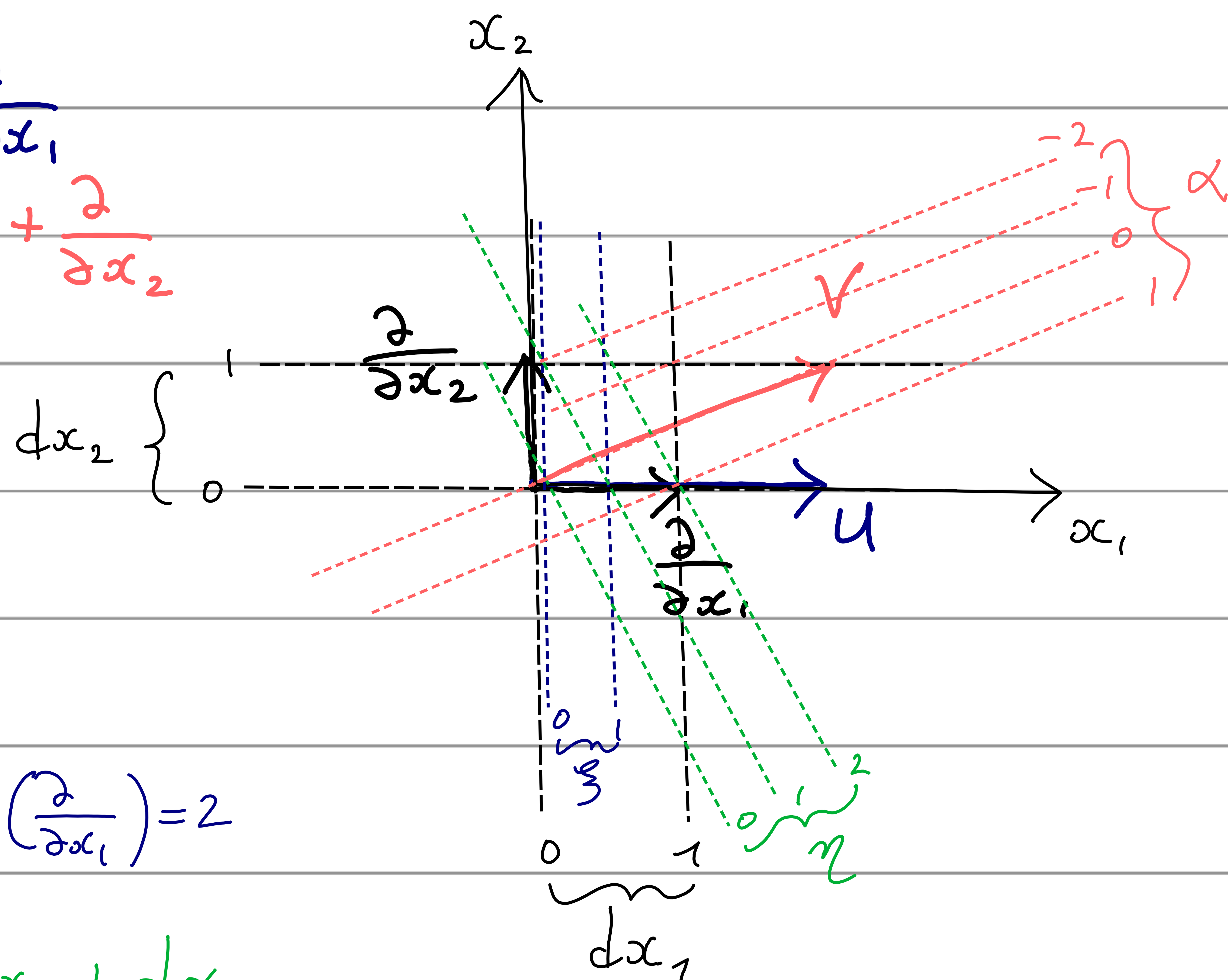
Vecteurs cotangents

2.0 Représentation de vecteurs cotangents

$U = 2\frac{\partial}{\partial x_1}$

$V = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$



$\xi = 2\,dx_1$

donc $\xi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 2$

$\eta = 2\,dx_1 + dx_2$

donc $\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 2, \ \eta\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 1$

