Métrique,

(1.1) Application linéaire associée

. Soit $g_x : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$

une métrique, i.e. forme bilinéaire

(1) symétrique : $\forall\, U, V,\ g(U,V) = g(V,U)$

(2) non dégénérée : $\forall\, V,\ g(U,V) = 0 \Rightarrow U = 0$.

. Soit $\check{g} : \begin{cases} T_x M \longrightarrow T_x^* M \\ U \longmapsto \{ V \mapsto g(U,V) \} \end{cases}$

l'application linéaire associée. Par définition, l'application duale $\check{g}^* : (T_x^* M)^* = T_x M \longrightarrow (T_x M)^* = T_x^* M$ est définie par $\forall\, U, V \in T_x M$,

$$\langle U | \check{g}^* V \rangle = \langle \check{g} U | V \rangle = g(U,V) \overset{(1)}{=} g(V,U)$$

$$= \langle \check{g} V | U \rangle = \langle U | \check{g} V \rangle$$

donc $\check{g}^* = \check{g}$.

. On a $\operatorname{Ker} \check{g} = \{ U \in T_x M \text{ tq } g(U,V) = 0, \forall V \}$

$= \{0\}$ d'après (2)

donc $\check{g}$ est injective donc inversible (car $\dim T_x^* M = \dim T_x M$)

Représentation du dual métrique $\check{g}(u)$

① Sur $M = \mathbb{R}^2$, coordonnées (x_1, x_2),

métrique $g = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_2$,

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ est une base de $T_x M$

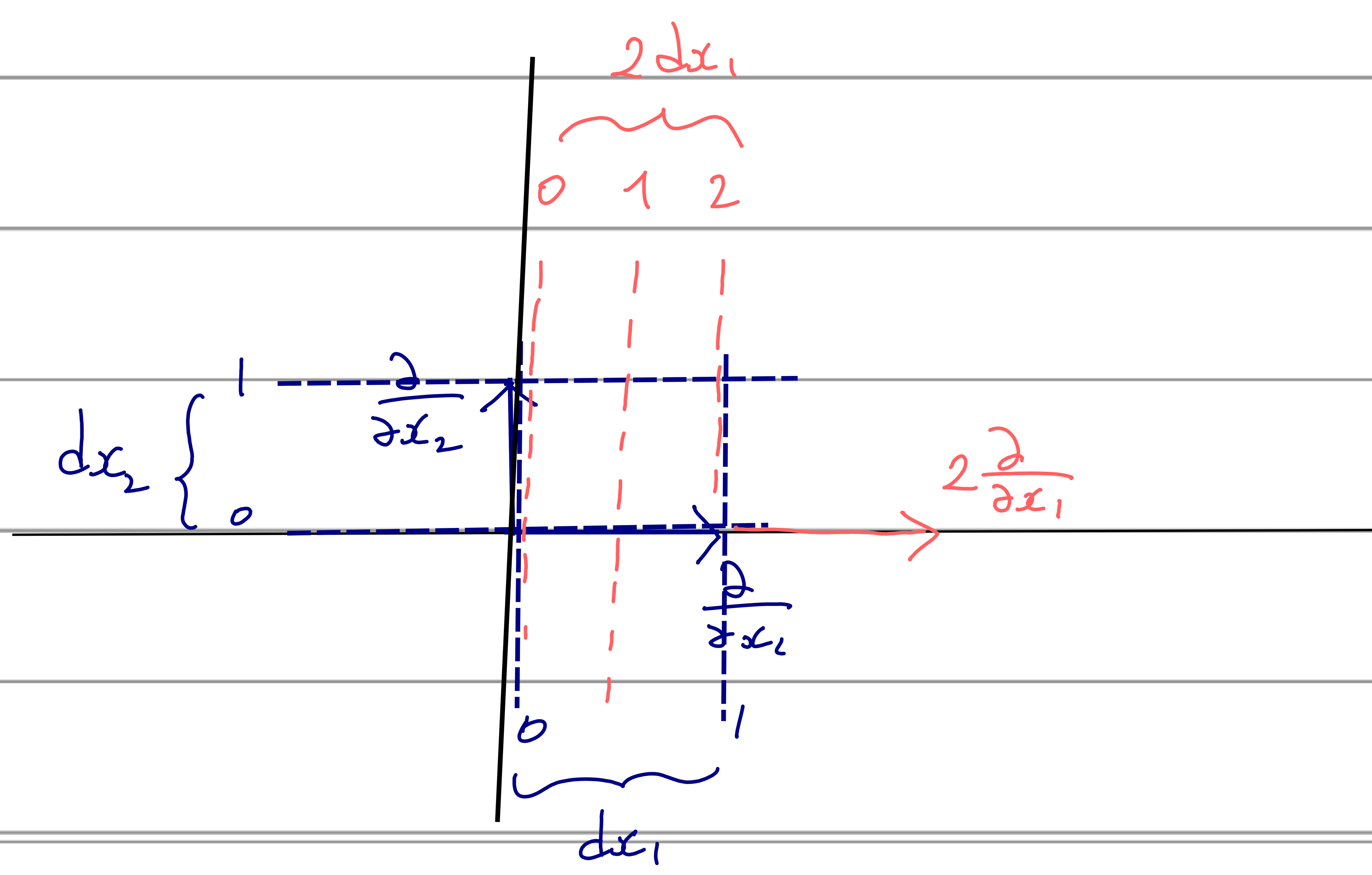
(dx_1, dx_2) " " $T_x^* M$,

Par définition $\check{g}(u) = g(u, \cdot)$

avec $\check{g} : T_x M \longrightarrow T_x^* M$,

donc $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = dx_1$, $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = dx_2$

