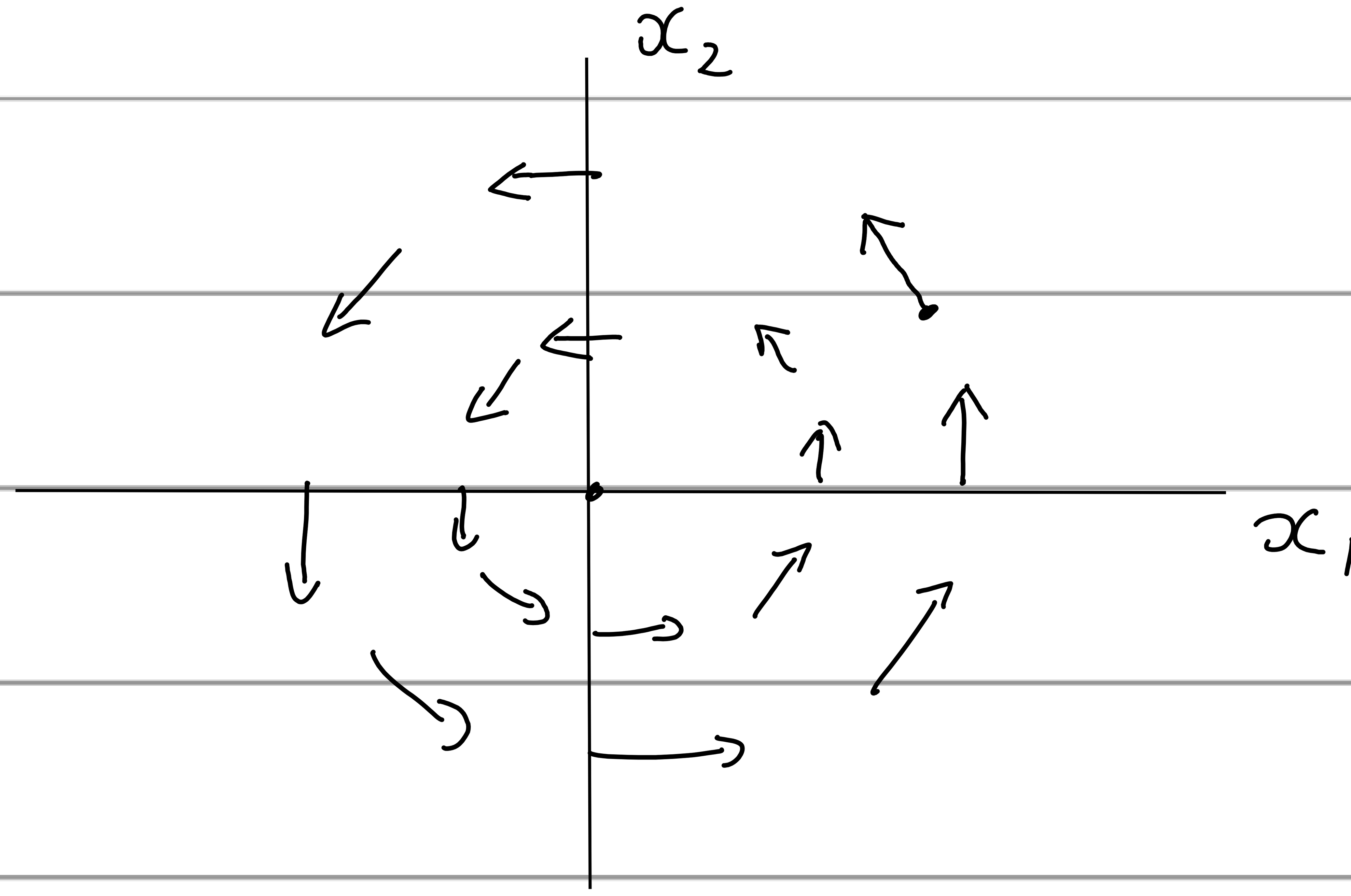
Champs de Vecteur
Flot de rotation sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} z = x_1 + i x_2 = r e^{i\theta} \\ \bar{z} = x - i x_2 = r e^{-i\theta} \end{cases}$$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$,

et le champ de vecteur $V = \omega \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ sur $\mathbb{R}^2$

(1) Allure



on écrit pour une fonction f,

$$\begin{aligned} V(f) &= \omega \frac{\partial f}{\partial \theta} = \omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(-\omega r \sin\theta \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega r \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f \\ &= \left(-\omega x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f, \end{aligned} \qquad \begin{cases} V_1 = -\omega x_2 \\ V_2 = \omega x_1 \end{cases}$$

$$V(f) = \omega \frac{\partial f}{\partial \theta} = \omega \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} \right)$$
$$= \Big(\underbrace{\omega i z}_{V_z} \frac{\partial}{\partial z} - \underbrace{\omega i \bar{z}}_{V_{\bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big) f$$

② Flot $\phi^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

solution de $\frac{d\phi^t}{dt} = V(\phi^t(x))$.

