GÉOMÉTRIE PSEUDO RIEMANNIENNE ET ELECTROMAGNETISME

OPERATEUR ADJOINT d^+ et LAPLACIEN $\Delta = (d + d^+)^2$

L'opérateur adjoint d^+

① Pour $\alpha, \beta \in C^{\circ}(M; \Lambda^{\circ}(TM))$,

$$\langle \alpha | d^+(d^+\beta) \rangle = \langle d\alpha | d^+\beta \rangle = \langle \underbrace{d(d\alpha)}_{=0} | \beta \rangle$$

$$= 0$$

donc $(d^+)^2 = 0$.

② Soit $\beta = b(x)\,dx$: 1 forme sur $M = \mathbb{R}$,

et $\alpha(x)$: 0 forme ou fonction à support compact

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,dx$$

$$\langle \alpha | d^+\beta \rangle = \langle d\alpha | \beta \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)}\, b(x)\, \underbrace{\langle dx | dx \rangle_g}_{=1}\, dx$$

car métrique Euclidienne et dx base orthonormée, de $T_x^*M = \Lambda^1(T_xM)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)} b(x)\, dx \underset{\text{par parties}}{=} - \int \overline{\alpha(x)} \left(\frac{db}{dx}\right) dx$$

$$= \left\langle \alpha \,\middle|\, -\frac{db}{dx} \right\rangle$$

donc $d^+\beta = -\dfrac{db}{dx}$: fonction ou 0-forme

③ Sur $M = \mathbb{R}^2$, $\beta = \beta_{1,2}(x)\, dx_1 \wedge dx_2$, : 2 forme,

Soit $\alpha = a_1(x)\, dx_1 + a_2(x)\, dx_2$: 1 forme à support compact.

donc $d\alpha = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2$

$$= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

on a $\langle \alpha | d^+\beta \rangle = \langle d\alpha | \beta \rangle$

$$= \int \overline{\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)} \beta_{1,2}(x) \overbrace{\langle dx_1 \wedge dx_2 | dx_1 \wedge dx_2 \rangle}^{= 1 \text{ car b.o.n.}} \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \int \overline{a_2}(x)\left(-\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1}\right) + \overline{a_1}(x)\left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2}\right) \, dx_1 \, dx_2$$

par parties

$$= \int \overline{a_2}(x)\left(-\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1}\right) \underbrace{\langle dx_2 | dx_2 \rangle}_{=1} + \overline{a_1}(x)\left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2}\right) \overbrace{\langle dx_1 | dx_1 \rangle}^{=1} \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int \left\langle \alpha \,\middle|\, \frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2} dx_1 - \frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1} dx_2 \right\rangle dx_1 \, dx_2$$

donc $d^{+}\beta = \dfrac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2} dx_1 - \dfrac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1} dx_2$

④ Sur l'espace Euclidien $M = \mathbb{R}^3$,

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3,$$

- soit $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$: 1 forme

de composantes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$

Soit f : fonction,

$$\langle f \mid d^+ \alpha \rangle \overset{\text{adjoint}}{=} \langle df \mid \alpha \rangle$$

$$= \left\langle \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \,\middle|\, \sum_j \alpha_j dx_j \right\rangle$$

$$\underset{\text{bon}}{=} \sum_i \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\middle|\, \alpha_i \right\rangle$$

$$\underset{\text{par parties}}{=} \sum_i \left\langle f \,\middle|\, -\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle f \,\middle|\, -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \right\rangle$$

$$= \langle f \mid -\operatorname{div} \vec{\alpha} \rangle$$

donc $\boxed{d^+ \alpha = -\operatorname{div} \vec{\alpha}}$

• Soit $\beta = \beta_1\, dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3\, dx_1 \wedge dx_2$

