TENSEURS

Tenseurs, applications équivalentes

(1) . Pour un point donné $x \in M$,

. l'espace tangent $T_x M$ est un espace vectoriel.

. L'espace dual $(T_x M)^*$ noté $T_x^* M$

contient les formes linéaires $\xi : \begin{cases} T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \langle \xi | u \rangle \end{cases}$

appelés vecteurs cotangents

. Un élément α de $(T_x M)^{**}$ est une application

linéaire $\alpha : T_x^* M \longrightarrow \mathbb{R}$.

C'est le cas d'un vecteur tangent $u \in T_x M$ car

$$u : \begin{cases} T_x^* M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi \longmapsto \langle \xi | u \rangle \end{cases}$$

et toutes les éléments de $(T_x^* M)^*$ sont ainsi

(2) Soit un tenseur de type (p,q) :

$$T : \begin{cases} T_xM \times \cdots \times T_xM \times T_x^*M \cdots \times T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\underbrace{u_1, \ldots, u_p}_{u}, \underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_q}_{\xi}) \mapsto T(u,\xi) \end{cases}$$

On définit :

$$\check{T} : \begin{cases} T_xM \times \cdots T_xM \longrightarrow (T_xM)^{\otimes q} \\ \underbrace{(u_1, \ldots, u_q)}_{u} \mapsto T(u, \cdot) \\ \qquad := \{ \xi \mapsto T(u,\xi) \} \end{cases}$$

et son dual est

$$\check{T}^* : \begin{cases} T_x^*M \times \cdots \times T_x^*M \longrightarrow (T_x^*M)^{\otimes p} \\ \underbrace{(\xi_1, \ldots, \xi_q)}_{\xi} \mapsto T(\cdot, \xi) \\ \qquad := \{ u \mapsto T(u,\xi) \} \end{cases}$$

③ $g : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$: tenseur type $(2,0)$

donne $\check{g} : \begin{cases} T_xM \longrightarrow T_x^*M \\ u \longmapsto \check{g}(u) = g(u, \cdot) \end{cases}$

$= \{ v \mapsto g(u,v) \}$

et de même pour $\Omega : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$,

④ Une application linéaire $A : \begin{cases} T_xM \longrightarrow T_xM \\ u \longmapsto v = Au \end{cases}$

est équivalente à un tenseur de type $(1,1)$:

$\check{A} : \begin{cases} T_xM \times T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \xi) \longmapsto \check{A}(u,\xi) = \langle \xi | Au \rangle \end{cases}$

Exemples importants de tenseurs

(1) (a) un tenseur métrique $g : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$

est de type $(2,0)$,

(b) une forme symplectique $\Omega : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$

est de type $(2,0)$

(c) un vecteur cotangent $\xi : \begin{cases} T_xM \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \langle \xi | u \rangle \end{cases}$

est un tenseur de type $(1,0)$

(d) un vecteur tangent $u \in T_xM$ peut être

considéré comme une application linéaire

$$u : \begin{cases} T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi \longmapsto \langle \xi | u \rangle \end{cases}$$

cad un élément de $(T_x^*M)^* \equiv T_xM$,

donc tenseur de type $(0,1)$.

(e) une <u>application linéaire</u>

$$A : T_x M \longrightarrow T_x M$$

est équivalente à $\check{A} : T_x M \times T_x^* M \longrightarrow \mathbb{R}$

(cf exo précédent), donc <u>tenseur de type (1,1)</u>

(f) une <u>fonction</u> $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

est en chaque point $x \in M$

un nombre $f(x) \in \mathbb{R}$ fixé.

donc $f : \emptyset$ (ensemble vide) $\longrightarrow \mathbb{R}$

Par convention, on dit que

f est tenseur <u>de type (0,0)</u>.