- En coordonnées polaires, cela s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = V_r = 0 \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = V_\theta = \omega \end{cases} \iff \begin{cases} r(t) = r(0) \\ \theta(t) = \theta(0) + \omega t \end{cases}$$

- En coordonnées cartésiennes, cela s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1 = -\omega x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = V_2 = \omega x_1 \end{cases}$$
: système couplé moins simple à résoudre

- En coordonnées $(z, \bar{z})$,

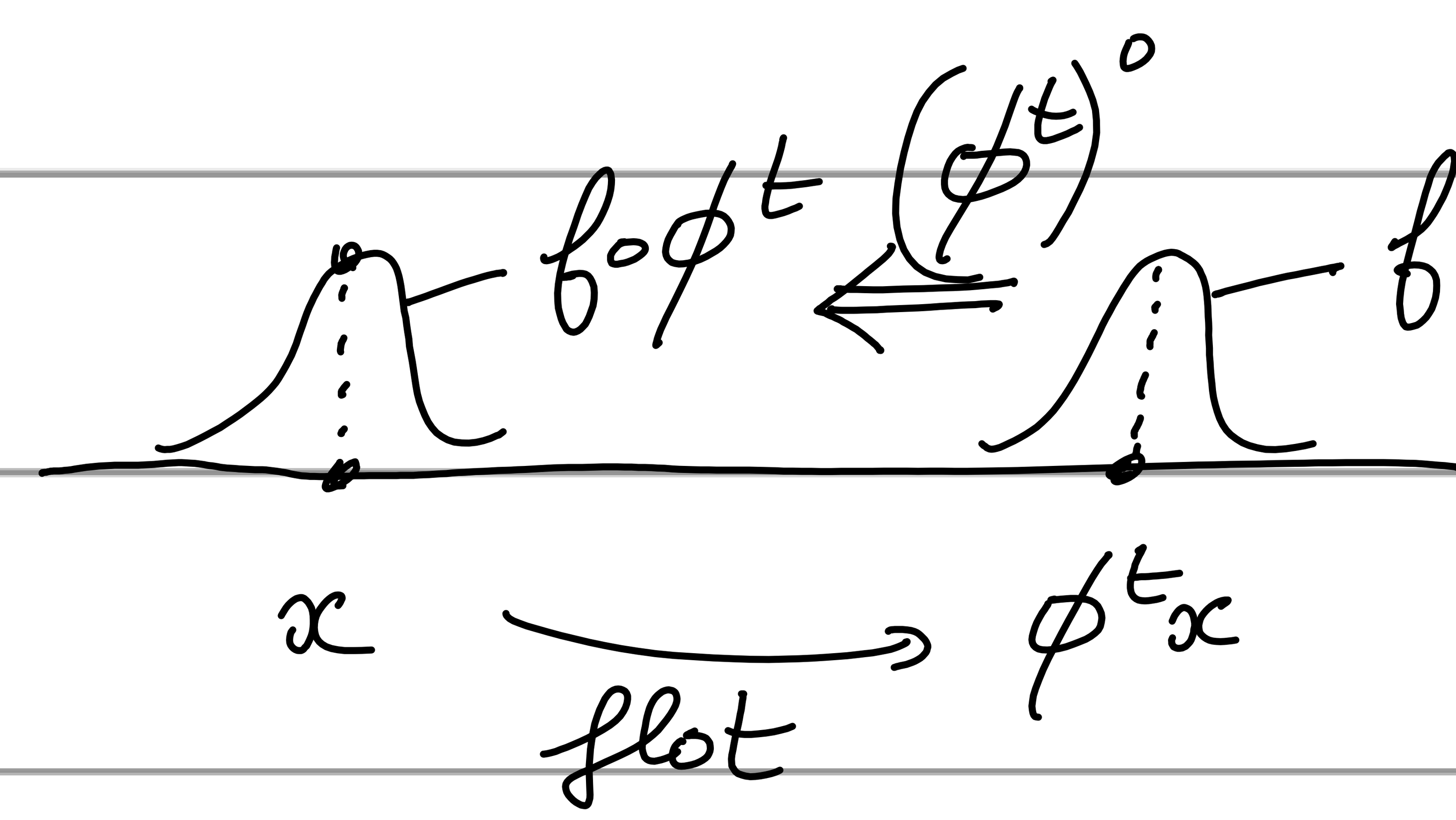
$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = V_z = \omega i z \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = V_{\bar{z}} = -\omega i \bar{z} \end{cases} \iff \begin{cases} z(t) = z(0)\, e^{i\omega t} \\ \bar{z}(t) = \bar{z}(0)\, e^{-i\omega t} \end{cases}$$

③ Opérateur de composition par le flot : ϕ^t

$$(\phi^t)^\circ : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ f \longmapsto f\circ\phi^t \end{cases}$$

aussi appelé "transport" ou "pull back" ou "tiré en arrière"

<u>schéma</u> :



par définition du flot, $\dfrac{d f\circ\phi^t}{dt} = V(f\circ\phi^t)$

donc $\dfrac{d(\phi^t)^\circ}{dt} f = V(\phi^t)^\circ f$, $\forall$ fonction f,

donc

$$\frac{d(\phi^t)^\circ}{dt} = V\circ(\phi^t)^\circ, \quad (\phi^{t=0})^\circ = Id$$

donc formellement $(\phi^t)^\circ = e^{tV}$, $t\in\mathbb{R}$

(groupe d'opérateurs à un paramètre $t\in\mathbb{R}$)

(4) $p_1 = -i \frac{\partial \cdot}{\partial x_1}$, $p_2 = -i \frac{\partial \cdot}{\partial x_2}$

on a vu en (1) que $V = -\omega x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$

$= -i\omega x_2 p_1 + i\omega x_1 p_2$

$\Leftrightarrow L = -iV = \omega (x_1 p_2 - x_2 p_1)$ "moment angulaire"

rem : utiliser $L = (-i) V$ plutôt que V

est une convention ; on choisit cela car

$L^+ = L$: autoadjoint ($\Leftrightarrow V^+ = -V$: anti autoadj.)

(preuve par intégration par parties)

L'inconvénient est d'écrire l'opérateur de composition :

$(\phi^t)^\circ = e^{tV} = e^{itL}$

son adjoint : $((\phi^t)^\circ)^+ = e^{tV^+} = e^{-itL^+} = e^{-itL}$

: "opérateur de transfert"

ou "push forward" ou "tiré en avant"