2 forme $\quad = \vec{\beta} \cdot d^2\vec{x}$

Soit $\alpha = \vec{\alpha} \cdot d\vec{x}$

on a vu que $d\alpha = \vec{rot}(\vec{\alpha}) \cdot d^2\vec{x}$ (TD4)

$$\langle \alpha | d^+\beta \rangle \underset{\text{adjoint}}{=} \langle d\alpha | \beta \rangle \underset{\text{TD4}}{=} \langle \vec{rot}(\vec{\alpha})\, d^2\vec{x} \,|\, \vec{\beta}\, d^2\vec{x} \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{rot}(\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}\, d^3x$$

$$= \int \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3}\right)\beta_1 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1}\right)\beta_2 + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right)\beta_3\, d^3x$$

$$\underset{\text{par parties}}{=} \int \alpha_1\left(-\frac{\partial \beta_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \beta_3}{\partial x_1}\right) + \alpha_3\left(-\frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1}\right) d^3x$$

$$= \int \vec{\alpha} \cdot \left(-\vec{rot}\,\vec{\beta}\right) d^3x = \langle \underbrace{\vec{\alpha} \cdot d\vec{x}}_{\alpha} \,|\, -(\vec{rot}\,\vec{\beta})\, d\vec{x} \rangle$$

donc $\boxed{d^+\beta = -\vec{rot}(\vec{\beta}) \cdot d\vec{x}}$

. Soit $\gamma = \gamma_{123}\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$: 3 forme

Soit $\beta = \vec{\beta} \cdot d^2\vec{x}$: 2 forme,

on a

$$\langle \beta \,|\, d^+\gamma \rangle = \langle d\beta \,|\, \gamma \rangle \underset{\underset{\text{TD 4}}{\uparrow}}{=} \langle \operatorname{div} \vec{\beta} \cdot d^3\vec{x} \,|\, \gamma_{123}\, d^3\vec{x} \rangle$$

$$= \int \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_3} \right) \gamma_{123}\ d^3x$$

$$\underset{\text{par parties}}{=} \int \beta_1 \left(-\frac{\partial \gamma_{123}}{\partial x_1} \right) + \beta_2 \left(-\frac{\partial \gamma_{123}}{\partial x_2} \right) + \beta_3 \left(-\frac{\partial \gamma_{123}}{\partial x_3} \right) d^3x$$

$$= \langle \underbrace{\vec{\beta} \cdot d^2\vec{x}}_{\beta} \,|\, -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\gamma_{123})\ d^2\vec{x} \rangle$$

donc $\quad d^+\gamma = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\gamma_{123})\ d^2\vec{x}$

Formule $d^+ = (-1)^p *^{-1} d *$

. Soit (M, g) une variété Riemanienne,

ou Lorentzienne,

(1). Soit $\alpha \in C^\infty(M ; \Lambda^p(TM))$: p-forme,

on a défini $d^+\alpha$ par :

$$\langle \beta \mid d^+\alpha \rangle = \langle d\beta \mid \alpha \rangle$$

, $\forall \beta$ $p-1$ forme

et $*$ par $\gamma \wedge * \alpha = \langle \gamma | \alpha \rangle \mu_g$

avec γ : p-forme

. on a la formule de leibnitz :

$$\underbrace{d(\gamma \wedge * \alpha)}_{=0 \text{ car forme volume}} = (d\gamma) \wedge (* \alpha) + (-1)^p \gamma \wedge (d * \alpha)$$

donc $(d\gamma) \wedge (*\alpha) = -(-1)^p \gamma \wedge (d*\alpha)$

def de $*$

or $\gamma \wedge (* d^+ \alpha) = \langle \gamma | d^+ \alpha \rangle \mu_g$

$$\int \gamma \wedge (* d^+ \alpha) = \int \langle \gamma | d^+ \alpha \rangle \mu_g = \langle \gamma | d^+ \alpha \rangle$$

$$= \langle d\gamma | \alpha \rangle$$

$$= \int \langle d\gamma | \alpha \rangle \mu_g = \int d\gamma \wedge * \alpha$$

cidessus

$$= -(-1)^p \int \gamma \wedge (d * \alpha)$$

vrai pour tout γ,

donc $\quad * d^+ \alpha = -(-1)^p \, d * \alpha$, vrai pour tout α,

donc $\quad * d^+ = -(-1)^p \, d *$

$$\boxed{d^+ = -(-1)^p *^{-1} d *}$$

$\Rightarrow$ Erreur de signe (-1) à trouver ---

2 . Par exemple sur $\mathbb{R}$,

on a vu que $\quad * dx = 1$

donc si $\beta = b(x)\, dx$: 1 forme,

$* \beta = b(x) (* dx) = b(x)$: fonction

$d * \beta = \left(\frac{db}{dx}\right) dx$: 1 forme

$*^{-1} d * \beta = \frac{db}{dx}$: fonction

$(-1)^p *^{-1} d * \beta = - \frac{db}{dx}$

On avait bien $d^+ \beta = - \frac{db}{dx}$

. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $\qquad p=2$,

si $\beta = \beta_{1,2}(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$: 2 forme,