② En physique,

(a) si $\gamma : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow M \\ t \longmapsto \gamma(t) \end{array} \right.$ est une trajectoire

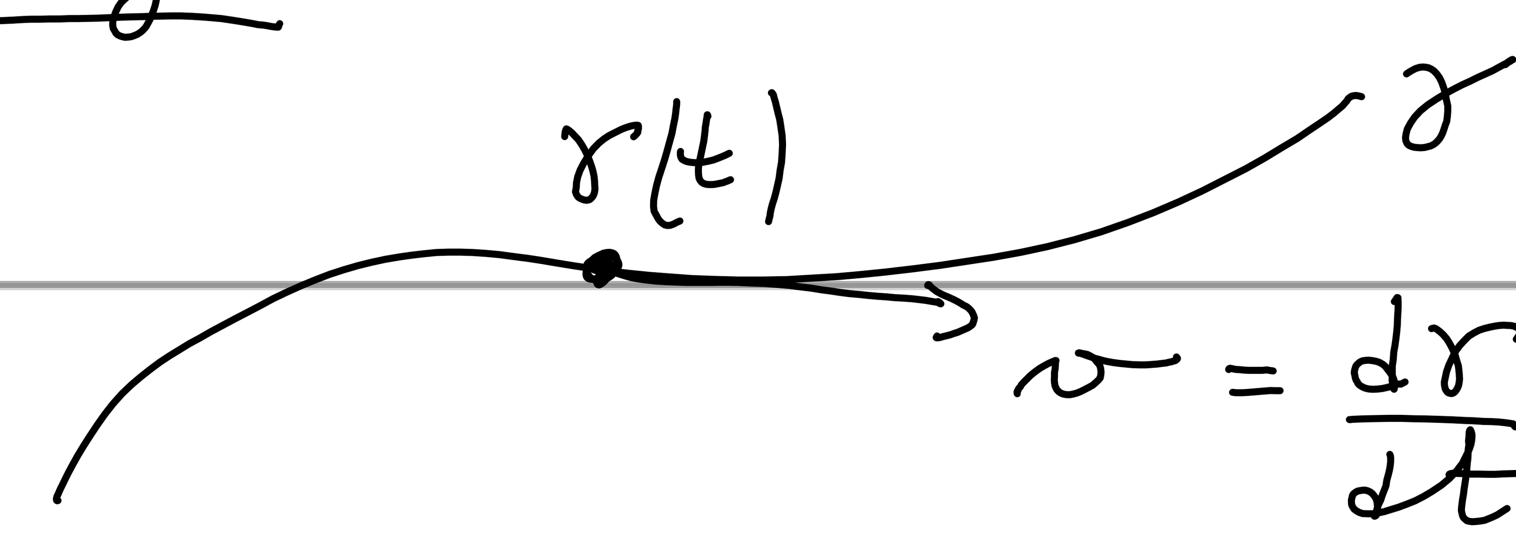
sur une variété M,

<u>la vitesse</u> $\quad v(t) = \text{"}\frac{d\gamma}{dt}\text{"} \in T_{\gamma(t)} M$

est un <u>vecteur tangent</u>.

au point $\gamma(t)$

donc tenseur de type $(0,1)$.



tenseur type $(1,0)$

(b) Si M est l'espace de configuration,

l'impulsion est un <u>vecteur cotangent</u> $p \in T_x M$.

Cela apparait par exemple dans la transformée de Legendre pour définir le Lagrangien à partir du Hamiltonien (voir cours)

$$L(v) = \langle p | v \rangle - H(p)$$

avec $\quad p = \check{g}(v) \in T^* M, \; v \in TM$

(c) L'énergie potentielle $E_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$

est une <u>fonction</u>, (donc tenseur type $(0,0)$)

(d) en mécanique Hamiltonienne, sur T^*M,

si $$H(q,p) = \underbrace{\frac{1}{2m}\|p\|^2}_{\text{énergie cin.}} + U(q)$$

$\hookrightarrow$ énergie pot.

La force est définit comme :

$$F(q) = (\text{grad } U)(q) \in T_q M$$
$$= \check{g}^{-1}(dU)$$

qui est un <u>vecteur tangent</u>, mais il apparaît plus naturel de considérer $dU \in T_q^* M$

qui est un <u>vecteur cotangent</u>,

une 1-forme exacte.

