Formes différentielles

Formes volumes et intégration

(1). Soit $(x_1, .. x_n)$ coordonnées sur une variété M
de dimension n.

- Soit $\mu \in C^\infty(M ; \Lambda^n(TM))$: une n-forme
ou forme volume.

c'est à dire que $\forall x \in M$, $\mu_x \in \Lambda^n(T_x M)$: tenseur antisym.
donc μ_x est caractérisé par
sa composante $\mu_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \mu_{12..n}(x) \in \mathbb{R}$.
par $\mu_x = \mu_{12..n}(x)\, dx_1 \wedge .. \wedge dx_n$.

où $dx_1 \wedge .. \wedge dx_n = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, dx_{\sigma(1)} \otimes .. \otimes dx_{\sigma(n)}$

. On va commencer par montrer comment la composante $\mu_{1\dots n}(x)$ change par changement de coordonnées.

. si on considère d'autres coordonnées $(x_1', x_2' \dots x_n')$,

On a $\mu_x = \mu_{12\dots n}(x) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, dx_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes dx_{\sigma(n)}$

et $dx_{\sigma(j)} = \sum_{k_j=1}^{n} \left(\frac{\partial x_{\sigma(j)}}{\partial x_{k_j}}\right) dx'_{k_j}$.

donc

$$\mu_x = \mu_{1\dots n}(x) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{k_1,\dots k_n} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial x_{\sigma(j)}}{\partial x'_{k_j}} \right) dx'_{k_1} \otimes \dots \otimes dx'_{k_n}$$

$$= \mu_{1\dots n}(x) \sum_{k_1\dots k_n} \underbrace{\left[\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial x_{\sigma(j)}}{\partial x'_{k_j}} \right]}_{=0 \text{ sauf si } (k_1 \dots k_n) \text{ tous différents}} dx'_{k_1} \otimes \dots \otimes dx'_{k_n}$$

c'est à dire sauf si $(k_1, \dots, k_n) = (\sigma'(1), \dots \sigma'(n))$ avec $\sigma' \in S_n$

$$= \mu_{1\dots n}(x) \sum_{\sigma' \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial x_{\sigma(j)}}{\partial x'_{\sigma'(j)}}\, dx'_{\sigma'(1)} \otimes \dots \otimes dx'_{\sigma'(n)}$$

on fait le changement de variable $k = \sigma'(j)$

$$= \mu_{1\cdots n}(x) \sum_{\sigma' \in S_n} \left[\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \frac{\partial x_{\sigma(j)}}{\partial x'_k} \right] dx'_{\sigma'(1)} \otimes \cdots \otimes dx'_{\sigma'(n)}$$

or $j = (\sigma')^{-1}(k)$,

$$\sigma(j) = (\sigma \circ \sigma'^{-1})(k) = \sigma''(k)$$

où on pose $\sigma'' = \sigma \circ (\sigma')^{-1} \iff \sigma = \sigma'' \circ \sigma'$

et le changement $(\sigma, \sigma') \Longrightarrow (\sigma'', \sigma')$

on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma'') \times \varepsilon(\sigma')$: morphisme de groupe

donc

$$= \mu_{1\cdots n}(x) \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \underbrace{\left[\sum_{\sigma'' \in S_n} \varepsilon(\sigma'') \prod_{k=1}^{n} \frac{\partial x_{\sigma''(k)}}{\partial x'_k} \right]}_{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\ :\ \text{"Jacobien"}} dx'_{\sigma'(1)} \otimes \cdots \otimes dx'_{\sigma'(n)}$$

$$= \underbrace{\mu_{1\dots n}(x) \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)}_{\mu'_{1\dots n}(x)} \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma')\, dx'_{\sigma'(1)} \otimes \dots \otimes dx'_{\sigma'(n)}$$

donc $\boxed{\mu'_{1\dots n}(x) = \mu_{1\dots n}(x) \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)}$

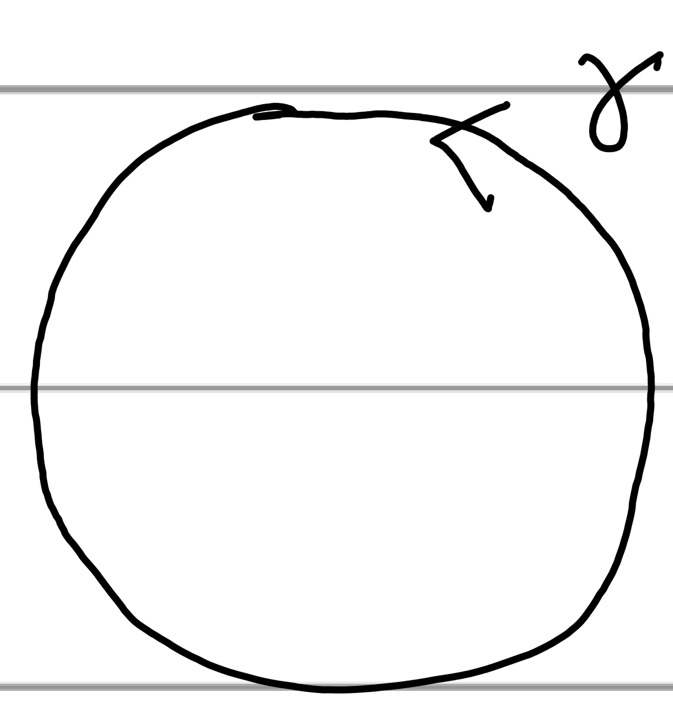
- Ensuite on observe que c'est la même formule qui est dans le changement de variable d'une intégrale multiple, qui préserve l'orientation

$$\int \mu_{1\dots n}(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int \mu_{1\dots n}(x) \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) dx'_1 \dots dx'_n$$

on déduit que $\displaystyle\int_M \mu := \int \mu_{1\dots n}(x)\, dx_1 \dots dx_n$

est indépendant du choix de coordonnées pour une orientation fixée, et un changement d'orientation change le signe du résultat.