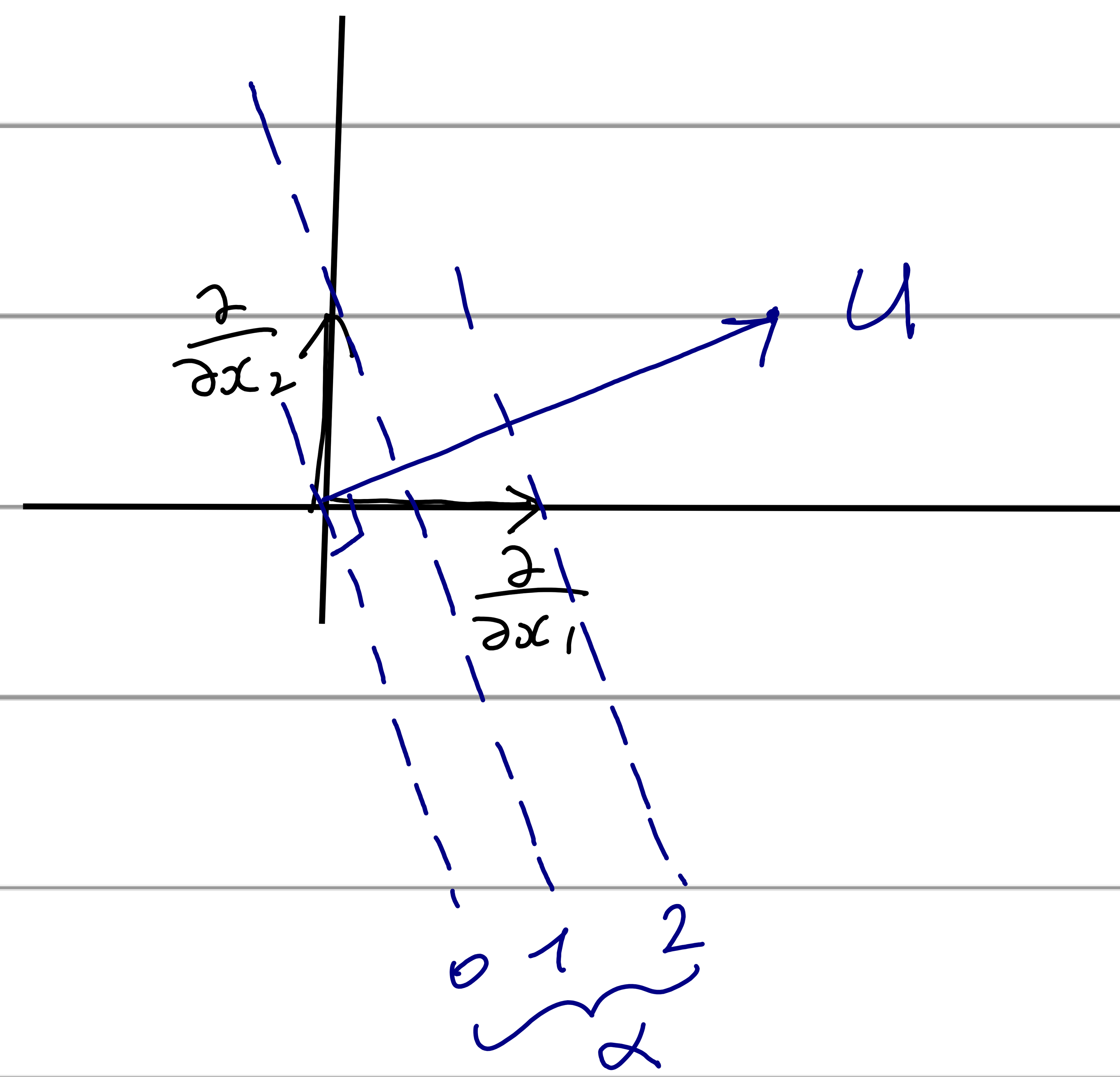
$g\left(2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 2\,dx_1$,



- $U = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\alpha = \check{g}\left(2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 2\,dx_1 + dx_2$

on a $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 2$, $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 1$

