aussi $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id_{C^\infty}$ et par conséquent si $f \in C^\infty(S^1)$ on a la* ***formule d'inversion de Fourier***

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi nx}\hat{f}(n)$$

et la ***formule de Parseval*** *:*

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2$$

En résumé, $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to l^2(\mathbb{Z})$ est ***unitaire****.*

Démonstration. (*) Montrons que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{C^\infty}$. Soit $f \in C^\infty(S^1)$. Alors $(\mathcal{F}f)(n) = \int_0^1 e^{-i2\pi nx} f(x)\,dx$, et

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f)(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n)\, e^{i2\pi ny} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^1 e^{i2\pi n(y-x)} f(x)\,dx\right)$$

Le problème à ce stade est qu'il n'est pas possible de entrer le terme somme sous l'intégrale. En effet " $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi n(y-x)}$" n'est pas une somme convergente. Pour cette raison on considère la limite de la somme tronquée :

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f)(y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\le N}\left(\int_0^1 e^{i2\pi n(y-x)} f(x)\,dx\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\int_0^1\left(\underbrace{\sum_{|n|\le N} e^{i2\pi n(y-x)}}_{\delta_N(y-x)}\right) f(x)\,dx\right)$$

Où l'on a noté $\delta_N(x) := \sum_{|n|\leq N} e^{i2\pi nx}$ appelée **noyau de Dirichlet**. C'est une série géométrique et l'on calcule [1]

$$\delta_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(2\pi\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 2N+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est une fonction continue, périodique, voir figure @@. Observons que si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $\delta_N(x) \to 0$ pour $N \to \infty$. Ainsi $\delta_N(y-x)$ est très concentrée sur $x = y$. Par ailleurs $\int_0^1 \delta_N(x) = 1$ (car $\int_0^1 e^{i2\pi nx}dx = 0$ si $n \neq 0$). Donc [2]

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^*\mathcal{F}f)(y) &= \lim_{N\to\infty}\left(\int_0^1 \delta_N(y-x) f(x)\,dx\right) f(y) \lim_{N\to\infty}\left(\int_0^1 \delta_N(y-x)\,dx\right) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

Cela permet de conclure que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{C^\infty}$. Conséquences de $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{C^\infty}$:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \|f\|^2 = (f, \mathcal{F}^*\mathcal{F}f) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}f) = \left(\hat{f}, \hat{f}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2$$

En d'autres termes l'opérateur $\mathcal{F}$ préserve la norme car $\|f\|^2 = \|\mathcal{F}f\|^2$. Et il est aussi inversible d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. On dit que $\mathcal{F}$ est un opérateur unitaire. □

Exercice 2.0.9. Appliquer la formule de Parseval pour la fonction (2.0.1) et déduire que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exemple : "Phénomène de Gibbs" @@

1. On écrit $e^{i2\pi x}\delta_N(x) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} e^{i2\pi nx} = \delta_N(x) - e^{-i2\pi Nx} + e^{i2\pi(N+1)x}$. Donc $\delta_N(x) = \frac{e^{i2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i2\pi\frac{x}{2}} - e^{-i2\pi\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(2\pi\frac{x}{2}\right)}$.

2. La limite $\lim_{N\to\infty}\delta_N$ n'existe pas en tant que fonction, mais en tant que "distribution", et s'appelle le **peigne de Dirac** (voir chapitre sur les distributions).

Chapitre 3

Fonctions holomorphes à une variable

Notations : On note $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $\overline{z} = x - iy$. Alors

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad y = \frac{i}{2}(\overline{z} - z)$$

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert, et une fonction C^∞ : $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que l'on note $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ avec $u, v \in \mathbb{R}$. (x, y) sont des variables indépendantes et on voudrait considérer $(z, \overline{z})$ comme des variables indépendantes. Ce n'est pas le cas, mais on définit en accord avec la loi de composition (1.0.5) la notation :

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \tag{3.0.1}$$

Définition 3.0.1. ([15]p.2) Une fonction C^∞, $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est **analytique** si pour tout $z_0 \in U$, il existe une suite $a_n \in \mathbb{C}$ avec $n \in \mathbb{N}$, t.q. pour tout $z \in D_{z_0}(\varepsilon) := \{z, |z - z_0| < \varepsilon\}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où la série est absolument convergente, uniformément par rapport à $z_0 \in U$.

Définition 3.0.2. Une fonction C^∞, $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est **holomorphe** si en tout point $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x, y) = 0$$

c'est à dire d'après (3.0.1)que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & = 0 \end{cases}$$

appelées **équations de Cauchy-Riemann.**

Remarque : la définition de f holomorphe signifie que $df : T\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. On va voir plus loin, Proposition @@ que ces deux définitions sont équivalentes.