2



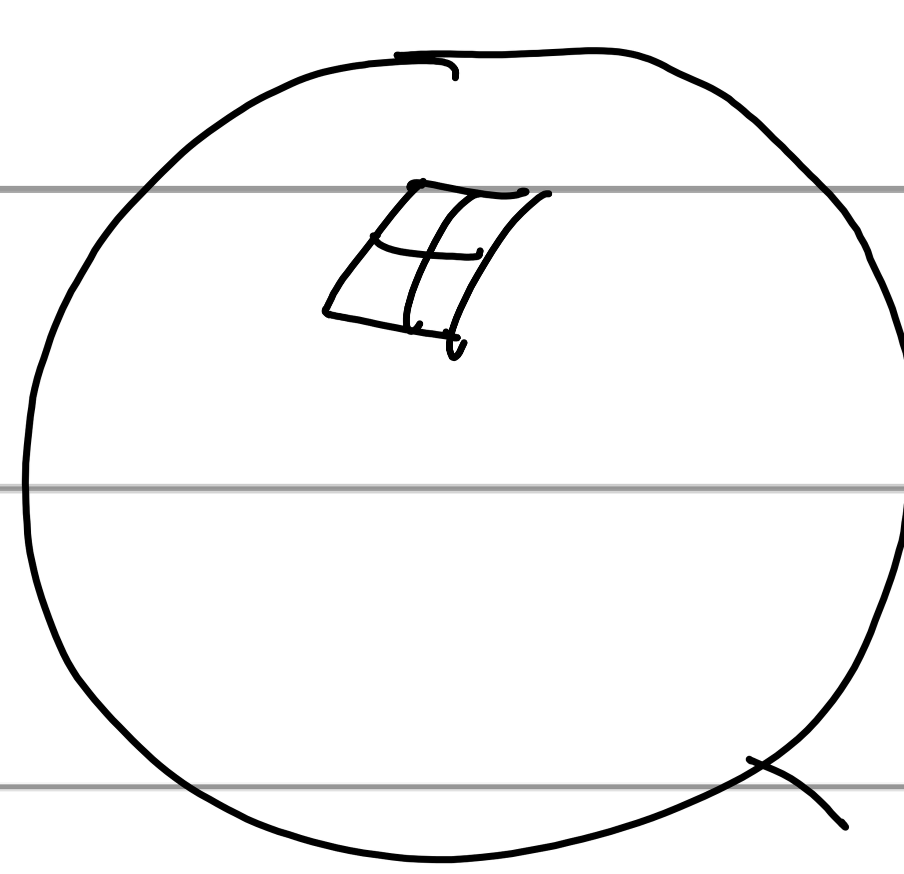
$$\alpha = \frac{1}{r^2}\left(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1\right)$$

On a $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$,

$$\alpha = \frac{1}{r^2}\Big(r\cos\theta\,(r\cos\theta\, d\theta + \cancel{\sin\theta\, dr})$$
$$- r\sin\theta\,(\cancel{\cos\theta\, dr} - r\sin\theta\, d\theta)\Big)$$
$$= d\theta$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

(3)



N

$$\alpha = \frac{1}{r^3}\left(x_1 \left(dx_2 \wedge dx_3\right) + x_2 \left(dx_3 \wedge dx_4\right) + x_3 \left(dx_1 \wedge dx_2\right)\right)$$

$$= \ldots = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$$

$$\int_N \alpha = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi$$

Dérivée extérieure

si $\alpha \in C^\infty(M, \Lambda^p(TM))$: p forme,

en coordonnées locales $(x_1, .., x_n)$,

$$\alpha = \sum_{j_1 < .. < j_p} \alpha_{j_1 .. j_p}(x)\, dx_{j_1} \wedge .. \wedge dx_{j_p}$$

on définie

$$d\alpha := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1 < .. < j_p} \frac{\partial \alpha_{j_1 .. j_p}(x)}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge .. \wedge dx_{j_p}$$

① sur $\mathbb{R}^2$, si $\alpha = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\alpha_1(x)}\, dx_1$

alors $d\alpha = \underbrace{\frac{\partial (x_1 + x_2)}{\partial x_1}}_{=1} \underbrace{dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial (x_1 + x_2)}{\partial x_2}}_{=1} dx_2 \wedge dx_1$

$$= dx_2 \wedge dx_1 = - dx_1 \wedge dx_2$$

. sāt $\beta = x_1 dx_2 + x_2 dx_1$

alas $d\beta = \underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\right)}_{= 1} dx_1 \wedge dx_2 + \underbrace{\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right)}_{= 1} \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{-dx_1 \wedge dx_2}$

$= 0$

(2) Pour des vecteurs $(V_0, V_1, \dots V_p)$, on pose

$$(d\alpha)(V_0, \dots, V_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i V_i\left(\alpha(V_0, \dots \hat{V_i} \dots V_p)\right)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha\left([V_i, V_j], V_0, \dots \hat{V_i} \dots \hat{V_j} \dots V_p\right)$$

On va vérifier que $d\alpha$ ainsi défini est un Tenseur antisymétrique

. <u>cas $p=1$</u> (pour raisons pédagogiques)

$$(d\alpha)(V_0, V_1) = (-1)^0 V_0\left(\alpha(V_1)\right) + (-1)^1 V_1\left(\alpha(V_0)\right)$$
$$+ (-1)^{0+1} \alpha([V_0, V_1])$$
$$= V_0\left(\alpha(V_1)\right) - V_1\left(\alpha(V_0)\right) - \alpha([V_0, V_1])$$

. il est clair que $(d\alpha)(V_1, V_0) = -(d\alpha)(V_0, V_1)$: <u>antisym.</u>

car $[V_1, V_0] = -[V_0, V_1]$.

. Vérifions que $d\alpha$ est un <u>tenseur</u> c'est à dire

que pour deux fonctions f_0, f_1 on a

$$(d\alpha)(f_0 V_0, f_1 V_1) = f_0 f_1 (d\alpha)(V_0, V_1)$$

en effet :

$$(d\alpha)(f_0 V_0, f_1 V_1) = f_0 V_0(\alpha(f_1 V_1)) - f_1 V_1(\alpha(f_0 V_0)) - \alpha([f_0 V_0, f_1 V_1])$$

or $f_0 V_0(\alpha(f_1 V_1)) = f_0 V_0(f_1 \alpha(V_1))$

$$\underset{\text{Leibnitz}}{=} f_0 V_0(f_1)\alpha(V_1) + f_0 f_1 V_0(\alpha(V_1))$$

et de même,

$$-f_1 V_1(\alpha(f_0 V_0)) = -f_1 V_1(f_0)\alpha(V_0) - f_0 f_1 V_1(\alpha(V_0))$$

et

$$\underbrace{[f_0 V_0, f_1 V_1]}_{\text{chp de vecteur}} \underset{\text{fonction}}{g} = f_0 V_0(f_1 V_1(g)) - f_1 V_1(f_0 V_0(g))$$

$$\underset{\text{Leibnitz}}{=} f_0 V_0(f_1) V_1(g) + f_0 f_1 V_0 V_1 g - f_1 V_1(f_0) V_0(g) - f_1 f_0 V_1 V_0 g$$

(2) donc $[f_0 V_0, f_1 V_1] = f_0 V_0(f_1) V_1 - f_1 V_1(f_0) V_0 + f_0 f_1 [V_0, V_1]$

et

$$\alpha([f_0 V_0, f_1 V_1]) = f_0 V_0(f_1)\alpha(V_1) - f_1 V_1(f_0)\alpha(V_0) + f_0 f_1 \alpha([V_0, V_1])$$

au final

$$(d\alpha)(f_0 V_0, f_1 V_1) = f_0\, V_0(\cancel{f_1})\alpha(V_1) + f_0 f_1 V_0(\alpha(V_1))$$
$$- f_1 V_1(f_0)\cancel{\alpha(V_0)} - f_0 f_1 V_1(\alpha(V_0))$$
$$- f_0 V_0(\cancel{f_1})\alpha(V_1) + f_1 V_1(\cancel{f_0})\alpha(V_0)$$
$$- f_0 f_1\, \alpha([V_0, V_1])$$
$$= f_0 f_1 (d\alpha)(V_0, V_1).$$

donc $\underline{d\alpha \text{ est bien un tenseur.}}$

On va écrire l'expression de $d\alpha$ en coordonnées dans le cas $p=1$.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, dx_i \quad : 1 \text{ forme}$$

$$d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)$$
$$- \alpha\left(\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right]}_{=0}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_k(x)) - \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_j(x)$$

on sait $\beta := \sum_{j'} \sum_{k'} \frac{\partial \alpha_{k'}}{\partial x_{j'}} \underbrace{dx_{j'} \wedge dx_{k'}}_{dx_{j'} \otimes dx_{k'} - dx_{k'} \otimes dx_{j'}}$

on a $\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}$, $\forall j, k$

qui coïncide donc $d\alpha = \beta$.