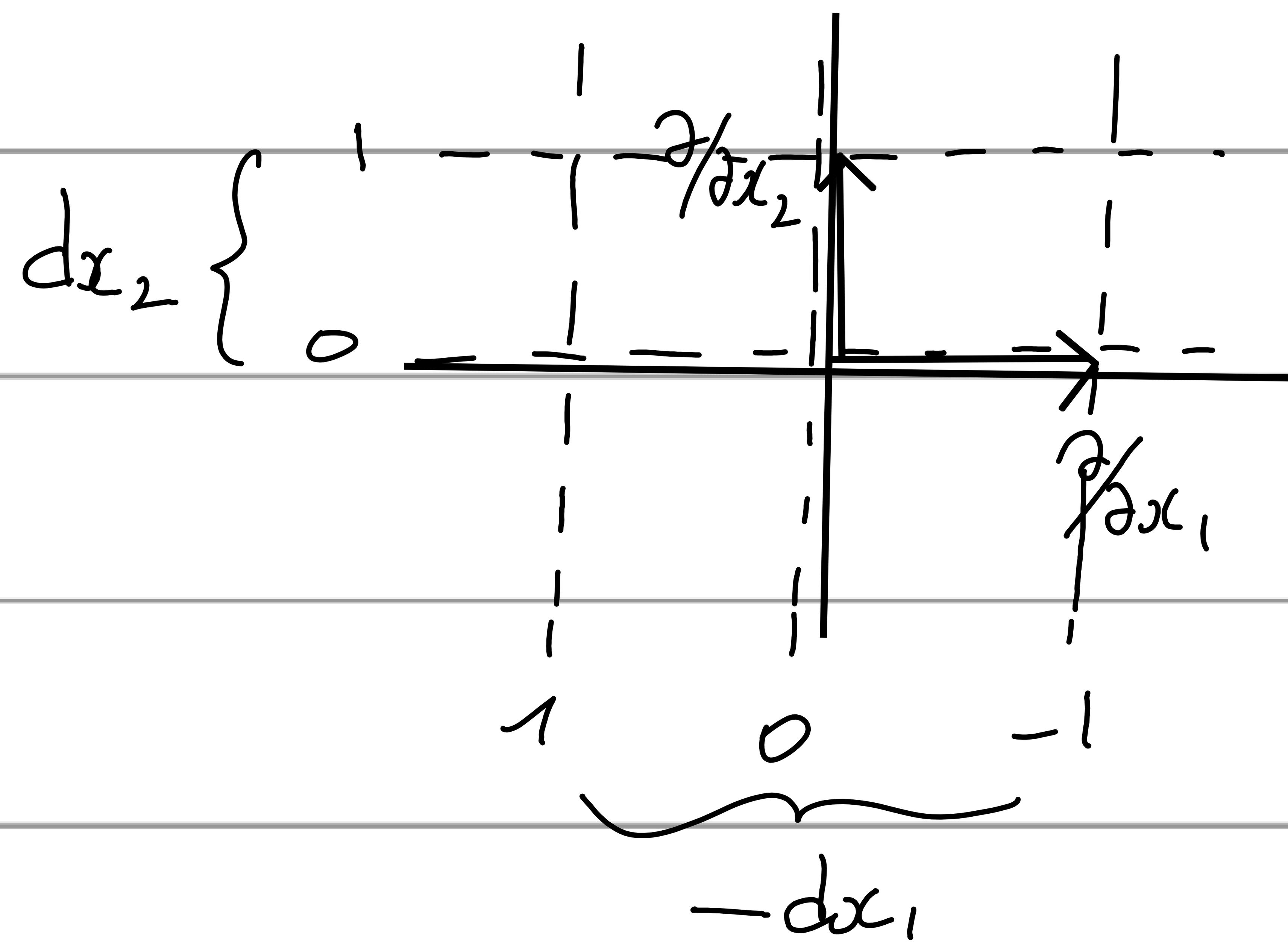
donc



(2) pour la métrique de Lorentz sur $\mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$