Notations Si $U \subset \mathbb{R}^2$ est un sous ensemble orienté, $\overline{U}$ est sa **fermeture**, $\mathring{U}$ est son **intérieur** et ∂U est son **bord** orienté.

Proposition 3.0.3. *([15]p.2, [10]p.24)* **"Formule intégrale de Cauchy".** *Si $U \subset \mathbb{C}$ est un domaine compact de bord C^1, si $f \in C^\infty(\overline{U})$ et $z_0 \in \mathring{U}$, alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \oint_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_U \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \right) \frac{1}{\pi (z - z_0)} dxdy \tag{3.0.2}$$

Remarque : la première intégrale est une intégrale sur le contour ∂U. $dz = dx + idy$ est une 1-forme sur $\mathbb{R}^2$, voir chapitre IV.

Démonstration. Pour simplifier, on considère $z_0 = 0$. Avec le calcul de dérivée extérieure on a

$$d\left(f \frac{dz}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{z}\right) d\overline{z} \wedge dz = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) d\overline{z} \wedge dz = \frac{2i}{z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) dx \wedge dy$$

De plus, la fonction $z = (x, y) \to \frac{1}{z}$ est localement intégrable [1] en $z = 0$. On va aussi utiliser

1. en effet $\frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$ est localement intégrable malgré la singularité en $r = 0$ car $\iint_{D_R} \frac{1}{r} dxdy = \iint_{D_R} \frac{1}{r} r d\theta dr = \iint_{D_R} d\theta dr = 2\pi R$.

le théorème de Stokes (20.5.4). On a donc

$$\begin{aligned}
\int_U \frac{1}{\pi z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) dx \wedge dy &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U \backslash D(0,\varepsilon)} \frac{1}{\pi z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dx \wedge dy \\
&= \frac{1}{i2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U \backslash D(0,\varepsilon)} d\left(f(z)\frac{dz}{z}\right) \\
&\underbrace{=}_{Stokes} \frac{1}{i2\pi} \oint_{\partial U} f(z)\frac{dz}{z} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{i2\pi} \oint_{\partial D(0,\varepsilon)} f(z)\frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

En coordonnées polaire $z = \varepsilon e^{i\theta}$ on a $\frac{dz}{z} = id\theta$ donc $\frac{1}{i2\pi}\oint_{\partial D(0,\varepsilon)} f(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D(0,\varepsilon)} f(z)\, d\theta \to f(0)$. □

Proposition 3.0.4. ***"formule de Cauchy"*** *Si f est une fonction holomorphe sur $U \subset \mathbb{C}$ alors pour tout $z_0 \in \overset{\circ}{U}$*

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \oint_{\partial U} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0} \tag{3.0.3}$$

et

$$\oint_{\partial U} f(z)\, dz = 0 \tag{3.0.4}$$

Démonstration. Comme f est holomorphe alors $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ et (3.0.2) donne (3.0.3). Si on écrit la formule de Cauchy pour la fonction $F(z) = (z - z_0) f(z)$, on obtient (3.0.4). □

@@ utilisation déformation de contour pour l'intégrale d'une fonction réelle analytique. @@

Proposition 3.0.5. *Si $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f \in C^\infty(\overline{U})$, alors f est analytique si et seulement si f est holomorphe.*

Démonstration. Supposons f holomorphe, cad $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Considérons $z_0 \in \overset{\circ}{U}$, ε petit et $z_1 \in D(z_0, \varepsilon) \subset U$. On utilisera la série convergente pour $|X| < 1$:

$$\frac{1}{1 - X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

On a d'après la formule de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{i2\pi}\oint_{\partial U}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)} = \frac{1}{i2\pi}\oint_{\partial U}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)-(z_1-z_0)} \\ &= \frac{1}{i2\pi}\oint_{\partial U}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)\left(1-\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{i2\pi}\oint_{\partial U}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right)}_{a_n}(z_1-z_0)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n (z_1-z_0)^n \end{aligned}$$

donc f est analytique en z_0 donc sur U.