$\alpha = dx_1 - 2\,dx_2$, donc $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 1, \ \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -2, \ \alpha(V) = 0$

2.1 Coordonnées cartésiennes ou ou polaires

sur le plan $\mathbb{R}^2$, $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$,

$x = (x_1, x_2)$: point

1 forme $\quad \xi = \xi_1(x)\,dx_1 + \xi_2(x)\,dx_2$

$$= \xi_r(x)\,dr + \xi_\theta(x)\,d\theta$$

on écrit : $\quad dx_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right) d\theta$

$$= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dx_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right) d\theta$$

$$= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

donc

$$\xi = \underbrace{\left(\xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta\right)}_{\xi_r} dr + \underbrace{\left(-r\sin\theta\,\xi_1 + r\cos\theta\,\xi_2\right)}_{\xi_\theta} d\theta$$

2.2 Formules de changement de coordonnées pour les 1 formes

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \, dx_k = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \, dy_j$$

on écrit $dy_j = \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right) dx_k$

donc $$\xi = \sum_j \eta_j \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right) dx_k$$
$$= \sum_k \underbrace{\left(\sum_j \eta_j \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)\right)}_{\xi_k} dx_k$$

rappel : pour les vecteurs tangents $\xi = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

on a $\eta_j = \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right) \xi_k$.

qui est la formule "duale".

2.3 Forme exacte

- Soit f une fonction et sa différentielle :

$$\xi = df = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_j \xi_j \, dx_j$$

qui est une 1 forme exacte

avec les composantes $\xi_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

On a donc $$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwartz}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$$