$* \beta = \beta_{1,2} \left(* (dx_1 \wedge dx_2) \right) = \beta_{1,2} . 1$: 0 forme

$d * \beta = \left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2} \right) dx_2$: 1 forme

on avait au TD4, $* dx_1 = dx_2 \qquad * dx_2 = - dx_1$

donc $*^{-1} dx_2 = dx_1$, $\quad *^{-1} dx_1 = - dx_2$

donc $\star^{-1} d \star \beta = -\left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2}\right) dx_1$

$$\underbrace{(-1)^p}_{\substack{\shortparallel \\ 1 \text{ car } p=2}} \star^{-1} d \star \beta = \left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_2}\right) dx_1 - \left(\frac{\partial \beta_{1,2}}{\partial x_1}\right) dx_2$$

$$= d^{+} \beta$$

exercice précédent

Opérateur de Dirac et Laplacien

Soit (M, g) une variété Riemanienne
ou Lorentzienne.

Opérateur de Dirac :

$$D := d + d^+ : C^\infty(M; \Lambda^\cdot(TM)) \circlearrowleft$$

Laplacien: $\Delta = D^2 : C^\infty(M; \Lambda^\cdot(TM)) \circlearrowleft$

1 On a $D^+ = d^+ + d^{++} = d^+ + d = D$, $\Delta^+ = \Delta$

On a d^2 et $(d^+)^2 = 0$ donc

$$\Delta = D^2 = (d + d^+)^2 = \underbrace{d^2}_{=0} + d d^+ + d^+ d + \underbrace{(d^+)^2}_{=0}$$
$$= d d^+ + d^+ d$$

on a $d : C^\infty(M; \Lambda^p(TM)) \longrightarrow C^\infty(M; \Lambda^{p+1}(TM))$

et $d^+ : C^\infty(M; \Lambda^{p+1}(TM)) \longrightarrow C^\infty(M; \Lambda^p(TM))$

donc $\Delta : C^\infty(M; \Lambda^p(TM)) \longrightarrow C^\infty(M; \Lambda^p(TM))$

$d^+ : C^\infty(M; \Lambda^0(TM))$ est nul par convention,

donc $\Delta = d^+ d : C^\infty(M; \Lambda^0(TM)) \circlearrowleft$

(2) Si g est une métrique Euclidienne,

$$\langle \alpha | \Delta \alpha \rangle = \langle \alpha | D^{+} D \alpha \rangle$$
$$= \langle D\alpha | D\alpha \rangle = \| D\alpha \|^{2} \geq 0$$

(3) En coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur M,

On note $dx := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Soient $f, h \in C^{\infty}(M)$ des fonctions.

$$\langle h | \Delta f \rangle = \int h(x) \, (\Delta f)(x) \, \mu_g$$
$$= \int h(x) \, (\Delta f)(x) \sqrt{\det g} \, dx$$

mais aussi

$$\langle h | \Delta f \rangle = \langle h | d^{+} d f \rangle = \langle dh | df \rangle$$
$$= \sum_{jk} \int (g^{-1})_{jk} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \Big(\underbrace{\sqrt{\det g} \, dx}_{\mu_{vol}} \Big)$$

$$\underset{\text{par parties}}{=} \sum_{j,k} \int h(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{-1}_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sqrt{\det g} \right) \right) dx$$

$$\underset{\text{par parties}}{=} \sum_{j,k} \int h(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{-1}_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sqrt{\det g} \right) \right) dx$$

$$= \int h(x) \underbrace{\left[\sum_{j,k} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{-1}_{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \sqrt{\det g} \right) \right) \left(\sqrt{\det g} \right)^{-1} \right]}_{\Delta f} \underbrace{\sqrt{\det g}\, dx}_{\mu_g}$$

Δf par comparaison avec ci-dessus

④ Sur l'espace Euclidien, $g = \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i$,

$g_{i,j} = \delta_{i=j}$

donc $\det g = 1$ et l'expression précédente donne $\Delta f = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

noter le signe "$-$" ici qui contraire à la convention en Analyse et qui permet d'avoir $\Delta \geq 0$ positif.