Inversement si f est analytique en $z_0 \in U$, on a la série convergente :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z_1-z_0)^n$$

on a $\frac{\partial (z_1-z_0)^n}{\partial \overline{z_1}} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, donc f holomorphe. □

3.0.0.1 Première formule des résidus

Si D_r désigne le cercle de rayon r, pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\oint_{D_r}\frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ i2\pi & \text{si } n = 1 \end{cases} \tag{3.0.5}$$

Démonstration. On note en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, donc $dz = id\theta z$. On écrit $\oint$

$$\oint_{D_r}\frac{dz}{z^n} = \oint_{D_r}\frac{id\theta}{z^{n-1}} = \oint_{D_r}\frac{id\theta}{r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ i2\pi & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

□

3.0.0.2 Formule des résidus

(Taylor p.195)
Si

$$f(z) = \frac{u(z)}{(z-a)^k}$$

avec u holomorphe, $u(a) \neq 0$, et $k \geq 1$, on dit que f a un **pôle d'ordre** k en $z = a$.

Alors la formule de Taylor pour u donne

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}u^{(n)}(a)(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}u^{(n)}(a)(z-a)^{n-k}$$

appelée **série de Laurent.** Dans cette série, remarquer qu'il y a des pôles pour $n-k<0 \Leftrightarrow n<k$.

La formule (3.0.5) donne alors (le terme $n-k=-1 \Leftrightarrow n=k-1$)

$$\oint_D f(z)\, dz = \frac{1}{(k-1)!} u^{(k-1)}(a)(i2\pi)$$

appelée **formule des résidus** [2].

3.0.1 Application au calcul d'intégrales. "Méthode des résidus".

La formule de Cauchy et la formule des résidus est très utile pour calculer l'intégrale de fonctions $f(x)$ réelles analytiques.

Par exemple, soit à calculer :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \tag{3.0.6}$$

L'intégrand est la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ appelée **Lorentzienne** qui est une fonction réelle analytique, qui s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, $f : z \to \frac{1}{1+z^2}$ avec un pôle en $z = \pm i$, car $1+z^2 = (z-i)(z+i)$.

Etape 1 : on referme le chemin d'intégration L'astuce est d'écrire :

$$I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$$

et de réfermer l'intervalle $[-R,+R]$ par le demi cercle $\tilde{\gamma}_R := Re^{i\theta}$,$\theta = 0 \to \pi$, pour obtenir le contour fermé $\gamma_R =]-R,+R[\cup \tilde{\gamma}_R$. Sur ce demi cercle l'intégrale est (et car $z = Re^{i\theta}$,$dz = Rid\theta e^{i\theta}$)

$$\tilde{I}_R := \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}}{1+R^2 e^{i2\theta}} d\theta$$

et

$$\left|\tilde{I}_R\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{Rie^{i\theta}}{1+R^2e^{i2\theta}}\right| d\theta \le \frac{R\pi}{R^2-1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$I = \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} + \tilde{I}_R \right) = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz \tag{3.0.7}$$

2. La quantité $\frac{1}{(k-1)!} u^{(k-1)}(a)(i2\pi)$ s'appelle le "résidu" du pôle d'ordre k.

Etape 2 : on cherche les pôles dans le chemin et calcule leur résidu : Or la fonction $z \to f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ a un pôle en $z = i$ inclu dans la courbe γ_R. La fonction est holomorphe en dehors et d'après la formule (3.0.4) on peut déformer le contour d'intégration vers un petit cercle de rayon ε, $C(i,\varepsilon)$ autour de ce pôle $z \simeq i$ sans modifier le résultat de l'intégrale. Pour $z \simeq i$ on a

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \simeq \frac{1}{2i(z-i)}$$

et finalement en faisant le changement de variable $z' = z - i$ et en utilisant (3.0.5) on a

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C(i,\varepsilon)} f(z)\, dz = \oint_{C(i,\varepsilon)} \frac{1}{2i(z-i)} dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{C(0,\varepsilon)} \frac{1}{z'} dz' = \frac{(i2\pi)}{2i} = \pi \end{aligned}$$

On a obtenu $I = \pi$ qui est le "résidu" de la fonction f au pôle $z = i$.

Remarque : on aurait pu également refermer le contour par le demi cercle inférieur $\tilde{\gamma}_R := Re^{i\theta}, \theta = 0 \to -\pi$ dans le sens indirect. Alors le pôle enfermé par le contour est en $z = -i$, on a $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \simeq \frac{1}{-2i(z+i)}$ et on écrit (le signe - est pour changer le sens du parcourt en sens direct)

$$\begin{aligned} I &= -\oint_{C(-i,\varepsilon)} f(z)\, dz = -\oint_{C(i,\varepsilon)} \frac{1}{-2i(z+i)} dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{C(0,\varepsilon)} \frac{1}{z'} dz' = \frac{(i2\pi)}{2i} = \pi \end{aligned}$$

Exercice 3.0.6. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale suivante par "la méthode des résidus".