(3) Cas p quelconque

- si $f_0, f_1, \ldots f_p \in C^\infty(M)$ sont des fonctions,

on veut montrer que

$$(d\alpha)(f_0 V_0, \ldots, f_p V_p) = f_0 \cdots f_p \, d\alpha(V_0, \ldots, V_p)$$

cela signifie que $d\alpha$ est un tenseur.

rappel :

$$(d\alpha)(V_0, \ldots, V_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i V_i\left(\alpha(V_0, \ldots \hat{V_i} \ldots V_p)\right)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha\left([V_i, V_j], V_0, \ldots \hat{V_i} \ldots \hat{V_j} \ldots V_p\right)$$

donc $(d\alpha)(f_0 V_0, \ldots, f_p V_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i f_i V_i\left(\alpha(f_0 V_0, \ \hat{V_i} \cdots f_p V_p)\right)$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f_0 \cdots \hat{f_i} \cdots \hat{f_j} \cdots f_p \, \alpha\left([f_i V_i, f_j V_j], V_0, \ldots \hat{V_i} \ldots \hat{V_j} \ldots V_p\right)$$

D'après (2), $[f_i V_i, f_j V_j] = f_i V_i(f_j) V_j - f_j V_j(f_i) V_i$
$+ f_i f_j [V_i, V_j]$

et $\quad f_i V_i\left(f_0 \cdots \hat{f_i} \cdots f_p\, \alpha(V_0, \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)\right)$

$$\underset{\text{Leibnitz}}{=} \sum_{j\neq i} f_i\, V_i(f_j)\, f_0 \cdots \hat{f_i} \cdots f_p\, \alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)$$
$$+ f_0 \cdots f_p\, V_i\left(\alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)\right)$$

donc

$$(d\alpha)(f_0V_0, \dots, f_pV_p) =$$
$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j\neq i} f_i\, V_i(f_j)\, f_0 \cdots \hat{f_i} \cdots f_p\, \alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)$$
$$+ f_0 \cdots f_p\, V_i\left(\alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)\right)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Big(f_i\, V_i(f_j)\, f_0 \cdots \hat{f_i} \cdots \hat{f_j} \cdots f_p\, \alpha(V_j, V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots \hat{V_j} \cdots V_p)$$
$$- f_j\, V_j(f_i)\, f_0 \cdots \hat{f_i} \cdots \hat{f_j} \cdots f_p\, \alpha(V_i, V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots \hat{V_j} \cdots V_p)$$
$$+ f_0 \cdots f_p\, \alpha\left([V_i, V_j], V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots \hat{V_j} \cdots V_p\right)\Big)$$

$j-1$, le déplacer ici

ici

or pour $\alpha(V_j, V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots \hat{V_j} \cdots V_p) = (-1)^{j-1} \alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_j \cdots V_p)$

$$\alpha(V_i, V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots \hat{V_j} \cdots V_p) = (-1)^i\, \alpha(V_0\ V_i \cdots \hat{V_j} \cdots V_p)$$

i ici $\qquad$ ici

donnant

$$(d\alpha)(f_0V_0,\dots,f_pV_p) =$$

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \cancel{\sum_{j\neq i} f_i V_i(f_j)}\, f_0 \cdots \hat{f_i}\, f_p\, \alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)$$

$$+ f_0 \cdots f_p\, V_i\big(\alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)\big)$$

$$+ \sum_{i<j} -(-1)^i \quad V_i\cancel{(f_j)\, f_0 \cdots \hat{f_j}} \cdots f_p \quad \alpha(V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots V_p)$$

$$-(-1)^j \quad V_j\cancel{(f_i)\, f_0 \cdots \hat{f_i}} \cdots f_p \quad \alpha(V_0 \cdots \hat{V_j} \cdots V_p)$$

$$+ f_0 \cdots f_p\, \alpha\big([V_i, V_j], V_0 \cdots \hat{V_i} \cdots \hat{V_j} \cdots V_p\big)\big)$$

$$= f_0 \cdots f_p\, (d\alpha)(V_0,\dots,V_p)$$

donc $d\alpha$ est un <u>tenseur</u>.

• Montrons que $d\alpha$ est antisymétrique. Il y a deux cas à considérer : échange de $0<i<j$ ou de 0 avec i.

--- fini ---

④ Pour montrer que $d \circ d = 0$ on va utiliser l'expression de d en coordonnées.

si $\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \alpha_{j_1 \dots j_p}(x)\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$

on a $d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \frac{\partial \alpha_{j_1 \dots j_p}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$

$$dd\alpha = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha_{j_1 \dots j_p}}{\partial x_k \partial x_i}}_{\text{sym. par } i \leftrightarrow k} \underbrace{dx_k \wedge dx_i}_{\text{antisym par } i \leftrightarrow k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$

donc $dd\alpha = 0$

⑤ Si $\alpha = \sum_I \alpha_I \, dx_I$: p forme

$\beta = \sum_J \beta_J \, dx_J$: q forme

avec la notation $I = (i_1, \dots, i_p)$

$J = (j_1, \dots, j_q)$

$$dx^I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

alors $\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J \, dx_I \wedge dx_J$

$$d(\alpha \wedge \beta) = \sum_{I,J} \sum_i \frac{\partial(\alpha_I \beta_J)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_{I,J} \sum_i \left(\left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x_i}\right) \beta_J + \alpha_I \left(\frac{\partial \beta_J}{\partial x_i}\right) \right) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_{I,J} \sum_i \left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x_i}\right) \beta_J \left(dx_i \wedge dx_I\right) \wedge dx_J + (-1)^p \alpha_I \left(\frac{\partial \beta_J}{\partial x_i}\right) \underset{(p \text{ termes})}{dx_I} \wedge \left(dx_i \wedge dx_J\right)$$

$$= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

⑥ Si $T : C^\infty(M; \Lambda^\bullet(TM))$ ↺

opérateur (1) linéaire vérifiant :

degré de α

(2) $T(\alpha \wedge \beta) = (T\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (T\beta)$

(3) $T^2 = 0$

(4) $Tf = df$

alors si $\alpha = \sum_I \alpha_I \, dx_I$: p forme

avec $I = (i_1, i_2, \dots i_p)$: notation

$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

on a $T\alpha \underset{(1)}{=} \sum_I T(\alpha_I \, dx_I) \underset{(2)}{=} \sum_I \underbrace{T(\alpha_I)}_{\overset{(4)}{=} d\alpha_I} dx_I + \alpha_I T(dx_I)$

or $T(dx_I) = T(Tx_I) \underset{(3)}{=} 0$

donc $T\alpha = \sum_I (d\alpha_I) \, dx_I = d\alpha$

def de α en coordonnées

donc $T = d$

Gradient, rotationel, divergence dans $\mathbb{R}^3$

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et l'opération de dilatation (et inversion si $\lambda < 0$)

$$D_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longmapsto x' = \lambda x \end{cases}$$ de changement de coordonnées.