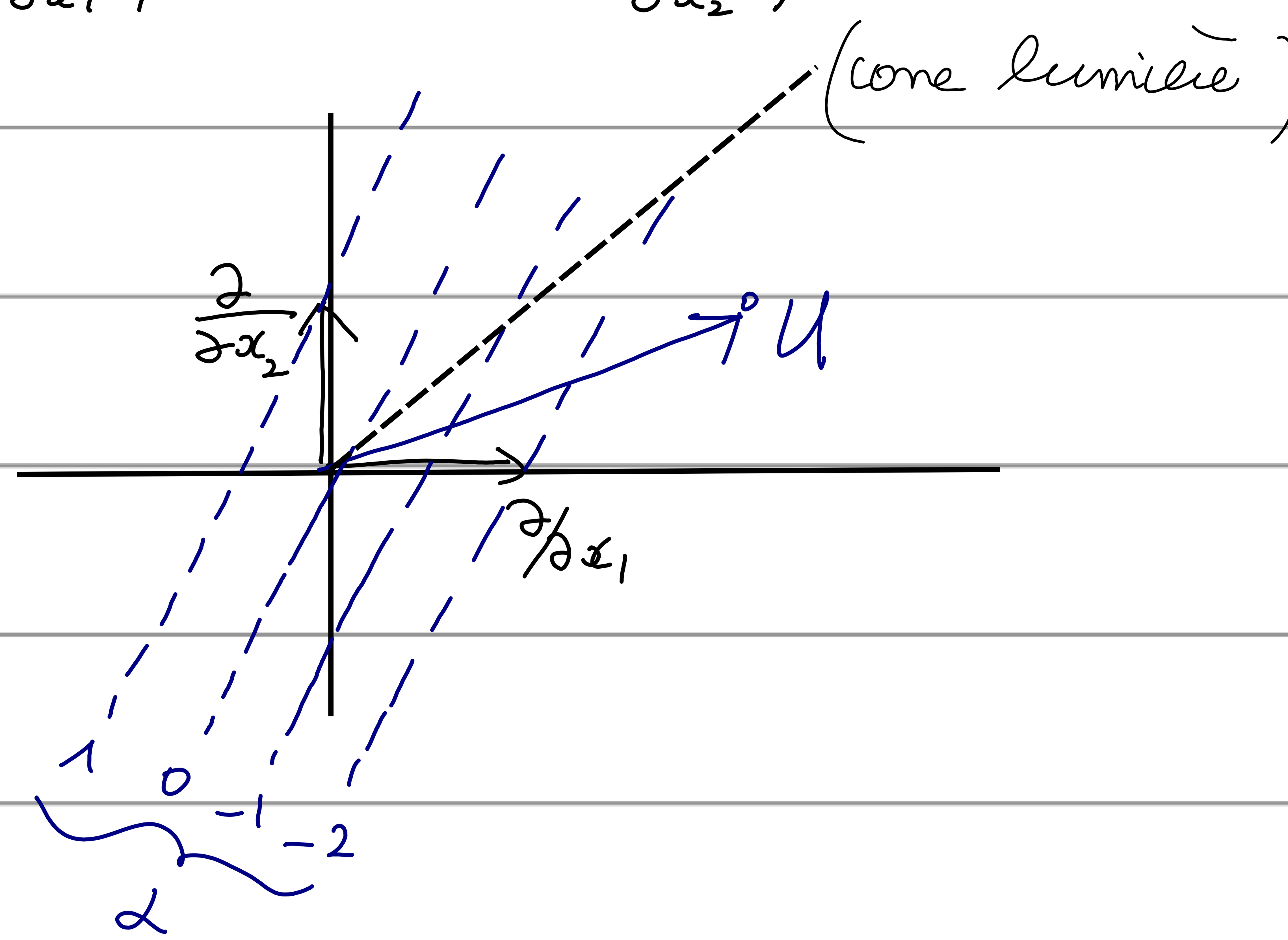
$$g = -dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2,$$

on a $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -dx_1$, $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = dx_2$



• $U = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\alpha = \check{g}(U) = -2dx_1 + dx_2$

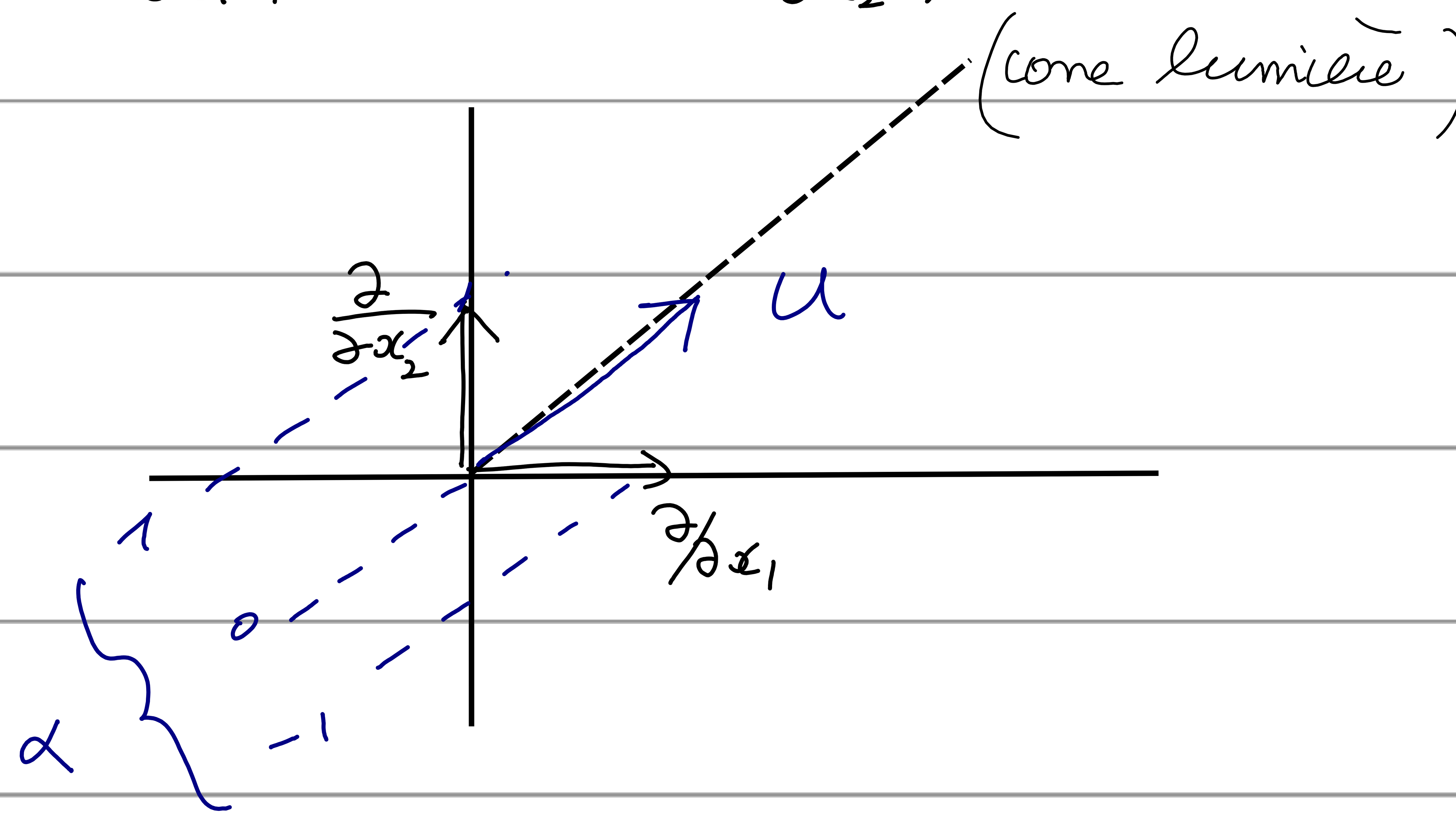
$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -2, \quad \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 1,$$