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx$$

(on verra que c'est la transformée de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$). Montrer que $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}$.

Chapitre 4

Transformée de Fourier

Réf : Taylor p.197.

4.0.1 Espaces de Banach est espace de Hilbert de fonctions

Avant de donner la définition de transformée de Fourier, il est utile de rappeler les normes habituelles sur les espaces de fonctions :

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \overline{\left\{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{L^1} := \int |f|\, dx \right\}}$$

qui signifie que l'on définie la **norme** L^1d'une fonction par $\|f\|_{L^1} := \int |f(x)|\, dx$ où $dx := dx^1 dx^2 \dots dx^n$ est la mesure sur $\mathbb{R}^n$. La barre signifie **fermeture :** l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$ est le **complété** de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour cette norme. C'est donc un espace normé complet, ce que l'on appelle un **espace de Banach**.

De même avec d'autres choix de normes on obtient :

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) := \overline{\left\{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \right\}}$$

pour $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \overline{\left\{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p\, dx \right)^{1/p} \right\}}$$

Ce qui est particulier pour $p = 2$ est que la norme sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ provient d'un produit scalaire Hermitien définit par

$$(f, g)_{L^2} := \int \overline{f}(x)\, g(x)\, dx \qquad (4.0.1)$$

En effet la norme L^2 est : $\|f\|_{L^2}^2 = \int |f|^2\, dx = (f, f)_{L^2}$. Pour ces raisons l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un **espace de Hilbert.**

Exemples

- Soit $f(x) = e^{-x^2}$, alors $f \in L^p(\mathbb{R})$,$\forall p \geq 1$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.
- Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $x \neq 0$. Comme

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

alors $f \notin L^1([1,\infty[)$ mais $f \in L^p([1,\infty[)$ si $p > 1$ et

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &= \left(\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^p dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{-p+1}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^\infty\right)^{1/p} \\ &= \frac{1}{(p-1)^{1/p}} = \exp\left(-\frac{1}{p}\log(p-1)\right) \end{aligned}$$

Remarquer que pour $p \to 1$,

$$\|f\|_{L^p} \to +\infty$$

4.0.2 La transformée de Fourier

Définition 4.0.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit sa **transformée de Fourier,** notée $(\mathcal{F}f)(\xi)$ ou $\hat{f}(\xi)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\xi) : &= \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix.\xi} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(e^{ix.\xi}, f\right) \end{aligned}$$

Remarques :

- dans la dernière ligne on a utilisé la notation : $(f,g) := \int \overline{f}(x)\, g(x)\, dx$ déjà utilisée pour le produit scalaire L^2 en (4.0.1).
- La fonction $f_{\xi_0}(x) = e^{i\xi_0.x}$ appelée **mode de Fourier** n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ donc sa transformée de Fourier $(\mathcal{F}f_{\xi_0})$ n'est pas définie par l'intégrale ci-dessus (qui est divergente). Il faudra la théorie des distributions pour définir $(\mathcal{F}f_{\xi_0})$.
- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}$$

ce qui montre que $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}$ et que la transformée de Fourier est un opérateur :

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{4.0.2}$$

— (*) Le **Lemme de Riemann-Lebesgues** améliore (4.0.2) : si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\left|\hat{f}(\xi)\right| \to 0$ pour $|\xi| \to +\infty$. (preuve : voir [28])

Exemples

Exercice 4.0.2. Soit la fonction Gaussienne de largeur $\Delta x = \sigma$ définit par $f(x) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa transformée de Fourier est aussi une Gaussienne de largeur $\Delta\xi = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \sigma e^{-\frac{1}{(\sqrt{2}/\sigma)^2}\xi^2}$$

La relation $\Delta x \Delta \xi = 2$ s'appelle le **principe d'incertitude**.

Exercice 4.0.3. Soit $f(x) := e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa transformée de Fourier est une Lorentzienne :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$$

Sur $\mathbb{R}$, soit la “fonction tente”

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} \tag{4.0.3}$$

Montrer que

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \tag{4.0.4}$$

Schéma .

Solution : Voir Taylor p201,202. Méthode des résidus, ou intégration par parties, ou utilisant la convolution.

Remarque : dans les deux derniers exemples, la fonction $f(x)$ n'est pas dérivable en certains points, et sa transformée de Fourier décroit comme $\frac{1}{\xi^2}$ pour $\xi \to \infty$. Nous verrons que ces deux aspects sont reliés avec @@.