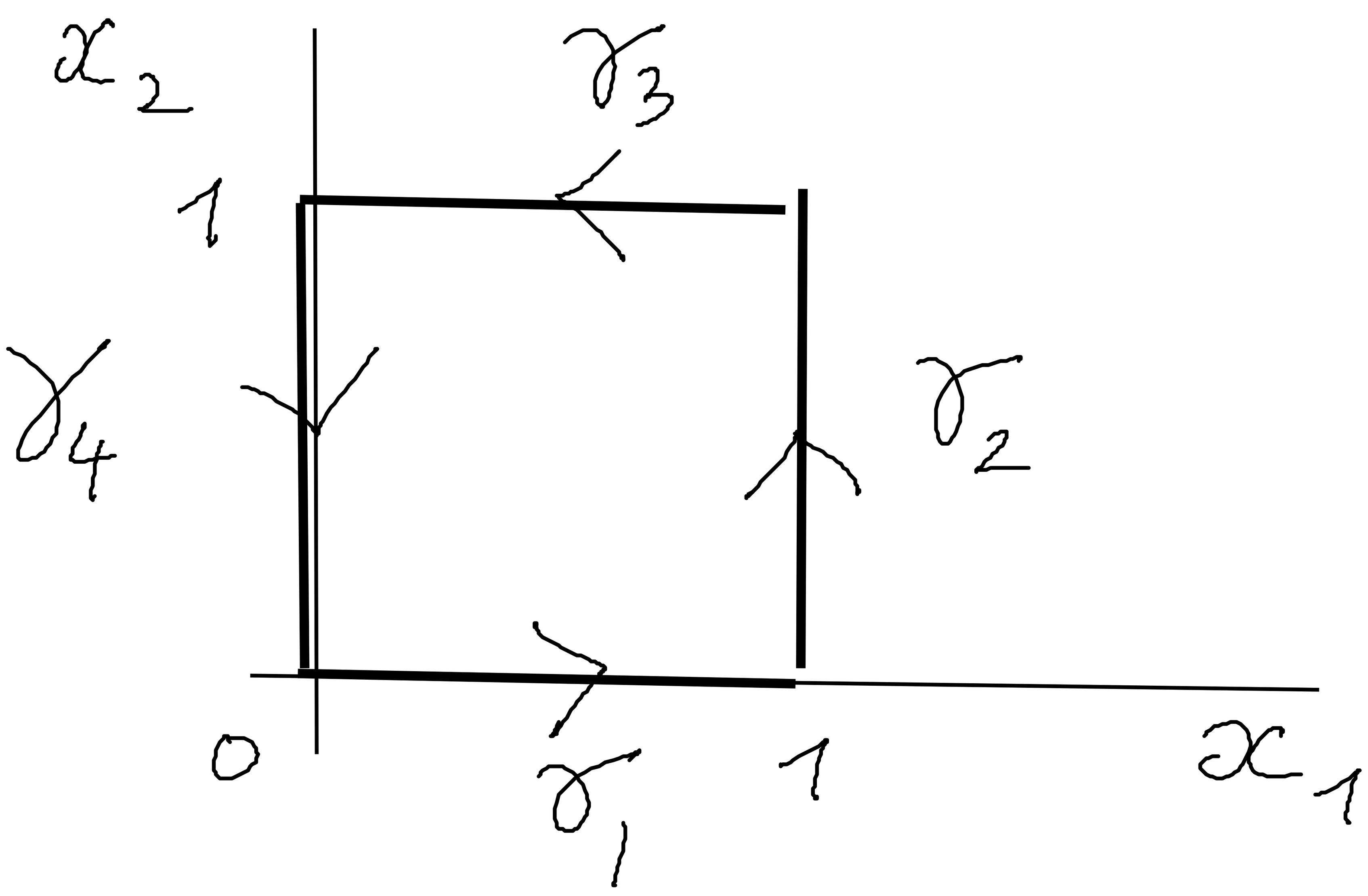
- Par exemple sur $\mathbb{R}^2$: $\xi = \underbrace{x_2}_{\xi_1} dx_1 + \underbrace{0}_{\xi_2} dx_2$

on a $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 1$, $\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0$ différents

donc ξ n'est pas exacte (ie $\xi \neq df$)

1 formes et intégrale curviligne

Sur le plan $\mathbb{R}^2$, avec les coordonnées (x_1, x_2), on considère le chemin fermé :



1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,

alors $df = 2\,x_1\,dx_1 + 2\,x_2\,dx_2$

$$\int_{\gamma_1} df = \int_0^1 \left(2\,x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2\,x_2 \frac{dx_2}{dt}\right) dt$$

avec $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $\frac{dx_1}{dt} = 1$

donc $\int_{\gamma_1} df = \int_0^1 2\,t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2\,\frac{1}{2} = 1$

de même, $\displaystyle\int_{\gamma_2} df = \int_0^1 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\, dt = \int_0^1 2t\, dt = 1$

$$\int_{\gamma_3} df = \int_0^1 2x_1 \frac{dx_1}{dt}\, dt = \int_0^1 2(1-t)(-1)\, dt = -2\int_0^1 dt + \int_0^1 2t\,dt$$

$$= -2+1 = -1$$

$$\int_{\gamma_4} df = \int_0^1 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\, dt = 2\int_0^1 (1-t)(-1)\, dt = -1$$

On vérifie que $\displaystyle\int_{\gamma} df = \int_{\gamma_1} df + \int_{\gamma_2} df + \int_{\gamma_3} df + \int_{\gamma_4} df = 0$

que l'on obtient directement par $\displaystyle\int_{\gamma} df = f(\gamma_{fin}) - f(\gamma_{init})$

$= 0$ car $\gamma_{fin} = \gamma_{init}$

(2) Soit $\alpha = x_2\, dx_1$: 1 forme de composantes $\alpha_1 = x_2$, $\alpha_2 = 0$

