FORME SYMPLECTIQUE CANONIQUE Ω sur T^*M

Application linéaire associée $\check{\Omega}$

- M variété, avec coordonnées locales $(x_1, x_2, \dots x_n)$.
- vecteur cotangent : $\xi = \xi_1 \, dx_1 \dots + \xi_n \, dx_n \in T_x^*M$,

  donc $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ sont des coordonnées sur T^*M
- Un vecteur tangent $X \in TT^*M$, s'écrit

$$X = X_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} + X_{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \dots + X_{\xi_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

. On définit $\Omega : TT^*M \times TT^*M \longrightarrow \mathbb{R}$

par $\Omega(X,Y) := \sum_{j=1}^{n} X_{x_j} Y_{\xi_j} - X_{\xi_j} Y_{x_j}$

c'est à dire $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx_j$

$= \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j$

① On a $\Omega(Y,X) = \sum_{j=1}^{n} Y_{x_j} X_{\xi_j} - Y_{\xi_j} X_{x_j}$

$= -\Omega(X,Y)$,

c'est à dire que Ω est "antisymétrique".

. On définit $\check{\Omega} : TT^*M \longrightarrow T^*T^*M$

par $\check{\Omega}(X) := \Omega(X,\cdot)$.

. Si $A : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, l'application duale $A^* : F^* \longrightarrow E^*$ est définie

par $\forall u \in F^*, v \in E$, $\langle v | A^* u \rangle_{E \times E^*} = \langle Av | u \rangle_{F \times F^*}$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle_{E \times E^*}$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle_{F \times F^*}$ désignent l'appariement par dualité.

• Ici $\check{\Omega}^{*} : (T^{*}T^{*}M)^{*} = TT^{*}M \longrightarrow (TT^{*}M)^{*} = T^{*}T^{*}M$

défini par : $\forall X, Y \in TT^{*}M$,

$$\langle Y | \check{\Omega}^{*} X \rangle = \langle \check{\Omega} Y | X \rangle = \check{\Omega}(Y, X)$$

$$= -\Omega(X, Y) = -\langle \check{\Omega} X | Y \rangle$$

$$= -\langle Y | \check{\Omega} X \rangle,$$

donc $\check{\Omega}^{*} = -\check{\Omega}$.

• on a $\check{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = d\xi_j$, $\check{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = -dx_j$.

donc $\check{\Omega}$ est représentée,

dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)_j$ de $TT^{*}M$

et la base duale $(dx_j ; d\xi_j)_j$ de $T^{*}T^{*}M$,

par la matrice

$$\check{\Omega} \equiv \begin{array}{c} \\ dx_j \\ d\xi_j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial \xi_j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Le déterminant de cette matrice est 1,
Elle est donc inversible, ce qui montre $\check{\Omega}$
est inversible.

En fait directement, on a :

$$\check{\Omega}^{-1}(dx_j) = -\frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad \check{\Omega}^{-1}(d\xi_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

(2) Si $(x_1', \dots, x_n')$ sont d'autres coordonnées sur M, et si on définit, utilisant la m̄ expression,

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, dx_j = \sum \xi_j' \, dx_j'$$

nouvelles coordonnées

$$\Omega := \sum_{j=1}^{n} dx_j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx_j.$$

$$\Omega' := \sum_{j=1}^{n} dx_j' \otimes d\xi_j' - d\xi_j' \otimes dx_j'.$$

il faut montrer que : $\boxed{\Omega' = \Omega}$.

On écrit $dx'_j = \sum_k \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\right) dx_k$

$$\xi = \sum_j \xi'_j dx'_j = \sum_{j,k} \xi'_j \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\right) dx_k$$
$$= \sum_k \xi_k \, dx_k$$

donc $\quad \xi_k = \sum_j \xi'_j \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\right)$: chg^t de coord. d'un vect. cotangent

donc sur T^*M,

$$d\xi_k = \sum_j \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\right) d\xi'_j + \sum_{j,l} \xi'_j \left(\frac{\partial^2 x'_j}{\partial x_k \partial x_l}\right) dx_l$$

et

$$\Omega = \sum_k dx_k \wedge d\xi_k$$
$$= \sum_j \underbrace{\sum_k \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_k}\right) dx_k}_{dx'_j} \wedge d\xi'_j + \sum_j \xi'_j \left[\sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 x'_j}{\partial x_k \partial x_l}\right) (dx_k \wedge dx_l)\right]$$

Le dernier terme $[\,''\,] = 0$ car $\frac{\partial^2 x'_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 x'_j}{\partial x_l \partial x_k}$: sym

alors que $dx_k \wedge dx_l = - dx_l \wedge dx_k$: antisym.

donc $\quad \Omega = \sum_j dx'_j \wedge d\xi'_j = \Omega'$

3 a) On pose $\Omega(X,Y) = Y(\eta(X)) - X(\eta(Y)) + \eta([X,Y])$.

Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction,

on veut montrer que $\Omega(fX, Y) = f\,\Omega(X,Y)$.

on a $\eta(fX) = df.\eta(X) + f\eta(X)$

donc $Y(\eta(fX)) = Y(f).\eta(X) + f\,Y(\eta(X))$

et $[fX, Y] = fXY - Y(fX)$

$= fXY - Y(f)X - fYX$

$= f[X,Y] - Y(f)X$

donc $\eta([fX,Y]) = f\,\eta([X,Y]) - Y(f)\eta(X)$

$$\Omega(fX,Y) = Y(\eta(fX)) - fX(\eta(Y)) + \eta([fX,Y])$$

$$= \cancel{Y(f)\eta(X)} + f\,Y(\eta(X)) - fX(\eta(Y)) + f\eta([X,Y]) - \cancel{Y(f)\eta(X)}$$

$$= f\,\Omega(X,Y).$$

De même, $\Omega(X, gY) = g\,\Omega(X,Y)$.

donc Ω est un tenseur.

3 b si $X = \sum_j X_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \in TT^*M$,

alors $d\pi(X) = \sum_j X_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \in TM$

$\xi = \sum_j \xi_j \, dx_j$.

donc

$$\eta_{(x,\xi)}(X) := \xi(d\pi(X)) = \sum_j \xi_j X_{x_j}$$

autrement dit, $\eta = \sum_j \xi_j \, dx_j$.

. Si on connait la dérivée extérieure, on déduit

$$\Omega = -d\eta = \sum_j -d\xi_j \wedge dx_j = \sum_j dx_j \wedge d\xi_j.$$

. Si on ne connait pas la dérivée extérieure,

on utilise l'expression $\Omega(X,Y) = Y(\eta(X)) - X(\eta(Y)) - \eta([X,Y])$

pour calculer les composantes de Ω :

on a $\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \xi_j$; $\eta\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = 0$,

$[\cdot,\cdot] = 0$ car les dérivée partielles commuttent,
donc les seuls termes non nuls sont

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = 1$$

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = -1$$

donnant $\Omega = \sum_j dx_j \wedge d\xi_j$.

Equations de mouvement de Hamilton en général

① . Soient $(x_1, \dots, x_n)$ coordonnées sur M.

. Un vecteur cotangent $\xi \in T^*M$, s'écrit

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, dx_j ,$$

donc $(x_1, \dots x_n, \xi_1, \dots \xi_n)$: coordonnées sur T^*M.

. Soit $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction C^∞,

on écrit $dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right) dx_j + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right) d\xi_j$

on a $\Omega = \sum_j dx_j \otimes d\xi_j - d\xi_j \otimes dx_j$

donc $\check{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = d\xi_j$, $\check{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = -dx_j$

donc

$$X := \check{\Omega}^{-1}(dH) = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donc $X = \sum_j X_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_{\xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$

avec les composantes $\begin{cases} X_{x_j} = \dfrac{\partial H}{\partial \xi_j} \\ X_{\xi_j} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases}$

Ce champ de vecteur génère un flot, et les trajectoires $(x_j(t), \xi_j(t))_j$ vérifient par définition

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = X_{x_j} = \dfrac{\partial H}{\partial \xi_j} \\ \dot{\xi}_j(t) = X_{\xi_j} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases}$$

: "équ. de Hamilt. en coordonnées"

(2) $X(H) = \sum_j X_{x_j}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right) + X_{\xi_j}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right)$

$= \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\right) = 0$

donc $\frac{d}{dt} H(\phi^t(\xi)) = X(H) = 0$

donc $H(\phi^t(\xi))$ est constant.

Equations de mouvement de Hamilton, cas de la mécanique

① si $H(x,\xi) = \frac{1}{2m}\|\xi\|_g^2 + U(x)$

$$= \frac{1}{2m}\left(\sum_j \xi_j^2\right) + U(x_1, x_2, x_3)$$

alors les équations de Hamilton donnent

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \dfrac{\partial H}{\partial \xi_j} = \dfrac{1}{m}\xi_j \iff \xi_j = m\dot{x}_j \\ \dot{\xi}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_j} = F_j \end{cases}$$