- La valeur d'une fonction $f(x) \in \mathbb{R}$ ne change pas au point x. En physique on dit que $f(x)$ est un "scalaire".
- Une 1 forme est

$$\alpha = \alpha_1(x)\, dx_1 + \alpha_2(x)\, dx_2 + \alpha_3(x)\, dx_3 \quad : 1 \text{ forme}$$

$$= \frac{\alpha_1(x)}{\lambda} dx_1' + \frac{\alpha_2(x)}{\lambda} dx_2' + \frac{\alpha_3(x)}{\lambda} dx_3'$$

avec 3 composantes $\vec{\alpha}(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$ qui changent en $\vec{\alpha}'(x) = \frac{1}{\lambda} \vec{\alpha}$

En particulier si $\lambda = -1$ (Parité),

alors $\vec{\alpha}' = -\vec{\alpha}$.

En physique, on dit que $\vec{\alpha}$ est un <u>vecteur covariant</u>.

. <u>Une 2 forme</u> est

$$\beta = \beta_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2(x)\, dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \beta_1(x) \frac{1}{\lambda^2}\, dx_2' \wedge dx_3' + \beta_2(x) \frac{1}{\lambda^2}\, dx_3' \wedge dx_1' + \beta_3 \frac{1}{\lambda^2}\, dx_1' \wedge dx_2'$$

avec 3 composantes $\vec{\beta}(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x))$

qui changent en

$$\vec{\beta}'(x) = \frac{1}{\lambda^2} \vec{\beta}(x)$$

En particulier si $\lambda = -1$ (Parité),

alors $\vec{\beta}' = \vec{\beta}$

En physique, on dit que $\vec{\beta}$ est un <u>pseudo vecteur</u>

- Une 3-forme (ou forme volume)

est $\gamma = \gamma_{123}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$$= \gamma_{123}(x)\, \frac{1}{\lambda^3}\, dx_1' \wedge dx_2' \wedge dx_3'$$

donc sa composante $\gamma_{123}(x)$ est changée

en $\gamma'_{123}(x) = \frac{1}{\lambda^3}\, \gamma_{123}(x) \quad \in \mathbb{R}$.

En particulier si $\lambda = -1$ (Parité),

alors $\gamma'_{123} = -\gamma_{123}$

En physique, on dit que γ_{123} est un

<u>pseudo-scalaire</u>

(2) si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction,

alors dans $M = \mathbb{R}^3$,

$$\alpha = df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i$$

avec 3 composantes $\vec{\alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$

notées

$$\boxed{\vec{\alpha} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f \quad \text{en physique}}$$

(3) Si $\alpha \in C^\infty(M; T^*M)$ est une 1 forme

sur $M = \mathbb{R}^3$,

alors $\alpha = \alpha_1(x)\, dx_1 + \alpha_2(x)\, dx_2 + \alpha_3(x)\, dx_3$

avec 3 composantes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

alors $d\alpha = \sum_{j,i} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \leftarrow$ nul si $i = j$

$$= \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1$$
$$+ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2$$
$$+ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3$$

or $dx_j \wedge dx_k = - dx_k \wedge dx_j$;

donc

$$d\alpha = \beta_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3 \, dx_1 \wedge dx_2$$

avec des composantes :

$$\vec{\beta} = \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \\ \beta_2 = \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} \\ \beta_3 = \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

notées $\boxed{\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\alpha}}$ en physique.

4 Si $\beta \in C^\infty(M ; \Lambda^2(TM))$ est une 2 forme

$$\beta = \beta_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3 \, dx_1 \wedge dx_2$$

alors $\gamma = d\beta$ est une 3 forme,

$$= \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial \beta_3}{d x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \gamma_{123} \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

avec la composante

$$\gamma_{123} = \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_3}$$

notée $\boxed{\gamma_{123} = \mathrm{div}\left(\vec{\beta}\right)}$ en physique.

⑤ La formule générale $d \circ d$ implique ici

que $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}} \circ \overrightarrow{\mathrm{grad}} = 0}$ et $\boxed{\mathrm{div} \circ \overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0}$

Forme volume métrique μ_g

. Soit (M,g) variété Riemannienne (ou Lorentzienne) et $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées locales.

. La métrique g s'écrit $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$

On note $g(x) := (g_{ij})_{i,j}$: matrice $n \times n$

symétrique des composants

(1) On peut effectuer un changement linéaire de coordonnées : $y_j := \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} x_i$, $A_{j,i} \in \mathbb{R}$, symétrique

tq dans les coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$,

et au point $y_1 = 0, \dots y_n = 0$ (origine),

la métrique s'écrit : $g(0) = \sum_j dy_j \otimes dy_j$.

càd $(dy_j)_j$ forme une base orthonormée de $T_0^* M$

(Mais seulement en ce point).

On a $g(0) = \sum_j dy_j \otimes dy_j = \sum_{i,j,k} A_{j,i} A_{j,k} \, dx_i \otimes dx_k$

$$= \sum_{i,k} g_{i,k}(0) \, dx_i \otimes dx_k$$

avec $g_{i,k}(0) = \sum_j \underbrace{A_{j,i}}_{= A_{i,j}} A_{j,k} = \sum_j A_{i,j} A_{j,k}$

donc $\quad g = A \times A$: produit de matrices

$$\det(g) = (\det(A))^2$$

La forme volume est donc

$$\mu_{vol} := dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = (\det A)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

cf exercice précédent car $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = A_{j,i}$

$$= \sqrt{\det(g)} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

<u>Rem</u> : pour une métrique <u>Lorentzienne</u>, on se ramène à $g(0) = -dy_0 \otimes dy_0 + \sum_{i=1}^{n} dy_i \otimes dy_i$;

donc à la fin $\mu_{vol} = \sqrt{-\det(g)} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(2) Dans le cas de la métrique Euclidienne,

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i, \quad \text{on a } g_{ij} = \delta_{ij}$$

donc $\det(g) = 1$,

$$\mu_g = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

(3) Pour la sphère Euclidienne $S^2 \subset \mathbb{R}^3$,

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \, d\varphi \otimes d\varphi$$

$$\det(g) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} = \sin^2\theta$$

donc $\mu_g = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$

Application $*$ (étoile) de Hodge

- Soit (M, g) une variété Riemannienne,
- On rappelle que en un point $x \in M$ donné, le produit scalaire sur les p-formes $\Lambda^p(T_x M)$ est définit de la façon suivante :

  on choisit des coordonnées $(x_1, .., x_n)$ telles que $\left(\frac{\partial .}{\partial x_1}, .., \frac{\partial .}{\partial x_n}\right)$ forme une base orthonormée de $T_x M$,

  on stipule que $(dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p})_{i_1 < .. < i_p}$ est une base orthonormée de $\Lambda^p(T_x M)$.

  En particulier $\mu_g(x) := dx_1 \wedge dx_2 .. \wedge dx_n \in \Lambda^n$ est une forme volume de norme 1, appelée forme volume métrique.

• On définit l'opérateur $*$ de Hodge par

$$* : \Lambda^p(T_x M) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(T_x M)$$

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^p(T_x M)$,

(2) $$\underbrace{\underbrace{\alpha}_{p \text{ forme}} \wedge \underbrace{(*\beta)}_{n-p \text{ forme}}}_{n \text{ forme}} := \langle \alpha | \beta \rangle_g \underbrace{\mu_g}_{n \text{ forme}}$$

1 sur $M = \mathbb{R}^2$, $g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$,

en un point $x = (x_1, x_2) \in M$,

On a $\mu_g = dx_1 \wedge dx_2$: forme volume unité sur M.