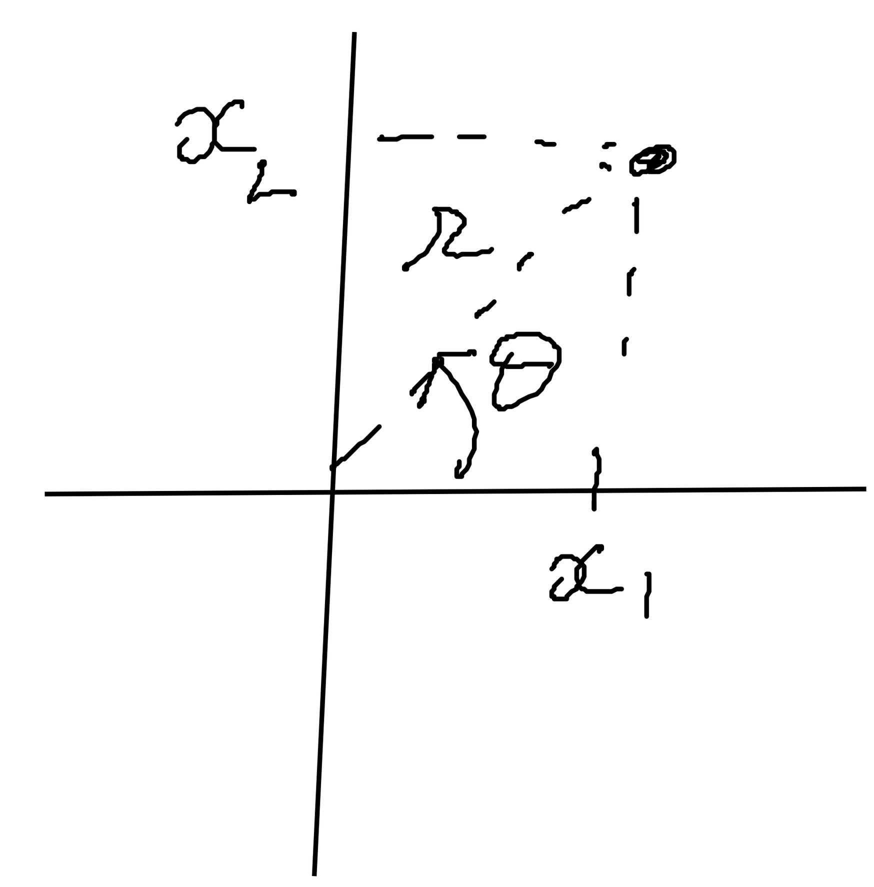
donc $d\alpha = -\, dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$ donc α n'est <u>pas fermée</u>

$$\int_{\gamma_1} \alpha = 0, \quad \int_{\gamma_2} \alpha = 0, \quad \int_{\gamma_3} \alpha = \int_0^1 \frac{d(1-t)}{dt}\, dt = -1, \quad \int_{\gamma_4} \alpha = 0$$

donc $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -1,$

On vérifie que $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \iint_C d\alpha = -\iint_C dx_1\, dx_2 = -1.$