PRODUITS TENSORIEL

Tenseurs de base par rapport à un système de coordonnées

- Soit M une variété de dimension n et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales.
- Soit $x \in M$ un point quelconque.

$p \geq 0$ et $T \in (T_x^* M)^{\otimes p}$ un tenseur de type $(p,0)$.

C'est à dire une application

$$T : \begin{cases} T_x M \times \dots \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_p) \longmapsto T(u_1, \dots, u_p) \end{cases}$$

linéaire par rapport à chaque entrée $u_\alpha \in T_x M$.

α : numéro du vecteur

. Donc T est caractérisée par ses valeurs sur les vecteurs de base $\frac{\partial}{\partial x_j}$ de $T_x M$.

. On pose :

$$T_{i_1 \cdots i_p} := T\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) \in \mathbb{R}$$

avec des indices $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ quelconques

on pose

$$T' := \sum_{i_1, \cdots i_p} T_{i_1 \cdots i_p} \, dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_p}$$

on veut montrer que $T' = T$.

. Si $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{n° du vecteur}}}{u_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n° de composante}}}{i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_x M$, vecteur,

on a $dx_{i_j}(u_\alpha) = u_{\alpha, i_j}$

donc $T'(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{i_1 \cdots i_p} T_{i_1 \cdots i_p} u_{1, i_1} \cdots u_{p, i_p}$

et

$$\begin{aligned} T(u_1, \ldots, u_p) &= T\left(\sum_{i_1} u_{1, i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \sum_{i_p} u_{p, i_p} \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) \\ &= \sum_{i_1 \cdots i_p} u_{1, i_1} \cdots u_{p, i_p} \, T\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) = T'(u_1, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

donc $T = T'$.

(2) de même que pour la question 1

(3) Soit $\alpha \in \Lambda^p(T_x M)$ un tenseur antisymétrique de type $(p,0)$.

Il est définit par ses valeur sur les vecteurs de base $\alpha\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial \cdot}{\partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial \cdot}{\partial x_{i_p}}\right) = \alpha_{i_1 \dots i_p}$

et comme il est antisymétrique, il suffit de connaître ces valeurs pour $i_1 < i_2 < \dots < i_p$

(en effet si il y a une répétition le résultat est nul

car $\alpha(\dots, u, \dots, u, \dots) = -\alpha(\dots, u, \dots, u, \dots)$)

Posons $\alpha' = \sum_{0 < i_1 \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

qui est un tenseur antisymétrique.

On a $\alpha'\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\right) = \alpha_{j_1 \dots j_p} = \alpha\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial \cdot}{\partial x_{j_p}}\right)$

donc $\alpha' = \alpha$.

$\dim \Lambda^p(T_x M) = \binom{n}{p}$.

Contraction d'un tenseur, Trace partielle

Rappel

si $A : T_xM \longrightarrow T_xM$ est une application linéaire

alors en coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} A_i^j \, dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$$

composantes ou "éléments de matrice"

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_i^i$$ est indép^t des coordonnées

① si $T : T_xM \times T_xM \times T_x^*M \longrightarrow \mathbb{R}$

tenseur de type $(2,1)$, $T \in \left(T_x^*M^{\otimes 2} \otimes T_xM\right)$

alors en coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$T = \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{n} T_{i_1, i_2}^{i_3} \quad dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_3}}$$

composantes

$$\mathrm{Tr}_{2,3}(T) = \left(\sum_{i=1}^{n} T_{i_1, i}^{i} \right) dx_{i_1} \quad \in T_x^*M$$

② si T est de type (p, q)

et si $p \geqslant q$, alors on peut contracter T

et obtenir

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i_1 \cdots i_q} \left(\sum_{j_1 \cdots j_p} T^{j_1 \cdots j_q}_{j_1 \cdots j_q i_1 \cdots i_{p-q}} \right) dx^{i_1} \otimes \cdots dx^{i_{p-q}}$$