Exercice 4.0.4. Un **paquet d'onde Gaussien** est $\varphi_{x_0,\xi_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi_{x_0,\xi_0}(x) := e^{i\xi_0.x}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\sigma^2}}$$

avec $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\sigma > 0$. Montrer que sa transformée de Fourier est aussi un paquet d'onde Gaussien :

$$(\mathcal{F}\varphi_{x_0,\xi_0})(\xi) = \sigma^n e^{-ix_0.(\xi-\xi_0)}e^{-\frac{|\xi-\xi_0|^2}{2\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2}}$$

Tracer $|\varphi_{x_0,\xi_0}(x)|^2 = e^{-\frac{|x-x_0|^2}{\sigma^2}}$ et $|(\mathcal{F}\varphi_{x_0,\xi_0})(\xi)|^2 = \sigma^{2n}e^{-\frac{|\xi-\xi_0|^2}{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2}}$.

4.0.2.1 Transformée de Fourier et dérivation ou multiplication

Notation : Par commodité on définit l'opérateur pour $j = 1, \ldots, n$:

$$D_{x^j} := (-i) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

La raison est qu'il est formellement auto-adjoint.

Démonstration. En effet son adjoint $D_{x^j}^*$ est définit par la relation :

$$\left(f, D_{x_j}^* g\right) = \left(D_{x_j} f, g\right), \qquad \forall f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

soit en utilisant l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \left(f, D_{x_j}^* g\right) &= \int \overline{f} \left(D_{x_j}^* g\right) dx = \int \overline{\left(D_{x_j} f\right)} g dx = \int i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^j} g dx \\ &= -\int i \overline{f} \frac{\partial g}{\partial x^j} dx = \left(f, D_{x_j} g\right) \end{aligned}$$

donc $D_{x_j}^* = D_{x_j}$, l'opérateur est formellement **auto-adjoint**. □

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on définit :

$$D_x^\alpha := D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$$

et

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

On note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Proposition 4.0.5. ***"La transformée de Fourier de la dérivée est la multiplication et inversement"*** *: pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a*

$$\forall f, \quad \mathcal{F}\left(D_x^\alpha f\right)(\xi) = \xi^\alpha \left(\mathcal{F} f\right)(\xi) \tag{4.0.5}$$

(de façon abrégée on écrit : $\mathcal{F} D_x^\alpha = \widehat{\xi^\alpha} \mathcal{F}$). De même

$$\forall f, \quad \mathcal{F}\left(x^\alpha f\right)(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \left(\mathcal{F} f\right)(\xi) \tag{4.0.6}$$

soit $\mathcal{F} \widehat{x^\alpha} = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \mathcal{F}$.

Démonstration. On a (avec l'intégration par parties)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(D_x^\alpha f\right)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(e^{ix.\xi}, D_x^\alpha f\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(D_x^\alpha e^{ix.\xi}, f\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\xi^\alpha e^{ix.\xi}, f\right) = \xi^\alpha \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(e^{ix.\xi}, f\right) \\ &= \xi^\alpha \left(\mathcal{F} f\right)(\xi)\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x^\alpha f\right)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(e^{ix.\xi}, x^\alpha f\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(x^\alpha e^{ix.\xi}, f\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left((-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha e^{ix.\xi}, f\right) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(e^{ix.\xi}, f\right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \left(\mathcal{F} f\right)(\xi)\end{aligned}$$

□

Définition 4.0.6. L'espace de Schwartz ou espace des fonctions lisses à décroissance rapide est :

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \forall x, \quad \left| \left(x^\alpha \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \right)(x) \right| < C_{\alpha,\beta} \right\}$$

Remarques :

— penser $\left|\left(\frac{d^\beta f}{dx^\beta}\right)(x)\right| < C_{\alpha,\beta}\frac{1}{|x|^\alpha}$ pour $|x| \to \infty$, cad que toute dérivée $f^{(\beta)}$ (y compris f) décroit plus vite que toute puissance $\frac{1}{|x|^\alpha}$.

— Si $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ alors pour tout α, β,

$$\left(x^\alpha D^\beta f\right) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \tag{4.0.7}$$

Exemples :

— $f(x) = e^{-x^2}$ ou $f(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$ sont dans l'espace de Scwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

— $f(x) = e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car par dérivable en $x = 0$. La lorentzienne $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car ne décroit pas assez vite en $|x| \to \infty$.