• <u>Cas $p=0$</u> : rappel $\Lambda^0(T_x M) = \mathrm{Vect}(1)$

on utilise (2) ci-dessus avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$,

$$1 \wedge (*1) = \langle 1 | 1 \rangle_g \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(*1) = dx_1 \wedge dx_2}$$

. <u>cas $p=1$</u>, $\Lambda^1(T_x M) = \mathrm{Vect}(\underbrace{dx_1, dx_2}_{\text{base orthonormée}})$,

dim $\Lambda^1(T_x M) = 2$,

on cherche $*dx_1 \in \Lambda^1(T_x M)$

on écrit $*dx_1 = a\, dx_1 + b\, dx_2$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ inconnues,

. $dx_1 \wedge (*dx_1) = \langle \underbrace{dx_1 | dx_1}_{1} \rangle\, dx_1 \wedge dx_2$

$\iff b\, dx_1 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2 \iff b = 1$

. $dx_2 \wedge (*dx_2) = \langle \underbrace{dx_2 | dx_1}_{=0} \rangle\, dx_1 \wedge dx_2$

$\iff a\, dx_2 \wedge dx_1 = 0 \cdot dx_1 \wedge dx_2 \iff a = 0$

donc $\boxed{*dx_1 = dx_2}$

de même $dx_2 \wedge (*dx_2) = \langle \underbrace{dx_2 | dx_2}_{=1} \rangle\, dx_1 \wedge dx_2$

donnera $\boxed{*dx_2 = -dx_1}$

<u>rem</u>: $*^2 = -\mathrm{Id}$

. <u>Cas $p=2$</u>, $\Lambda^2(T_x M) = \mathrm{Vect}(dx_1 \wedge dx_2)$,

$(dx_1 \wedge dx_2) \wedge (*(dx_1 \wedge dx_2)) = \langle \underbrace{dx_1 \wedge dx_2 | dx_1 \wedge dx_2}_{=1} \rangle\, dx_1 \wedge dx_2$

donne $\boxed{*(dx_1 \wedge dx_2) = 1}$

(2) Soit $M = \mathbb{R}^3$, $\mu_g = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

- cas $p=0$

$$1 \wedge (*1) = \langle 1|1 \rangle \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

donne $\boxed{*1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}$

- cas $p=1$, on écrit

$$*dx_1 = a_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + a_2 \, dx_3 \wedge dx_1 + a_3 \, dx_1 \wedge dx_2$$

et $dx_1 \wedge (*dx_1) = \langle \underbrace{dx_1 | dx_1}_{=1} \rangle \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$\iff a_1 = 1$ et les autres nuls,

donc $\boxed{*dx_1 = dx_2 \wedge dx_3}$

de même, $\boxed{\begin{array}{l} *dx_2 = dx_3 \wedge dx_1 \\ *dx_3 = dx_1 \wedge dx_2 \end{array}}$

• <u>cas $p=2$</u>,

on pose $*(dx_1 \wedge dx_2) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$

$$(dx_1 \wedge dx_2) \wedge (*(dx_1 \wedge dx_2)) = \langle \underbrace{dx_1 \wedge dx_2 \mid dx_1 \wedge dx_2}_{=1} \rangle\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$\Longleftrightarrow$ $a_3 = 1$ et les autres nuls,

donc
$$\boxed{\begin{aligned} *(dx_1 \wedge dx_2) &= dx_3 \\ *(dx_2 \wedge dx_3) &= dx_1 \\ *(dx_3 \wedge dx_1) &= dx_2 \end{aligned}}$$
et de même

Gradient, rotationnel, divergence en sur $\mathbb{R}^3$ avec une métrique, utilisés en physique

. $M = \mathbb{R}^3$, métrique $g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$,

. On souhaite utiliser la dérivée extérieure d, mais toujours se ramener aux fonctions et/ou chp de vecteurs:

<u>Schéma</u> :

$$
\begin{tikzcd}
C^\infty(M; \overset{\Lambda^0(TM)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}) \arrow[r, "d"] \arrow[rrr, bend left, leftrightarrow, "*"] & C^\infty(M; \Lambda^1(TM)) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, leftrightarrow, "*"] \arrow[d, shift left, "\check{g}^{-1}"] & C^\infty(M; \Lambda^2(TM)) \arrow[r, "d"] & C^\infty(M; \Lambda^3(TM)) \\
\text{fonctions} & C^\infty(M; TM) \arrow[u, shift left, "\check{g}"] & &
\end{tikzcd}
$$

$C^\infty(M; TM)$: <u>champ de vecteurs</u>

(1) Soit $f \in C^{\infty}(M ; \underset{\Lambda^0(T_x M)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}})$ fonction,

On pose $\boxed{\operatorname{grad}(f) = \check{g}^{-1}\, df} \in C^{\infty}(M ; TM)$

on a $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$

et $\check{g}^{-1}(dx_i) = \frac{\partial \cdot}{\partial x_i}$ donc

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \cdot}{\partial x_j}}$$

(2) Soit $V \in C^\infty(M;TM)$: champ de vecteur

et $rot(V) = (\check{g}^{-1} * d\check{g})(V) \in C^\infty(M;TM)$

: champ de vecteur.

on écrit $V = \sum_{j=1}^{3} V^j_{(x)} \frac{\partial}{\partial x_j}$

on a $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = dx_j$

donc $\check{g}(V) = V^1(x)\,dx_1 + V^2(x)\,dx_2 + V^3(x)\,dx_3$

dans un exercice précédent, on a calculé :

$$d\check{g}(V) = \left(\frac{\partial V^3}{\partial x_2} - \frac{\partial V^2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial V^1}{\partial x_3} - \frac{\partial V^3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x_1} - \frac{\partial V^1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

dans un exercice précédent, on a calculé

$* (dx_2 \wedge dx_3) = dx_1$ et $\check{g}^{-1}(dx_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}$

etc..

donc $$\boxed{rot(V) = \left(\frac{\partial V^3}{\partial x_2} - \frac{\partial V^2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial V^1}{\partial x_3} - \frac{\partial V^3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x_1} - \frac{\partial V^1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}}$$

③ Si $U \in C^\infty(M; TM)$ champ de vecteur,

$$\mathrm{div}(U) := (* \, d \, * \, \check{g})(U) \in C^\infty(M)$$

: fonction.

$$U = U^1(x)\frac{\partial \cdot}{\partial x_1} + U^2(x)\frac{\partial \cdot}{\partial x_2} + U^3(x)\frac{\partial \cdot}{\partial x_3}$$

$$\check{g}(U) = U^1(x)\,dx_1 + U^2(x)\,dx_2 + U^3(x)\,dx_3$$

$$*\check{g}(U) = U^1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + U^2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + U^3(x)\,dx_1 \wedge dx_2$$

$$d*\check{g}(U) = \left(\frac{\partial U^1}{\partial x_1} + \frac{\partial U^2}{\partial x_2} + \frac{\partial U^3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$\boxed{\mathrm{div}(U) = * \, d*\check{g}(U) = \left(\frac{\partial U^1}{\partial x_1} + \frac{\partial U^2}{\partial x_2} + \frac{\partial U^3}{\partial x_3}\right)}$$