3 $\quad x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta,$



donc $dx_1 = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$

$dx_2 = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

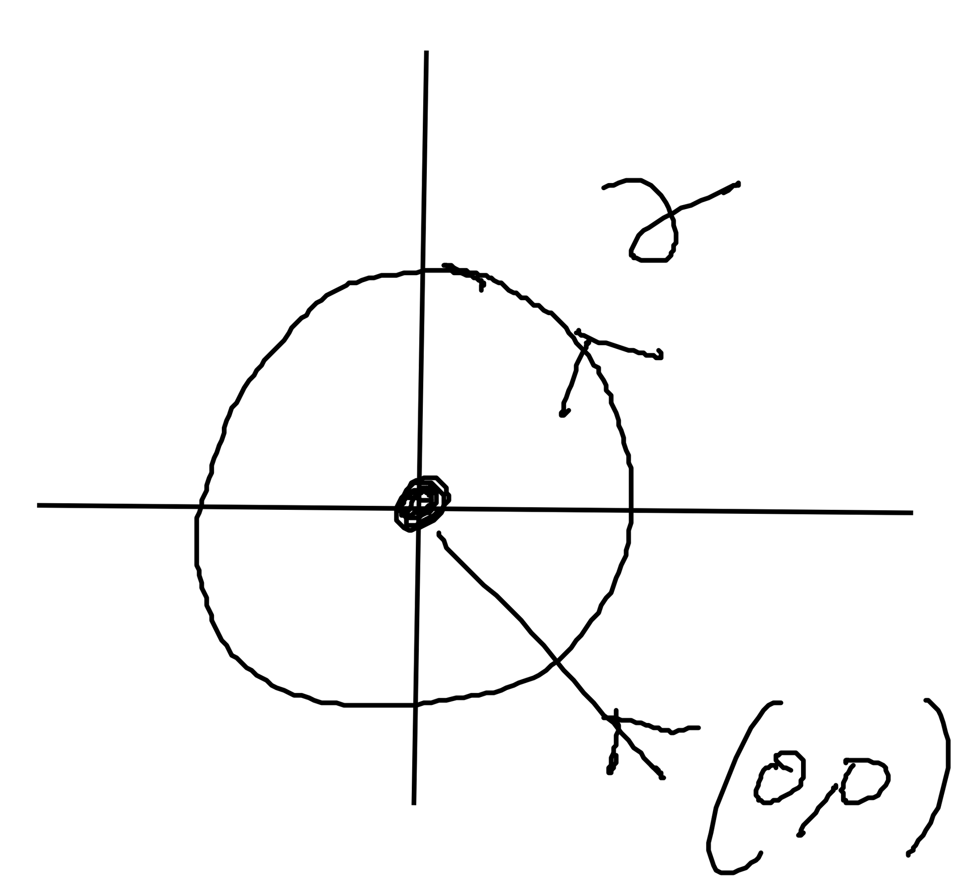
$x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 = r\cos\theta\sin\theta\, dr + r^2\cos^2\theta\, d\theta$

$\qquad - r\cos\theta\sin\theta\, dr + r^2\sin^2\theta\, d\theta$

$= r^2\, d\theta$

donc $\alpha = \dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1\right) = \dfrac{1}{r^2} r^2\, d\theta = d\theta$