remarquer la symétrie par rapport au cône de lumière, ie des vecteurs U tq $g(U,U) = 0$.

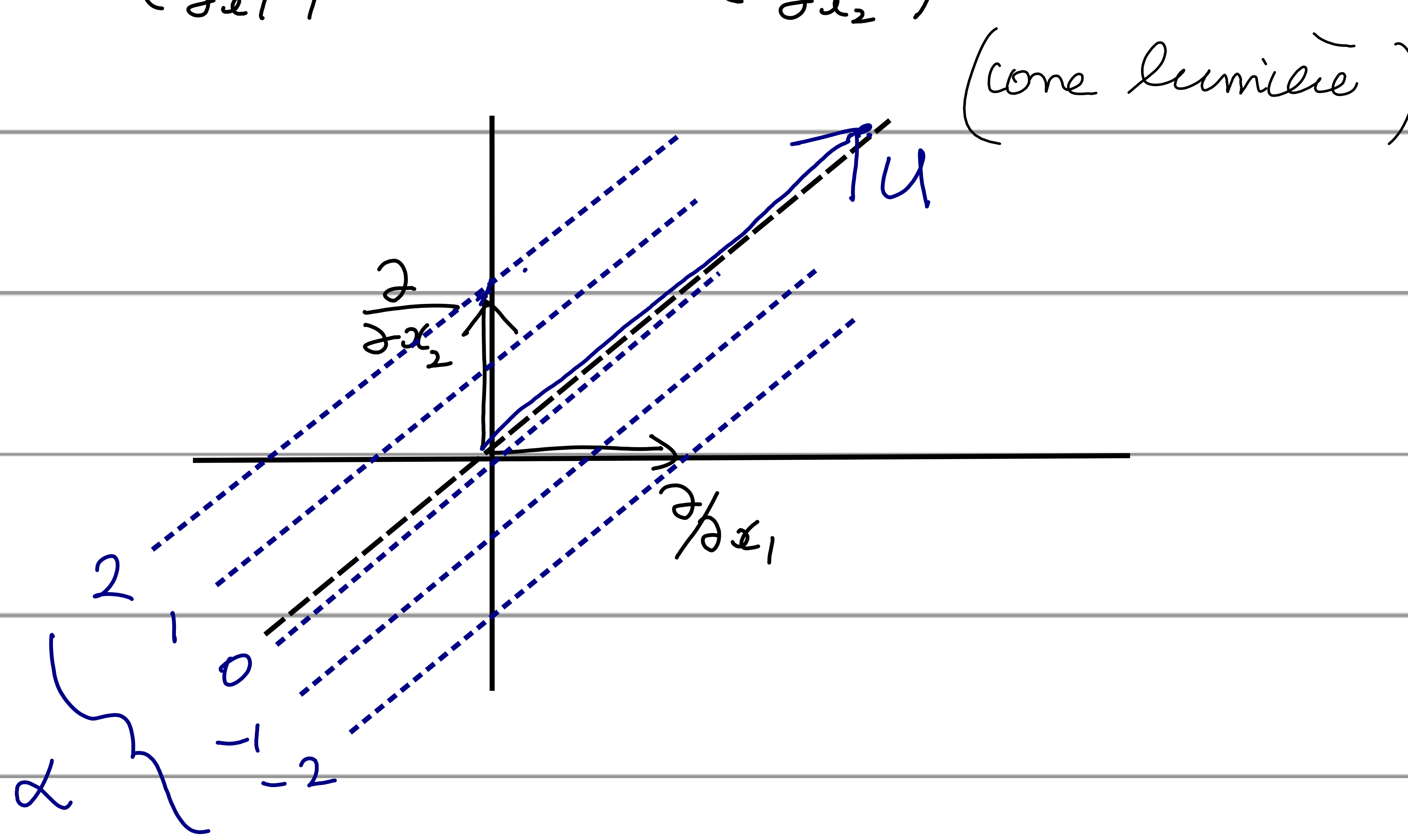
- $U = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\alpha = \check{g}(U) = -dx_1 + dx_2$

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -1, \quad \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 1,$$



- $U = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, $\alpha = \check{g}(U) = -2dx_1 + 2dx_2$

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -2, \quad \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 2,$$



1.2 Métrique Euclidienne et coordonnées polaires

1. sur $M = \mathbb{R}^2$, on considère la métrique Euclidienne

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2,$$

ses "composantes" sont données par les produits scalaires des vecteurs de base de $T_x M$:

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{i=j}$$

↳ car $\begin{cases} dx_1\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) = 1 \\ dx_1\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$ etc

représentés par la matrice :

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

• On a $x_1 = r\cos\theta$ donc $dx_1 = dr\cos\theta - \sin\theta\, r d\theta$

$x_2 = r\sin\theta$, donc $dx_2 = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta$

donc

$$\begin{aligned} g &= dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 \\ &= (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \otimes (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \\ &\quad + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \otimes (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \\ &= \cos^2\theta\, dr\otimes dr - \cancel{r\cos\theta\sin\theta\, dr\otimes d\theta} - \cancel{r\sin\theta\cos\theta\, d\theta\otimes dr} \\ &\quad + r^2\sin^2\theta\, d\theta\otimes d\theta \\ &\quad + \sin^2\theta\, dr\otimes dr + \cancel{r\sin\theta\cos\theta\, dr\otimes d\theta} + \cancel{r\cos\theta\sin\theta\, d\theta\otimes dr} \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\, d\theta\otimes d\theta \\ &= dr\otimes dr + r^2\, d\theta\otimes d\theta \end{aligned}$$

donc $g_{r,r} := g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$, $g_{\theta,\theta} := g\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = r^2$

et les autres sont nuls :

$$g \underset{(\text{base } \partial_r, \partial_\theta)}{\equiv} \begin{array}{c|cc} & r & \theta \\ \hline r & 1 & 0 \\ \theta & 0 & r^2 \end{array} \quad : \text{matrice des composantes}$$

(2) $g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$, $g\left(\frac{\partial}{r\partial\theta}, \frac{\partial}{r\partial\theta}\right) = \frac{1}{r^2} g\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$
$= 1$

et les autres sont nuls, donc $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial\theta}\right)$
est une base orthonormée de $T_x M$.

(3) <u>rappel</u> : $\check{g}(U) := g(U, \cdot) \in T^* M$

comme $dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ et $dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 0$ alors

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = dx_1, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = dx_2$$

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = dr, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = r^2 d\theta$$

1.3 Métique Euclidienne en coord. sphériques

① formules de changement de coordonnés :

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = r \cos\theta \end{cases}$$

Pour simplifier, on note $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, $c' = \cos\varphi$, $s' = \sin\varphi$

alors
$$\begin{cases} dx_1 = s c' \, dr + r c c' \, d\theta - r s s' \, d\varphi \\ dx_2 = s s' \, dr + r c s' \, d\theta + r s c' \, d\varphi \\ dx_3 = c \, dr - r s \, d\theta \end{cases}$$

Donc $g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$

$$\begin{aligned} &= s^2 c'^2 dr^2 + r^2 c^2 c'^2 d\theta^2 + r^2 s^2 s'^2 d\varphi^2 + r s c c'^2 \cancel{(dr d\theta + d\theta dr)} \\ &- r s^2 s' c' \cancel{(dr d\varphi + d\varphi dr)} - r^2 s c c' s' \cancel{(d\theta d\varphi + d\varphi d\theta)} \\ &+ s^2 s'^2 dr^2 + r^2 c^2 s'^2 d\theta^2 + r^2 s^2 c'^2 d\varphi^2 \\ &+ r s c s'^2 \cancel{(dr d\theta + d\theta dr)} + r s^2 s' c' \cancel{(dr d\varphi + d\varphi dr)} + r^2 s c s' c' \cancel{(d\theta d\varphi + d\varphi d\theta)} \\ &+ c^2 dr^2 + r^2 s^2 d\theta^2 - r c s \cancel{(dr d\theta + d\theta dr)} \end{aligned}$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 s^2 d\varphi^2$$

$$\boxed{g = dr \otimes dr + (r\, d\theta) \otimes (r\, d\theta) + (r \sin\theta\, d\varphi) \otimes (r \sin\theta\, d\varphi)}$$

