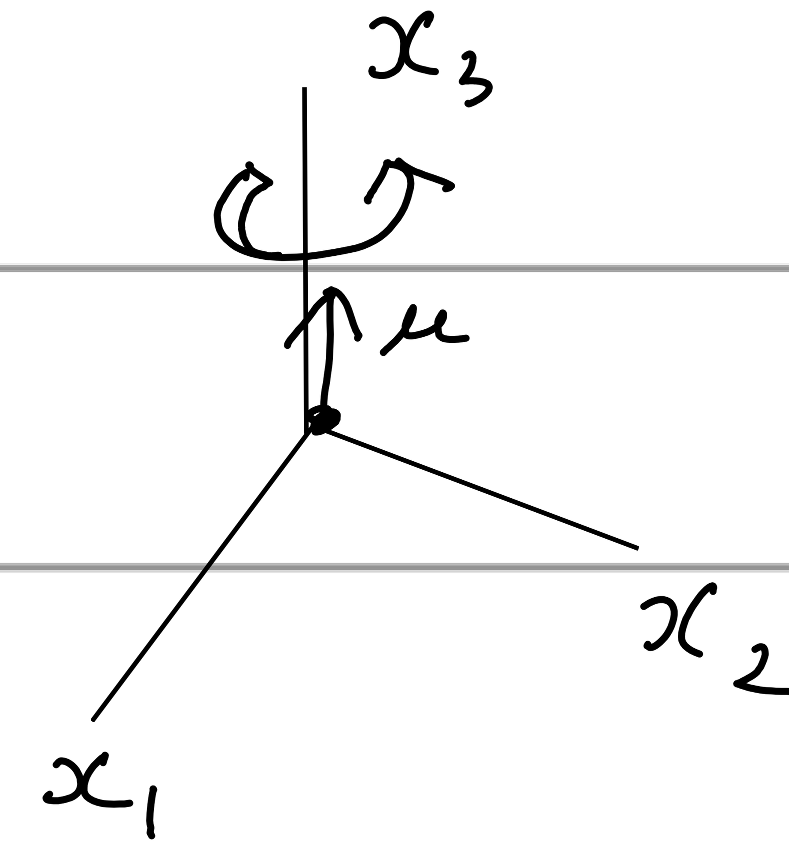
Champs de Vecteur
Moment angulaire

① Dans le cas $u = (0,0,1)$, on a

$$V_u = i L_3 = i(x_1 p_2 - x_2 p_1) = V_{\omega=1}$$

de l'exercice précédent

on a vu que e^{-tV} est une rotation d'un angle t autour de l'axe x_3



(2) On observe que pour une fonction f,

$$[x_j, p_j] f = x_j \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) f - \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_j f)$$

$$= -i\, x_j \cancel{\frac{\partial f}{\partial x_j}} + i f + i x_j \cancel{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = i f$$

donc

$$[x_j, p_j] = i \, Id$$

et donc

$$[L_1, L_2] = [x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3]$$

$$= [x_2 p_3, x_3 p_1] + [x_3 p_2, x_1 p_3]$$

$$= x_2 p_1 [p_3, x_3] + p_2 x_1 [x_3, p_3]$$

$$= -i\, x_2 p_1 + i\, p_2 x_1 = i L_3$$

de même pour les autres.

(3) On a $U \wedge W = \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} U_j W_k e_l$

avec $\varepsilon_{j,k,l} \in \{-1, 0, 1\}$ "symbole de levi Civita".

et vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a vu que $[L_j, L_k] = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{j,k,l} \, i L_l$

et $L \cdot e_l = L_l$, donc

$$[V_u, V_w] = [iL.U, iL.W] = -\sum_{j,k=1} U_j W_k [L_j, L_k]$$

$$= -i \sum_{j,k,l=1}^{3} U_j W_k \varepsilon_{jkl} L_l$$

$$= -i \sum_{j,k,l=1}^{3} U_j W_k \varepsilon_{jkl} e_l . L$$

$$= -i (U \wedge W) . L = -V_{u \wedge w} .$$