(5) Sur $\mathbb{R}^2$ Euclidien, en coordonnées polaires, on a vu que la métrique s'écrit

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$$

donc $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, $\det g = r^2$,

$\sqrt{\det g} = r$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} f\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r^{-2} r \frac{\partial}{\partial \theta} f\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

⑥ Sur $\mathbb{R}^3$ Euclidien, en coordonnées sphériques,

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + (r \sin\theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r\sin\theta)^2 \end{pmatrix} \quad \sqrt{\det g} = r^2 \sin\theta$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r\sin\theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r^{-2} r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left((r\sin\theta)^{-2} r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$- \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

⑦ Sur "l'espace temps" $M = \mathbb{R}^4$

avec la métrique plate de Minkowski,

$$g = -dt \otimes dt + \sum_{i=1}^{3} dx_i \otimes dx_i ,$$

$$\text{matrice } g = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \det g = -1$$

$$\sqrt{-\det g} = 1$$

$$g^{-1} = g ,$$

$$\Delta f = -\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\left(-\frac{\partial f}{\partial x_0} \right) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

EQUATIONS de MAXWELL avec les 1-FORMES

(M,g) : variété Lorentzienne (en physique) ou Riemanienne,

$A \in C^\infty(M; \Lambda^1(TM))$: 1 forme "électromagn."

$J \in C^\infty(M; \Lambda^1(TM))$: 1 forme des "charges"

reliés par :

$$J = d^+ d A$$: "équation de Maxwell"

Conséquences immédiates

On pose $F = dA \in C^{\infty}(M; \Lambda^2(TM))$

: 2 forme

① on a $J = d^+ dA \iff J = d^+ F$

on a $dF = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d^2} A = 0$

② on a $d^+ J = \underbrace{d^{+2}}_{=0} dA = 0$ "cofermée"

Pour traduire cet relation en loi de conservation, il faut transformer la 1 forme J qui est "cofermée" en une n-1 forme fermée.

On pose $\tilde{J} := * J$: n-1 forme

opérateur $*$ de Hodge

on a $d\tilde{J} = d * J = (-1) * \underbrace{d^+ J}_{=0} = 0$

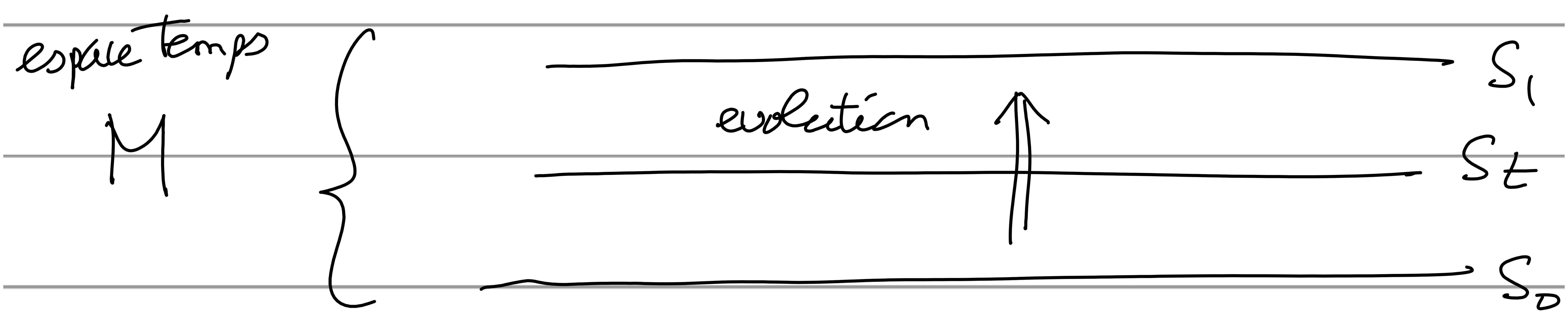
exercice précédent

donc $\tilde{J}$ est une $n-1$ forme fermée, "densité de charges"

et si $\tilde{J}$ s'annulle à l'∞ alors,

$$Q_t = \int_{S_t} \tilde{J}$$ est une <u>quantité conservée</u> (cf TD 4)

$S_t \leftarrow$ hypersurface



Equation de Maxwell sur un espace plat

. Soit M variété de dimension 4,

avec métrique g, en coordonnées locales $(t, x_1 x_2 x_3)$

$$g = -dt \otimes dt + \sum_{i=1}^{3} dx_i \otimes dx_i$$

Pour simplifier les notations mais aussi rendre les calculs plus clairs, on notera la partie spatiale

$N = \mathbb{R}^3_{x_1, x_2, x_3}$: espace Euclidien avec

la métrique $g_N = \sum_{i=1}^{3} dx_i \otimes dx_i$

et on notera avec l'indice N toutes les opérations et tenseurs sur la partie spatiale N.