Proposition 4.0.7. *Si $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ alors $\mathcal{F} f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ c'est à dire*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Démonstration. Supposons $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $g(\xi) := (\mathcal{F}f)(\xi)$. Alors d'après (4.0.5) et (4.0.6)

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta g = (-1)^{|\beta|} \mathcal{F}\left(D_x^\alpha x^\beta f\right)$$

D'après (4.0.7) on a $D_x^\alpha x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ et d'après (4.0.2) $\mathcal{F}\left(D_x^\alpha x^\beta f\right) \in L^\infty$ donc $\xi^\alpha D_\xi^\beta g < C_{\alpha,\beta}$ ce qui signifie que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Théorème 4.0.8. *“**Théorème de Paley-Wiener**”*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. *$f(x)$ holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ et il existe C, R tels que $\forall x, y, |f(x+iy)| \leq Ce^{R|y|}$*
2. *$(\mathcal{F}f)(\xi) = 0$ pour $|\xi| > R$.*

Démonstration. @@ □

@@ Remarque : on savait que si $f(x)$ est holomorphe alors $\mathcal{F}f$ décroit exponentiellement vite. Ici on rajoute la condition sur la croissance de l'extension analytique, ce qui se traduit par un support compact de la transformée de Fourier. @@

4.0.2.2 Transformée de Fourier inverse

Théorème 4.0.9. *“**Formule d'inversion de Fourier**” ou “**Théorème de Plancherel**”.*
*L'opérateur $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est **unitaire** c'est à dire que $\forall f, g$*

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g) \Leftrightarrow \mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$$

La transformée de Fourier inverse est donc égale à l'adjoint $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ et donnée par

$$\left(\mathcal{F}^{-1}g\right)(x) = (\mathcal{F}^*g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ix.\xi} g(\xi)\, d\xi \tag{4.0.8}$$

Démonstration. (*) (Taylor [28] p.198). On va d'abord obtenir l'expression de $(\mathcal{F}^*g)(x)$. Par définition de l'opérateur adjoint,

$$\begin{aligned}(f, \mathcal{F}^*g) &= (\mathcal{F}f, g) = \int \left(\overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix.\xi} f(x) dx}\right) g(\xi)\, d\xi \\ &= \int \overline{f(x)} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ix.\xi} g(\xi)\, d\xi\right) dx\end{aligned}$$

donc $(\mathcal{F}^* g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ix.\xi} g(\xi)\, d\xi$.

On va maintenant montrer que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \left(\int e^{-iy.\xi} f(y)\, dy \right) d\xi$$

On aimerait inverser l'ordre des intégrales, mais on ne peut pas car $\int e^{i(x-y).\xi} d\xi$ est divergente. L'astuce (qui a déjà été utilisée pour les séries de Fourier et qui sera plus développée avec la théorie des distributions) est de régulariser cette intégrale divergente en écrivant par exemple (on introduit la Gaussienne $e^{-\varepsilon|\xi|^2}$ qui tronque les hautes fréquences $|\xi| \gg 1/\sqrt{\varepsilon}$) :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int e^{ix.\xi} \left(\int e^{-\varepsilon|\xi|^2} e^{-iy.\xi} f(y)\, dy \right) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \left(\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y).\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi}_{\delta_\varepsilon(x-y)} \right) f(y)\, dy\end{aligned}$$

Il apparait la fonction suivante qui est une intégrale Gaussienne (voir (B.1.2)) et que l'on calcule :

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon(x) : &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi \\ &= \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{-n/2}} e^{-\frac{1}{4\varepsilon}|x|^2}\end{aligned}$$

C'est une Gaussienne de largeur très petite $\simeq \sqrt{\varepsilon}$ et d'intégrale (c'est encore une intégrale Gaussienne) :

$$\int \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

Par conséquent $\delta_\varepsilon(x-y)$ est très concentrée en $x \simeq y$ et

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^*\mathcal{F}f)(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \delta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \\ &= f(x) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \delta_\varepsilon(x-y)\, dy = f(x)\end{aligned}$$

On a obtenu que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De la même manière (les expression sont les même) on a $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathrm{Id}$. Par complétion (passage à la limite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$) on déduit que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est unitaire. $\square$

4.0.2.3 Transformée de Fourier et convolution

Définition 4.0.10. Le **produit de convolution** de deux fonctions $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^n$ est la fonction

$$(u * v)(x) = \int u(y)\, v(x-y)\, dy$$

Remarque : Le produit est commutatif :

$$(u * v)(x) = \int u(y)\, v(x-y)\, dy = \int u(x-y)\, v(y)\, dy = (v * u)(x)$$

Proposition 4.0.11. *La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit de fonctions*

$$(\mathcal{F}(u * v)) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}u)(\mathcal{F}v) \tag{4.0.9}$$