$\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi.$



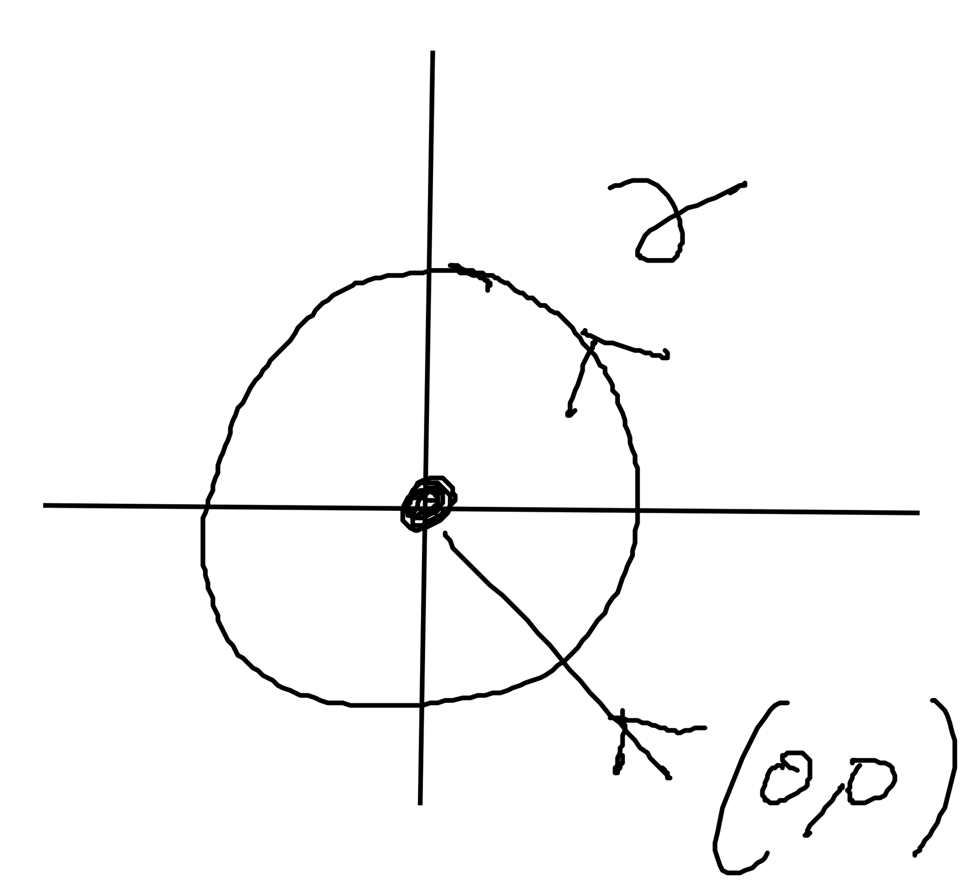
Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $d\alpha = \left(\partial_{x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \partial_{x_2}\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)\right) dx_1 \wedge dx_2$

$$= \left(\frac{1\cdot(x_1^2+x_2^2) - x_1(2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

$= 0$, donc α est <u>fermée</u>,

ou plus simplement $d\alpha = dd\theta = 0$

Mais le cercle γ n'est pas le bord d'un domaine contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à cause du point manquant $(0,0)$. On ne peut donc pas appliquer la formule de Stokes.



1 formes en thermodynamique

Fonction $S(E,V) = \ln(VE)$
"entropie"

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial V} dV,$$
$$= \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV$$

donc $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$, $\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{E}$, $\frac{P}{T} = \frac{1}{V}$