FORMULE de STOKES

Thm : si M : variété de dimension $n+1$,

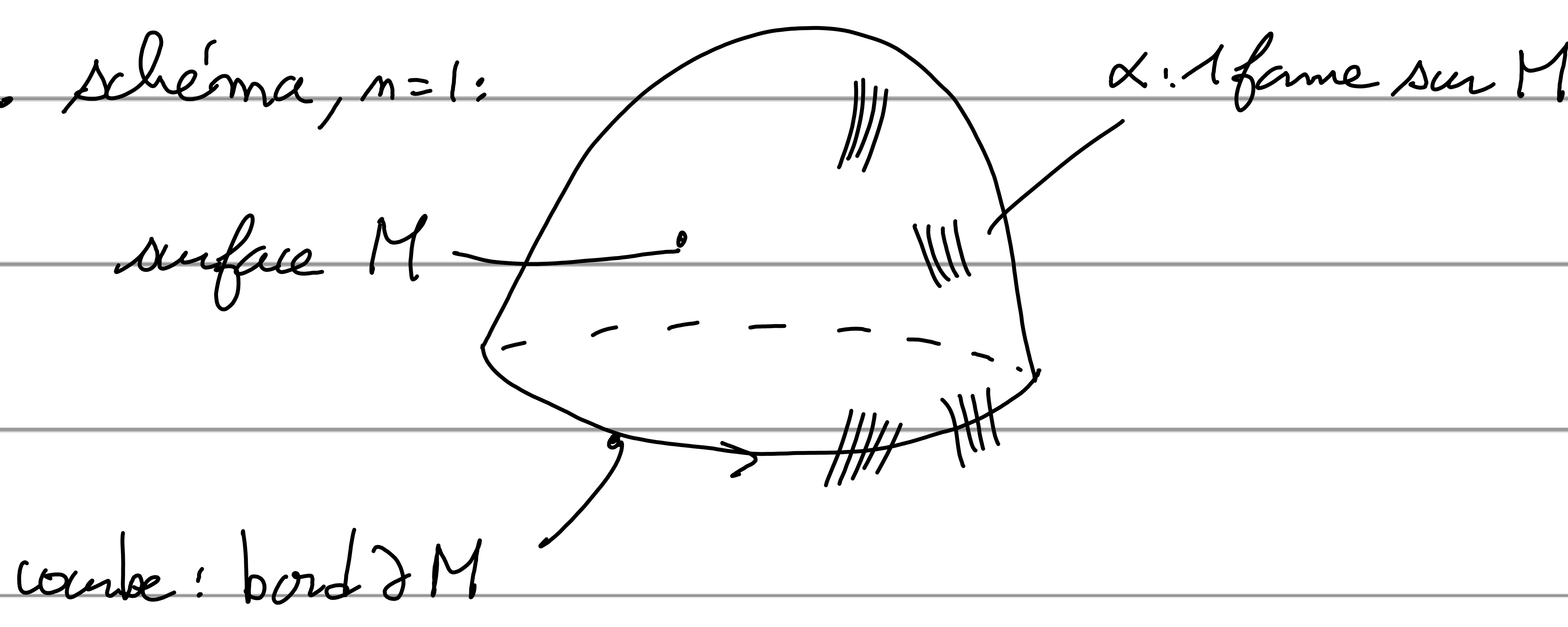
∂M : bord de M de dimension n,

$\alpha \in C^\infty(M; \Lambda^n(M))$: n forme,

on a

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha$$

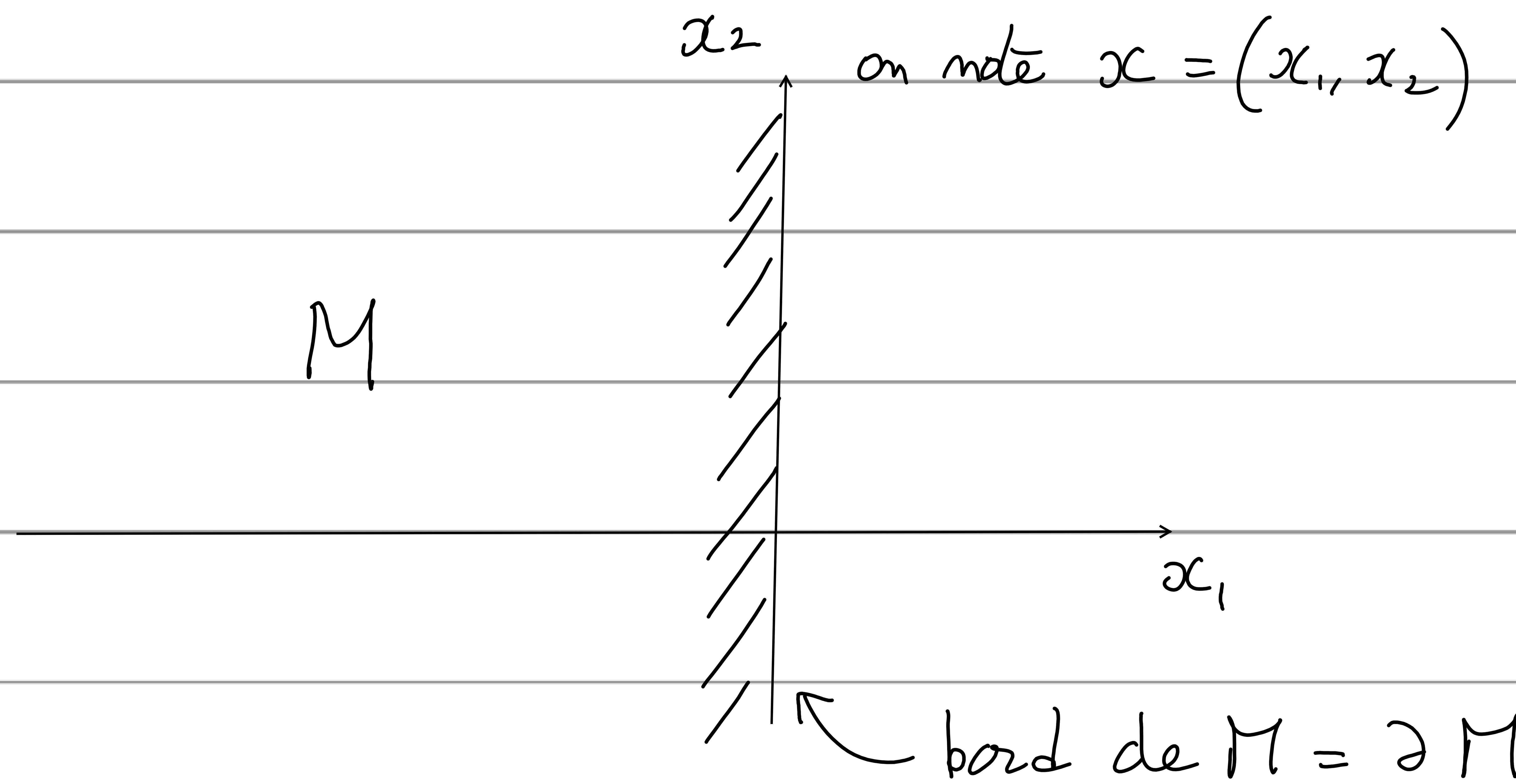
. schéma, $n=1$:



Preuve de la formule de Stokes

(1) $M = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$: c'est à dire $x_1 \leq 0, x_2 \in \mathbb{R}$,

on note $x = (x_1, x_2)$



Soit $\alpha = \alpha_1(x)\, dx_2 + \alpha_2(x)\, dx_1$: 1 forme

à support compact, C^∞,

alors $$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\right) dx_2 \wedge dx_1$$

$$= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

. à x_1 fixé, $\displaystyle\int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\right) dx_2 = \underbrace{\alpha_2(x_1,+\infty)}_{=0} - \underbrace{\alpha_2(x_1,-\infty)}_{=0} = 0$

. à x_2 fixé, $\displaystyle\int_{x_1=-\infty}^{x_1=0} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right) dx_1 = \alpha_1(0,x_2) - \underbrace{\alpha_1(-\infty,x_2)}_{=0}$

$$= \alpha_1(0,x_2)$$

donc $\displaystyle\int_M d\alpha = \int_{x_1=-\infty}^{0} \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2$

$$= \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \alpha_1(0,x_2)\, dx_2 = \int_{\partial M} \alpha$$

② Si $M = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n$

on note $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in M$

une n forme sur M s'écrit :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x)\, dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$\widehat{\ }$ signifie terme manquant

donc $$d\alpha = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right)(x)\, dx_i \wedge dx_0 \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right) dx_i = \alpha_i(\dots, +\infty, \dots) - \alpha_i(\dots, -\infty, \dots) = 0$$

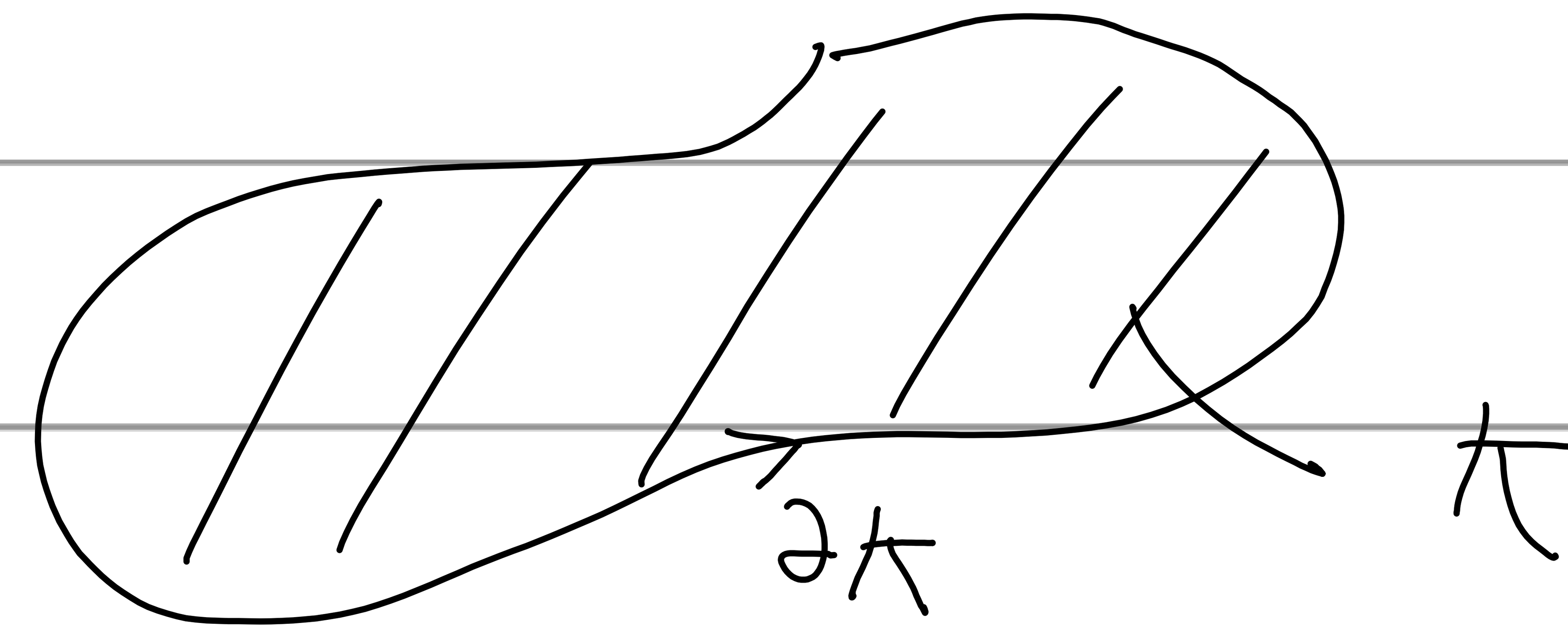
et pour $i = 0$, $$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_0}\right) dx_0 = \alpha_0(0, x_1, \dots x_n)$$

donc
$$\int_M d\alpha = \iint_{x_1 \geq 0, \dots x_n \geq 0} \alpha_0(0, x_1, \dots x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\partial M} \alpha$$

Formule de Stokes utilisée en physique

① sur $\mathbb{R}^2$, 1 forme $\alpha = \alpha_1(x)\,dx_1 + \alpha_2(x)\,dx_2$

sur un domaine $K \subset \mathbb{R}^2$,



La formule de Stokes $\displaystyle\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$

donne $$\int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \oint_{\partial K} \alpha_1\, dx_1 + \alpha_2\, dx_2$$

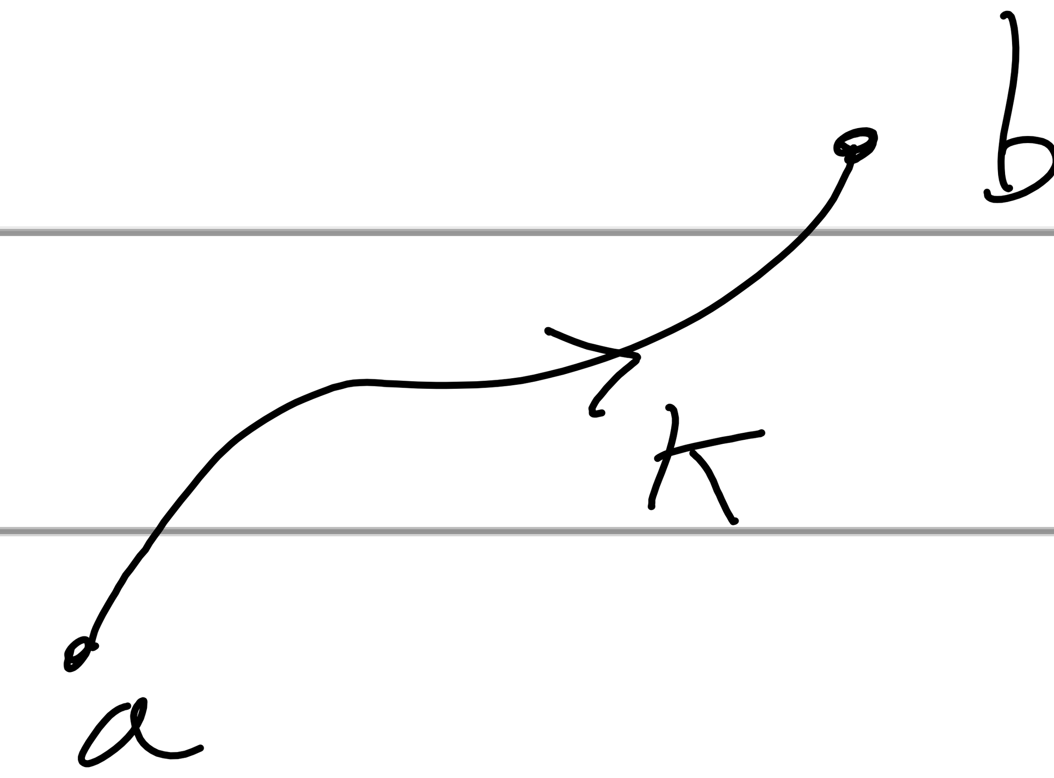
appelée formule de Green-Riemann.