Démonstration. Avec un simple changement de variable :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(u * v))(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi.x} \left(\int u(y)\, v(x-y)\, dy \right) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi.(x-y)} e^{-i\xi.y} u(y)\, v(x-y)\, dydx \\
&= (2\pi)^{n/2} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi.y} u(y)\, dy \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi.x} v(x)\, dx \right) \\
&= (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}u)(\xi) (\mathcal{F}v)(\xi)
\end{aligned}$$

□

Exercice 4.0.12. Soit $g(x) = 1$ pour $|x| \le \frac{1}{2}$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que $f = g * g$ est la fonction tente (4.0.3). Calculer $(\mathcal{F}g)(\xi)$ et déduire simplement le résultat (4.0.4) :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2$$

Application au théorème limite central @@ voir Taylor P.202

Soit f une distribution de probabilité de moyenne nulle : $\int f(x)\, dx = 1$ et $\int x f(x)\, dx = 0$.

On calcule la limite faible de $\underbrace{f * f * \ldots * f}_{n}$ pour $n \to \infty$.

Application pour les Equa. différentielles : @@ Déplacer au chap. DIstribution ou EDP. @@

Considérons un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$:

$$P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D_x^\alpha$$

On a la relation suivante pour toutes fonctions $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$P(u * v) = (Pu) * v = u * (Pv)$$

Démonstration. On calcule la transformée de Fourier et on utilise (4.0.5) puis () :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(P(u*v)) &= \mathcal{F}\left(\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D_x^\alpha (u*v)\right) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \mathcal{F}(D_x^\alpha(u*v)) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \xi^\alpha \mathcal{F}(u*v) = (2\pi)^{n/2} \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \xi^\alpha . \mathcal{F}u(\xi) . \mathcal{F}v(\xi)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression il n'y a que des produits commutatif de fonctions de ξ. Ainsi

$$\mathcal{F}((Pu)*v) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(Pu) . \mathcal{F}v = (2\pi)^{n/2} \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha (\xi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi)) . \mathcal{F}v(\xi)$$

donne le même résultat donc $P(u*v) = (Pu)*v$ et de même pour $u*(Pv)$. □

@@ déplacer dans chap distributions@@Ainsi pour résoudre l'équation différentielle inhomogène (f,P sont donnés et on cherche u) :

$$Pu = f$$

il suffit de résoudre au préalable $P\phi = \delta$ pour déduire :

$$u = f * \phi$$

on dit que ϕ est la **solution fondamentale**.

Démonstration. On a $Pu = P(f*\phi) = f*(P\phi) = f*\delta = f$. □

Chapitre 5

Transformée par ondelettes

Définition 5.0.1. Un **paquet d'onde Gaussien** est la fonction

$$\varphi_{x_0,\xi_0}(x) := ae^{i\xi_0 . x}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\sigma^2}}$$

avec $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\sigma > 0$ et la constante

$$a = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\pi\sigma^2)^{n/4}} \tag{5.0.1}$$

Remarque :

— un paquet d'onde Gaussien s'appelle aussi **ondelette de Morlet** ou **état cohérent**

— D'après l'exercice 4.0.4, le paquet d'onde Gaussien φ_{x_0,ξ_0} est localisé en espace en $x \simeq x_0$ et sa transformée de Fourier est localisée en fréquence en $\xi \simeq \xi_0$. Il est donc "localisé" dans l'**espace de phase** au point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$.

— Le choix de la constante a sera justifié dans la proposition 5.0.3.

Définition 5.0.2. La **transformation de Bargmann** d'une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est la fonction $\mathcal{T}u \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$:

$$(\mathcal{T}u)(x_0, \xi_0) := (\varphi_{x_0,\xi_0}, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = a\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_0 y}e^{-\frac{(y-x_0)^2}{2\sigma^2}}u(y)\,dy$$

Remarque :

— La transformation de Bargmann s'appelle aussi **transformation par ondelettes de Morlet.**

— D'après le produit scalaire, et comme φ_{x_0,ξ_0} est localisé au point $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ de l'espace de phase, on interprète $(\mathcal{T}u)(x_0,\xi_0)$ comme étant la valeur de u au point $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ de l'espace de phase. Autrement dit la fonction $(\mathcal{T}u)$ est une représentation de u sur l'espace de phase. Si on ne garde que le module carré (c'est à dire l'intensité), on définit la **distribution de Husimi** de la fonction u par :

$$\mathrm{Hus}_u(x_0,\xi_0) := |(\mathcal{T}u)(x_0,\xi_0)|^2 = |(\varphi_{x_0,\xi_0},u)|^2$$

c'est une fonction positive sur l'espace de phase.