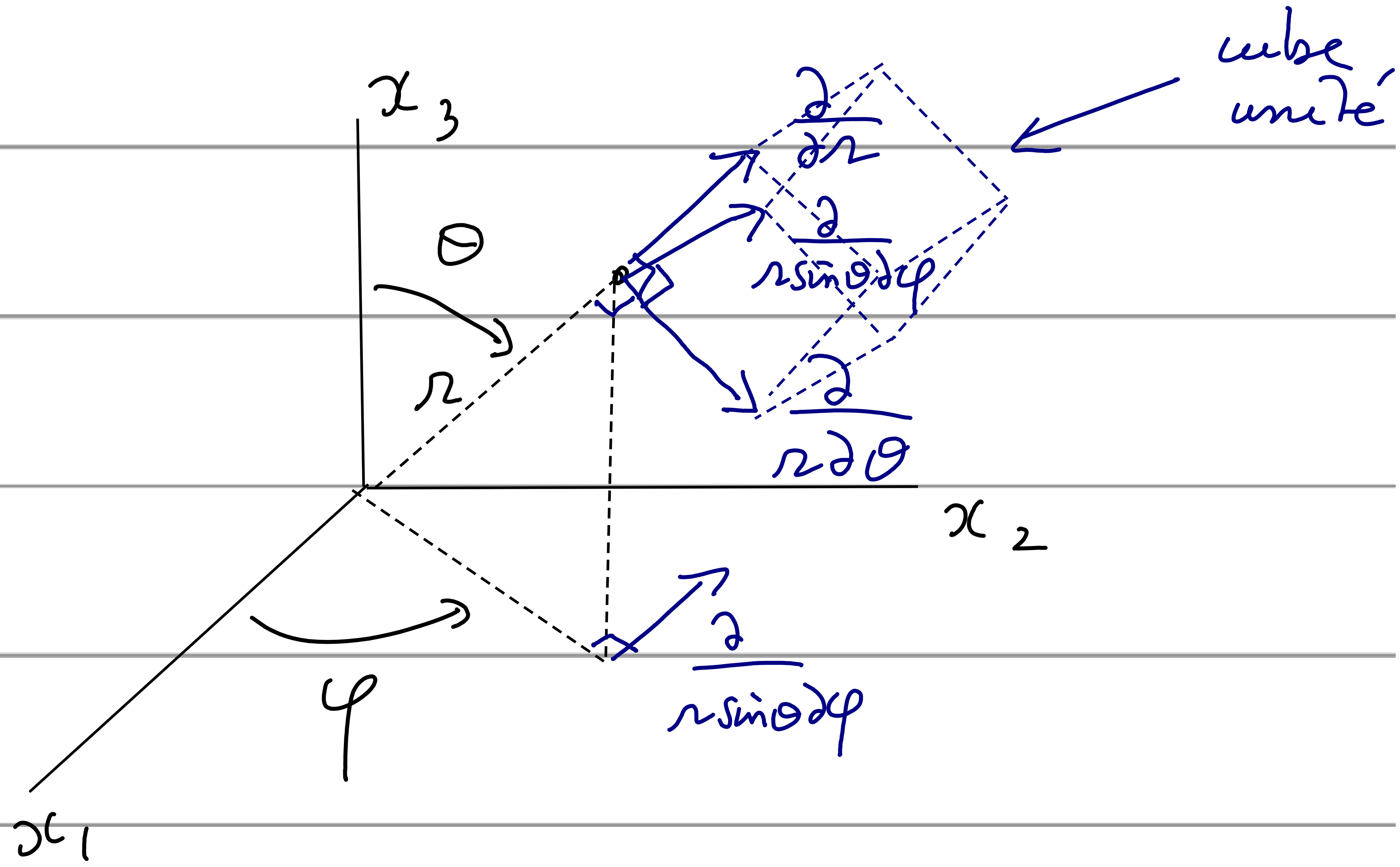
(2) Une conséquence est que

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad g\left(\frac{\partial}{r\partial\theta}, \frac{\partial}{r\partial\theta}\right) = 1,$$

$$g\left(\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}, \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\right) = 1$$

et les autres combinaisons sont nulles.

Cela signifie que $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial\theta}, \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\right)$ forme une base orthonormée de TM :



(3) La sphère $S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3, \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \}$ est définie en coordonnées sphérique par la condition r fixé.

Par conséquent un vecteur tangent à S^2 est un vecteur tangent à $\mathbb{R}^3$ mais avec une composante nulle selon $\frac{\partial}{\partial r}$:

$$V = V_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + V_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

d'après l'expression de g,

$$g(V, V) = r^2 \left(V_\theta^2 + \sin^2\theta \, V_\varphi^2 \right)$$

i.e $\quad g = r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \, d\varphi \otimes d\varphi \right)$

(on oublie $dr \otimes dr$).

④ rappel : $\check{g}(U) := g(U,\cdot) \in T^*M$

comme $dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ et $dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 0$ alors

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = dx_1, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = dx_2$$

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = dx_3,$$

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = dr, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2\, d\theta$$

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = r^2 \sin^2\theta\, d\varphi.$$

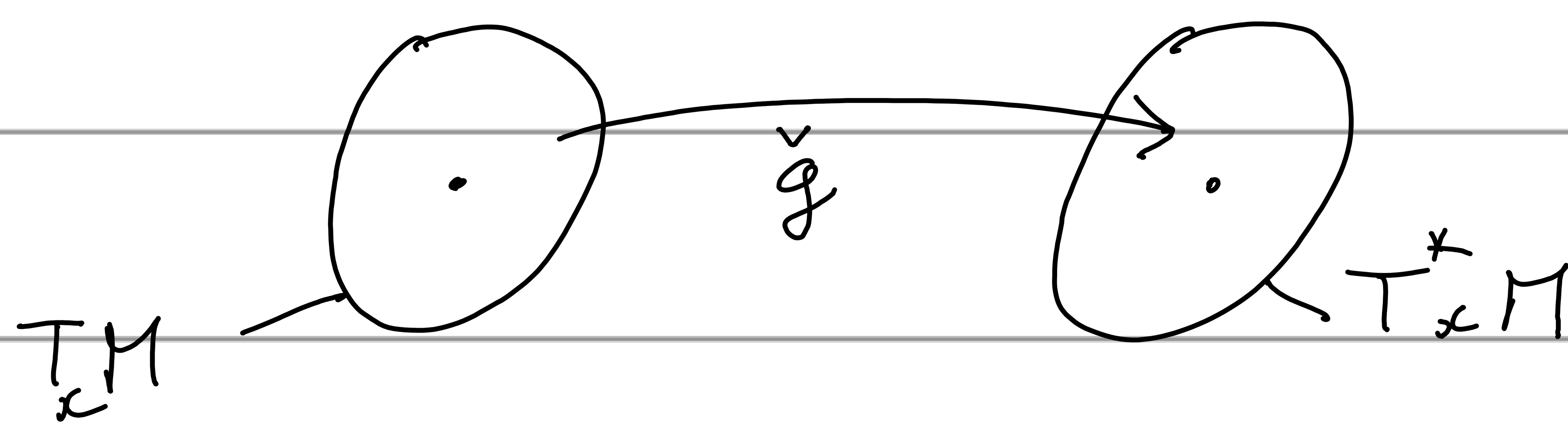
1.4 Produit scalaire induit sur $T_x^* M$