(2) Sur $\mathbb{R}^3$, K : courbe d'extrémitées

$\partial K = \{a, b\}$,

f : fonction (ie 0 forme) sur K,

Alors la formule de Stokes



$$\int_K df = \int_{\partial K} f$$

donne

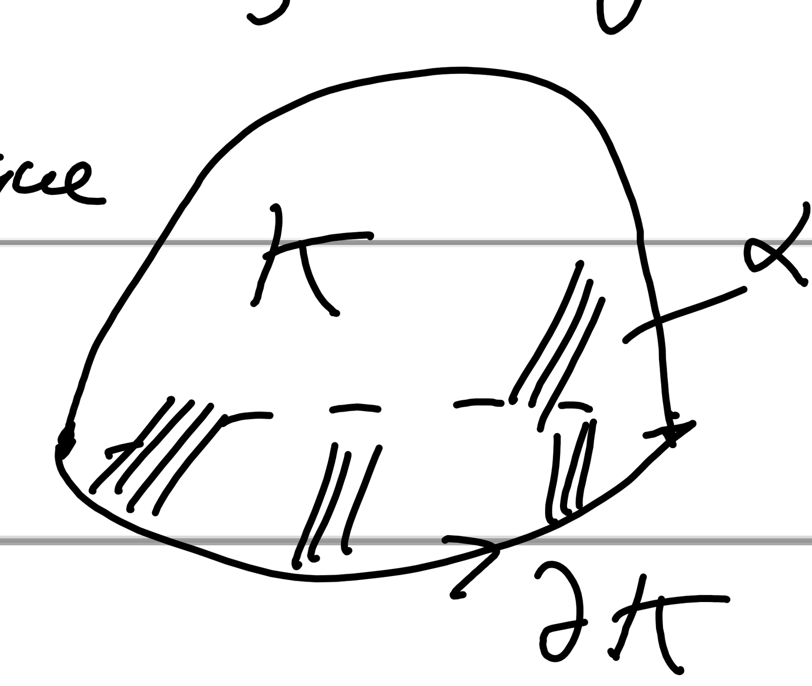
$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = f(b) - f(a)$$

(3) Sur $\mathbb{R}^3$, K : surface orientée

de bord ∂K : courbe orientée

$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$: 1 forme

alors $= \vec{\alpha} \cdot \vec{dl}$: notation de physique



la formule de Stokes

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

donne $d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$

$$+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \equiv \vec{rot}\, \alpha \cdot d^2 s$$

notation de physique

donc

$$\int_{\kappa} \vec{rot}\, \alpha \cdot d^2 s = \oint_{\partial\kappa} \vec{\alpha} \cdot \vec{dl}$$

(4) Sur $\mathbb{R}^3$, κ volume orienté,

$\partial \kappa$: bord de κ (surface),

β : 2 forme sur κ,

$$\beta = \beta_1\, dx_2 \wedge dx_3 + \beta_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \beta_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

$\equiv$ " $\vec{\beta} \cdot d^2 s$ " : en notation de physique

alors $d\beta = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$\equiv \operatorname{div}(\vec{\beta})\, d^3 x$: en physique

La famule de Stokes $\displaystyle\int_{K} d\beta = \int_{\partial K} \beta$

donne $\displaystyle\iiint_{K} \operatorname{div} \vec{\beta}\, d^3x = \iint_{\partial K} \vec{\beta}\, d^2\vec{s}$.

Loi de conservation

- Soit M : variété de dimension n,
- Soit $\alpha \in C^\infty(M ; \Lambda^{n-1}(TM))$

  : $n-1$ forme

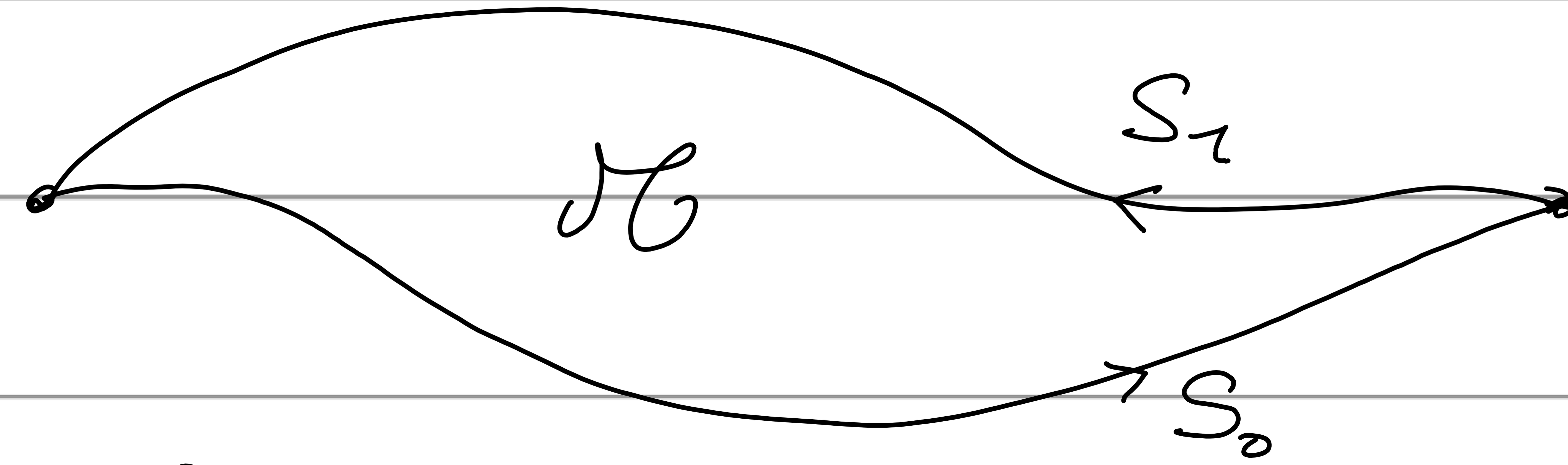
  on suppose $d\alpha = 0$ (fermée),

- Soient $S_0, S_1 \subset M$,

  $\dim S_0 = \dim S_1 = n-1$,

  $S_1 - S_0 = \partial \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset M$ intérieur,

<u>schéma :</u>
ici $n = 2$



on a : $\displaystyle\int_{S_1} \alpha - \int_{S_0} \alpha = \int_{S_1 - S_0} \alpha = \int_{\partial \mathcal{V}} \alpha \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathcal{V}} \underbrace{d\alpha}_{=0 \text{ (hypothèse)}} = 0$