Par ex, $df = (\partial_t f)\, dt + \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} f)\, dx_i$ s'écrit $df = (\partial_t f)\, dt + d_N f$

on a : $M = \mathbb{R}_t \times N$.

. Soit $\mathcal{A} = V\,dt + A_N$: 1 forme

$$A_N = \sum_{i=1}^{3} A_i\,dx_i = \vec{A} \cdot d\vec{x}$$

. $F = d\mathcal{A} = E_N \wedge dt + B_N$

avec $E_N = \sum_{i=1}^{3} E_i\,dx_i = \vec{E} \cdot d\vec{x}$

$$B_N = B_1\,dx_2 \wedge dx_3 + B_2\,dx_3 \wedge dx_1 + B_3\,dx_1 \wedge dx_2 = \vec{B} \cdot d^2\vec{x}$$

. Soit $J = -\rho\,dt - J_N$: 1 forme

$$J_N = \sum_{i=1}^{3} J_i\,dx_i = \vec{J} \cdot d\vec{x}$$

① $\mathcal{A} = V\,dt + A_N$

$$d\mathcal{A} = d_N V \wedge dt + dt \wedge \frac{\partial A_N}{\partial t} + d_N A_N$$

$$= \left(d_N V - \frac{\partial A_N}{\partial t}\right) \wedge dt \quad + d_N A_N$$

et $\quad F = E_N \wedge dt + B_N$

donc $dA = F$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E_N = d_N V - \dfrac{\partial A_N}{\partial t} \\ B_N = d_N A_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \end{cases}$$

problème de signe !

② Si $\alpha = \alpha_0 \, dt + \alpha_\nu$: 1 forme

on a $\langle \alpha \mid d^+ F \rangle = \langle d\alpha \mid F \rangle$

$$= \left\langle dt \wedge \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} + \underset{\nu}{d}\alpha_0 \wedge dt + d_\nu \alpha_\nu \,\middle|\, E_\nu \wedge dt + B_\nu \right\rangle$$

$$= \left\langle dt \wedge \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} - d_\nu \alpha_0 \right) + d_\nu \alpha_\nu \,\middle|\, -dt \wedge E_\nu + B_\nu \right\rangle$$

$$= \left\langle -d_\nu \alpha_0 + \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} \,\middle|\, -E_\nu \right\rangle + \langle d_\nu \alpha_\nu \mid B_\nu \rangle$$

$$= \langle \alpha_0 \mid d_\nu^+ E_\nu \rangle + \left\langle \alpha_\nu \,\middle|\, \frac{\partial E_\nu}{\partial t} \right\rangle + \langle \alpha_\nu \mid d_\nu^+ B_\nu \rangle$$

et

$$\langle \alpha \mid J \rangle = \langle \alpha_0 \, dt + \alpha_\nu \mid -\rho \, dt - J_\nu \rangle$$

$$= \langle \alpha_0 \mid -\rho \rangle + \langle \alpha_\nu \mid -J_\nu \rangle$$

donc $d^+ F = J$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\rho = d_\nu^+ E_\nu \\ -J_\nu = \dfrac{\partial E_\nu}{\partial t} + d_\nu^+ B_\nu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \operatorname{div} \vec{E} \\ \vec{J} = -\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} \end{cases}$$

③ $F = E_\nu \wedge dt + B_\nu$

$$dF = -\left(d_\nu E_\nu\right) \wedge dt + dt \wedge \left(\partial_t B_\nu\right) + d_\nu B_\nu$$

car 2 forme.

$$= dt \wedge \left(d_\nu E_\nu + \partial_t B_\nu\right) + d_\nu B_\nu$$

donc $dF = 0$

$$\iff \begin{cases} d_\nu E_\nu + \partial_t B_\nu = 0 \\ d_\nu B_\nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{E} + \partial_t \overrightarrow{B} = 0 \\ \mathrm{div}\, \overrightarrow{B} = 0 \end{cases}$$: en composantes