si g est une métrique sur M, ie produit scalaire sur $T_x M$ pour tout $x \in M$,

que l'on notera aussi $\langle U | V \rangle_{TM} = g(U, V)$,

alors on a définit $\check{g}_x : \begin{cases} T_x M \longrightarrow T_x^* M \\ U \longmapsto \{ V \mapsto g(U,V) \} \end{cases}$

qui est un isomorphisme (ie bijection linéaire).



On peut donc définir un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{T_x^* M}$ sur $T_x^* M$ par :

$$\forall \xi, \eta \in T^* M, \qquad \langle \xi | \eta \rangle_{T_x^* M} := \langle \check{g}^{-1}(\xi) | \check{g}^{-1}(\eta) \rangle_{TM}$$

ce qui revient à stipuler que $\check{g}^{-1}$ est une isométrie (ie préserve les produits scalaires)

(1) en coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur M,

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_{TM},$$

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$$

alors $\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_j g_{ij}\, dx_j$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j g_{ij}\, \check{g}^{-1}(dx_j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \check{g}^{-1}(dx_j) = \sum_i \underbrace{(g^{-1})_{ji}}_{\text{matrice inverse}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\langle dx_i \mid dx_j \rangle_{T^*M} = \langle \check{g}^{-1}(dx_i) \mid \check{g}^{-1}(dx_j) \rangle_{TM}$$

$$= \sum_{k,l} (g^{-1})_{ik} \underbrace{(g^{-1})_{jl}}_{"(g^{-1})_{lj}} \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle_{TM}}_{g_{kl}}$$

$$= \sum_{k,l} (g^{-1})_{ik}\, g_{kl}\, (g^{-1})_{lj} = (g^{-1})_{ij}$$

← produit de matrices

Donc,

Si $\xi = \sum_i \xi_i \, dx_i$, $\eta = \sum_j \xi_j \, dx_j \in T^*M$,

alors

$$\langle \xi | \eta \rangle_{T^*M} = \langle \check{g}^{-1}(\xi) | \check{g}^{-1}(\eta) \rangle_{TM} = \sum_{i,j} \xi_i \, \eta_j \, \langle \check{g}^{-1}(dx_i) | \check{g}^{-1}(dx_j) \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \xi_i \, \eta_j \, (g^{-1})_{ij}$$

Expression du gradient sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, en coordonnées cartésiennes et sphériques

① Métrique Euclidienne

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3,$$

Fonction $f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$

Sa différentielle est :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) dx_3$$

On a $\quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = dx_j \quad , \quad j = 1, 2, 3$

$$\Longleftrightarrow \quad \check{g}^{-1}(dx_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

$$\operatorname{grad}(f) := \check{g}^{-1}(df) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

(2) En coordonnées sphériques, on a vu que

$$g = dr\otimes dr + r^2\left(d\theta\otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi\otimes d\varphi\right)$$

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = dr, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2 d\theta, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = r^2\sin^2\theta\, d\varphi$$

$$\check{g}^{-1}(dr) = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \check{g}^{-1}(d\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \check{g}^{-1}(d\varphi) = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\mathrm{grad}(f) = \check{g}^{-1}(df) = \check{g}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

(3) $$g = dr\otimes dr + (r\,d\theta)\otimes(r\,d\theta) + (r\sin\theta\, d\varphi)\otimes(r\sin\theta\, d\varphi)$$

donc $g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$, $g\left(\frac{\partial}{r\partial \theta}, \frac{\partial}{r\partial \theta}\right) = 1$,

$g\left(\frac{\partial}{r\sin\theta\partial \varphi}, \frac{\partial}{r\sin\theta\partial \varphi}\right) = 1$, et autres zéros,

c.à.d que $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial \theta}, \frac{\partial}{r\sin\theta\partial \varphi}\right)$ est <u>une b.o.n</u>,

$$\check{g}\left(\frac{\partial}{r\partial\theta}\right) = r\,d\theta\,, \quad \check{g}\left(\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\right) = r\sin\theta\,d\varphi\,,$$

$$\check{g}^{-1}(r\,d\theta) = \frac{\partial}{r\partial\theta}\,, \quad \check{g}^{-1}(r\sin\theta\,d\varphi) = \frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\,,$$

$$\mathrm{grad}(f) = \check{g}^{-1}(df) = \check{g}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{r\partial\theta} + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}$$