$\Longleftrightarrow T(E,V) = E$, $P(E,V) = \frac{T}{V} = \frac{E}{V}$

1 formes: $\delta Q := T dS$, $\delta W := -P dV$,

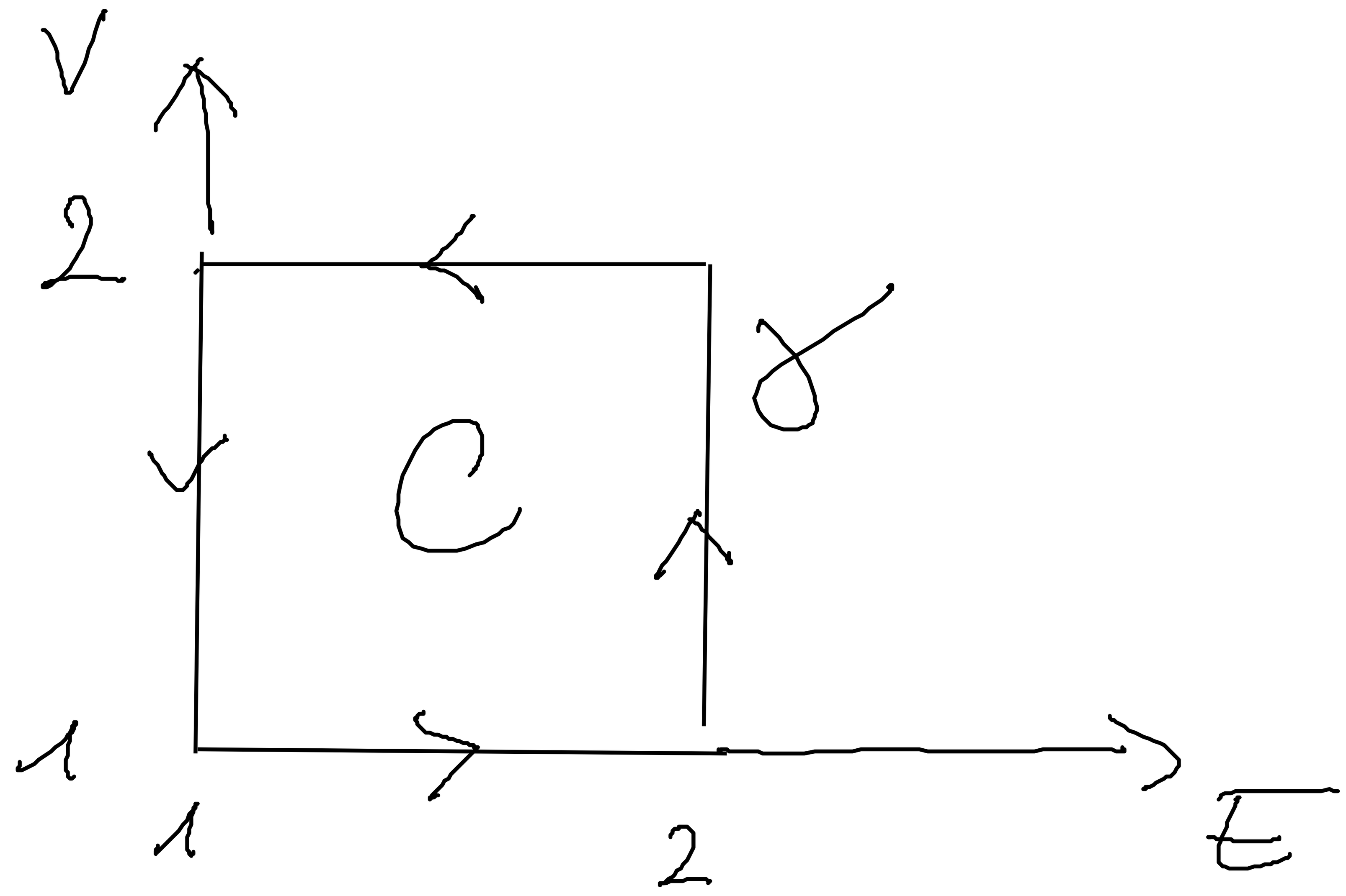
$$\delta Q + \delta W = T dS - P dV = T\left(\frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV\right) - P dV$$
$$= dE$$

$$\delta Q = T dS = dE + P dV = dE + \frac{E}{V} dV$$

donc $d(\delta Q) = \frac{1}{V}(dE \wedge dV) \neq 0$ donc δQ <u>non fermée</u>

de même $d(\delta W) = d(dE - \delta Q) = -d\delta Q \neq 0$,

ou directement $d(\delta W) = d\left(-\frac{E}{V} dV\right) = -\frac{1}{V} dE \wedge dV \neq 0$



$$\int_\gamma \delta Q \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{=\partial C} \delta Q = \iint_C d\,\delta Q = \iint_C \frac{1}{V}\, dE \wedge dV$$

$$= \int_{E=1}^{2} dE \int_{V=1}^{2} \frac{1}{V}\, dV = \Big[\ln V\Big]_1^2 = \ln 2$$

On pourrait aussi calculer directement $\int_\gamma \delta Q$

avec $\delta Q = T\,dS = \underbrace{dE}_{\text{exacte}} + \frac{E}{V}\, dV$

$$\int_\gamma \delta Q = \int_{\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} \frac{E}{V}\, dV = 0 + 2\Big[\ln V\Big]_1^2 + 0 - 1\Big[\ln V\Big]_1^2$$

$$= \ln 2 .$$