Transformation inverse et relation de fermeture

Proposition 5.0.3. *Si $\mathcal{T}^* : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{T} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. On a*

$$\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T} = Id \text{ sur } C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{5.0.2}$$

Par conséquent $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ est une isométrie c'est à dire

$$\|\mathcal{T}u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\mathcal{T}u(x_0,\xi_0)|^2 dx_0 d\xi_0 = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx$$

*et $\mathcal{P} := \mathcal{T} \circ \mathcal{T}^* : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{R}^n))$ appelé **projecteur de Bargmann**. Voir schéma @@.*

Démonstration. On utilise ici des notions non encore présentées : noyau de Swchartz, distrib de Dirac@@.

Calculons le noyau de Schwartz de l'opérateur $\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T}$. Remarquons que le noyau de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ sont

$$\langle \delta_{x,\xi} | \mathcal{T}\delta_y \rangle = \overline{\varphi_{x,\xi}(y)}, \qquad \langle \delta_{y'} | \mathcal{T}^* \delta_{x,\xi} \rangle = \varphi_{x,\xi}(y')$$

donc utilisant la relation de fermeture sur $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{y'} | (\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T}) \delta_y \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} dx d\xi \langle \delta_{y'} | \mathcal{T}^* \delta_{x,\xi} \rangle \langle \delta_{x,\xi} \mathcal{T} \delta_y \rangle \\ &= \int dx d\xi \langle \delta_{y'} | \mathcal{T}^* \delta_{x,\xi} \rangle \langle \delta_{x,\xi} | \mathcal{T} \delta_y \rangle \\ &= \int dx d\xi \varphi_{x\xi}(y') \overline{\varphi_{x\xi}(y)} \\ &= a^2 \int dx d\xi e^{i\xi(y'-y) - \frac{1}{2\sigma^2}|x-y'|^2 - \frac{1}{2\sigma^2}|x-y|^2} \end{aligned}$$

Or d'après (B.1.2), $\int_{\mathbb{R}^n} d\xi e^{i\xi(y'-y)} = (2\pi)^n \delta(y'-y)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-\frac{1}{\sigma^2}|x|^2} = (\pi\sigma^2)^{n/2}$ (intégrale Gaussienne (B.1.2)). Donc

$$\begin{aligned}\langle \delta_{y'} | (\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T}) \delta_y \rangle &= a^2 (2\pi)^n \delta(y'-y) \int dx e^{-\frac{1}{\sigma^2}|x-y|^2} \\ &= a^2 (2\pi)^n \delta(y'-y) \left(\pi\sigma^2\right)^{n/2} \\ &= \delta(y'-y)\end{aligned}$$

car $a^2 = \frac{1}{(2\pi)^n (\pi\sigma^2)^{n/2}}$. On a montré (5.0.2).

Conséquences : $\|\mathcal{T}u\|^2 = (\mathcal{T}u, \mathcal{T}u) = \left(u, \underbrace{\mathcal{T}^*\mathcal{T}}_{\mathrm{Id}} u\right) = (u,u) = \|u\|^2$. Et soit $\mathcal{P} := \mathcal{T}\mathcal{T}^*$. On a

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{T} \underbrace{\mathcal{T}^*\mathcal{T}}_{\mathrm{Id}} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{P}$$

et

$$\mathcal{P}^* = (\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^* = \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{P}$$

donc d'après () $\mathcal{P}$ est un projecteur orthogonal. Finalement il est clair que $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{R}^n)) = \mathrm{Im}(\mathcal{P})$ sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. □

Proposition 5.0.4. *Le noyau de Schwartz du projecteur $\mathcal{P}$ est appelé **noyau de Bergmann,** donné par :*

$$\mathcal{B}(x', \xi', x, \xi) := \langle \delta_{x',\xi'} | \mathcal{P} \delta_{x,\xi} \rangle = (\varphi_{x',\xi'}, \varphi_{x,\xi})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{\frac{i}{2}(x'\xi - x\xi')} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}\left(|x-x'|^2 + |\xi-\xi'|^2\right)}$$

Voir schéma @@.

Démonstration. Calcul du Noyau de $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}\langle \delta_{x',\xi'} | \mathcal{P} \delta_{x,\xi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \langle \delta_{x',\xi'} | \mathcal{T} \delta_y \rangle \langle \delta_y | \mathcal{T}^* \delta_{x,\xi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \overline{\varphi_{x'\xi'}(y)} \varphi_{x\xi}(y) \\ &= (\varphi_{x',\xi'}, \varphi_{x,\xi})_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

□