④ $J = -\rho\, dt - J_N$: 1 forme

si f fonction,

$$\langle f \,|\, d^{+} J \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{adjoint}}}{=} \langle df \,|\, J \rangle$$

$$= \langle (\partial_t f)\, dt + d_N f \,|\, -\rho\, dt - J_N \rangle$$

$$= \langle (\partial_t f) \,|\, -\rho \rangle + \langle d_N f \,|\, -J_N \rangle$$

$$= \langle f \,|\, +\partial_t \rho \rangle + \langle f \,|\, -d_N^{+} J_N \rangle$$

$$= \langle f \,|\, +\partial_t \rho - d_N^{+} J_N \rangle$$

donc $d^{+} J = 0$

$\Leftrightarrow \quad \partial_t \rho - d_N^{+} J_N = 0$

$\Leftrightarrow$ en coordonnées : $\partial_t \rho + \mathrm{div}\, \vec{J}_N = 0$

Invariants électromagnétiques

(1) On a posé $F = E_\mathcal{N} \wedge dt + B_\mathcal{N}$: 2 forme

On a la métrique sur TM

$$g = -dt \otimes dt + g_\mathcal{N}$$

$$g_\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{3} dx_i \otimes dx_i$$

qui induit une métrique sur $\Lambda^2(TM)$,

- $$\langle F | F \rangle_g = \langle E_\mathcal{N} \wedge dt | E_\mathcal{N} \wedge dt \rangle_g + \langle B_\mathcal{N} | B_\mathcal{N} \rangle_g$$

$$= \langle E_\mathcal{N} | E_\mathcal{N} \rangle_{g_\mathcal{N}} \underbrace{\langle dt | dt \rangle_g}_{-1} + \langle B_\mathcal{N} | B_\mathcal{N} \rangle_{g_\mathcal{N}}$$

$$= \| B_\mathcal{N} \|^2_{g_\mathcal{N}} - \| E_\mathcal{N} \|^2_{g_\mathcal{N}}$$

- $$F \wedge F = (E_\mathcal{N} \wedge dt + B_\mathcal{N}) \wedge (E_\mathcal{N} \wedge dt + B_\mathcal{N})$$

$$= E_\mathcal{N} \wedge dt \wedge B_\mathcal{N} + B_\mathcal{N} \wedge E_\mathcal{N} \wedge dt \quad , \text{ car } dt \wedge dt = 0$$

$$= 2\, E_\mathcal{N} \wedge B_\mathcal{N} \wedge dt \quad , \text{ car } B_\mathcal{N} : 2 \text{ forme}$$

$$= 2 (\vec{E} \cdot \vec{B})\, \mu_{vol}$$

(2) $K := A \wedge F = A \wedge dA$: 3 forme

$$dK \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leibnitz}}}{=} \underbrace{dA \wedge dA}_{=0} - A \wedge \underset{\substack{\| \\ 0}}{d^2 A} = 0$$

On a vu que une $n-1$ forme fermée donne une loi de conservation, ici $n=4$, K : densité de la quantité conservée.

changement de Jauge : $A' = A + df$

donne $K' = A' \wedge dA' = (A + df) \wedge dA$

$$= K + df \wedge dA$$

$$= K + \underbrace{d(f \wedge dA)}_{\text{exacte}}$$

Formulation variationnelles des équations de Maxwell

Soit (M, g) une variété Lorentzienne

A : 1 forme

J : 1 forme,

$$I_{A,J,g} := -\frac{1}{2}\langle dA \mid dA\rangle_g + \langle A \mid J\rangle_g$$

: "action"

Soit $\alpha \in C_c^\infty(M; \Lambda^1(TM))$: 1 forme à support compact,

on note $A_\tau := A + \tau\alpha$, $\tau \in \mathbb{R}$

: "variation de A"

on calcule

$$\left(\frac{dI_{A_\tau}}{d\tau}\right)_{/\tau=0} = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\langle dA_\tau \mid dA_\tau\rangle + \langle A_\tau \mid J\rangle\right)_{/\tau=0}$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\langle dA + \tau d\alpha \mid dA + \tau d\alpha\rangle + \langle A + \tau\alpha \mid J\rangle\right)_{\tau=0}$$

$$= -\langle d\alpha \mid dA \rangle + \langle \alpha \mid J \rangle$$

$$\overset{\text{adjoint}}{=} \langle \alpha \mid -d^{+}dA + J \rangle$$

Donc

$$\left(\frac{dI_{A\tau}}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0, \ \forall \alpha \iff \boxed{-d^{+}dA + J = 0}$$

"équation de Maxwell"