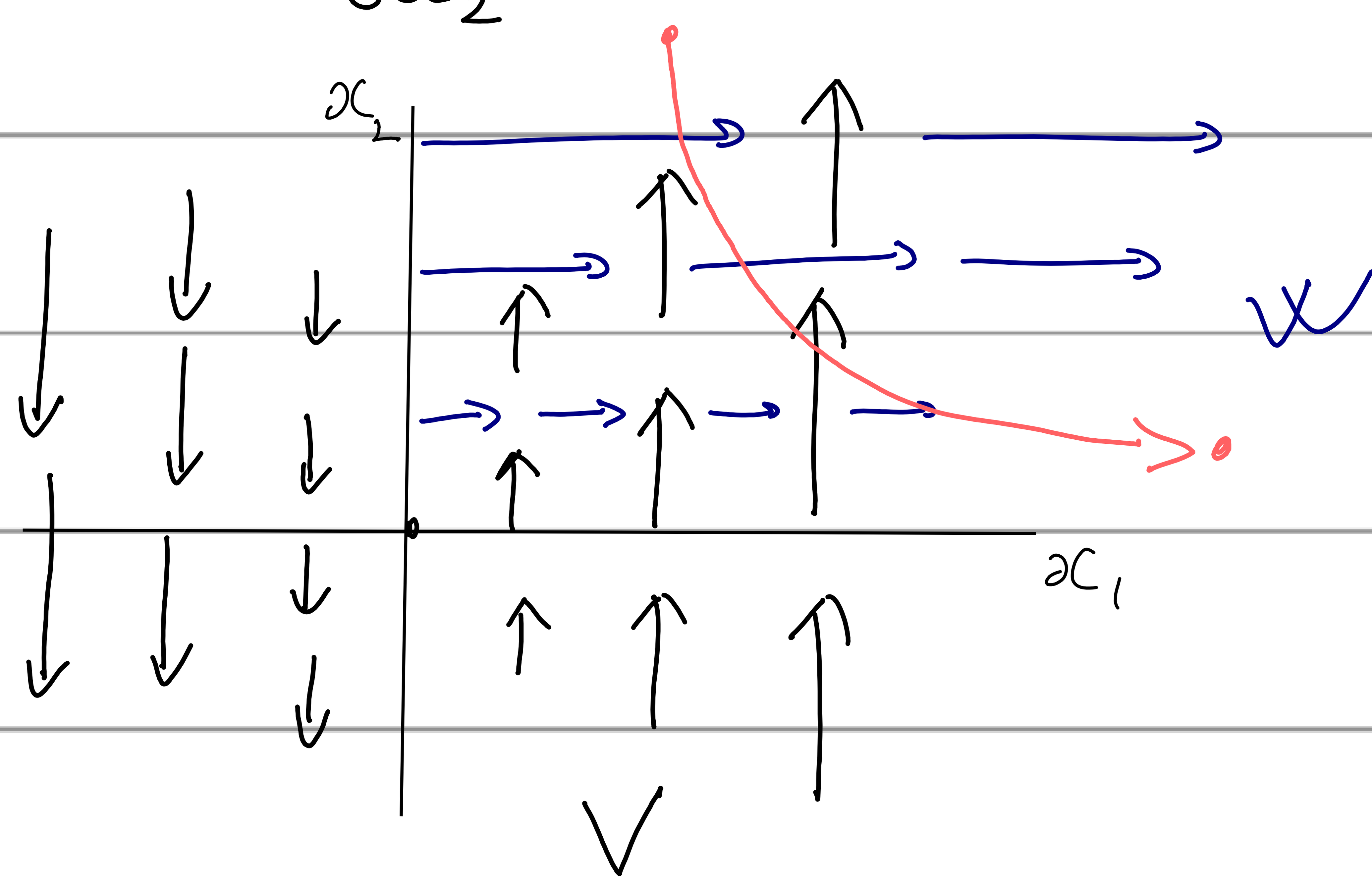
Champs de Vecteur
Exemple de crochet de Lie

sur le plan $M = \mathbb{R}^2$,

on considère les champs de vecteurs :

$$V = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad W = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

schémas :



On calcule $Z := [V, W]$, par

$$Z(f) = V(W(f)) - W(V(f))$$

$$= x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\right) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

exercice précédent (on peut oublier les dérivées 2^{nd})

$Z = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$: traject. sont des hyperboles (exercice précédent) en rouge sur la figure.

En cours, on montre que si on note ϕ_Z^t le flot généré par $Z = [V, W]$,

alors $\phi_Z^{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_V^{-\varepsilon} \phi_W^{-\varepsilon} \phi_V^{\varepsilon} \phi_W^{\varepsilon}$

preuve formelle : $\phi_V^{-\varepsilon} \phi_W^{-\varepsilon} \phi_V^{\varepsilon} \phi_W^{\varepsilon} = e^{-\varepsilon V} e^{-\varepsilon W} e^{\varepsilon V} e^{\varepsilon W}$

$$\approx \left(1 - \varepsilon V + \frac{\varepsilon^2}{2} V^2\right)\left(1 - \varepsilon W + \frac{\varepsilon^2}{2} W^2\right)$$

$$\left(1 + \varepsilon V + \frac{\varepsilon^2}{2} V^2\right)\left(1 + \varepsilon W + \frac{\varepsilon^2}{2} W^2\right) + O(\varepsilon^3)$$

$$= 1 - \cancel{\varepsilon V} - \cancel{\varepsilon W} + \cancel{\varepsilon V} + \cancel{\varepsilon W}$$

$$+ \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2} V^2} + \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2} W^2} + \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2} V^2} + \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2} W^2}$$

$$+ \cancel{\varepsilon^2 V W} - \cancel{\varepsilon^2 V^2} - \cancel{\varepsilon^2 V W} - \varepsilon^2 W V - \cancel{\varepsilon^2 W^2} + \varepsilon^2 V W$$

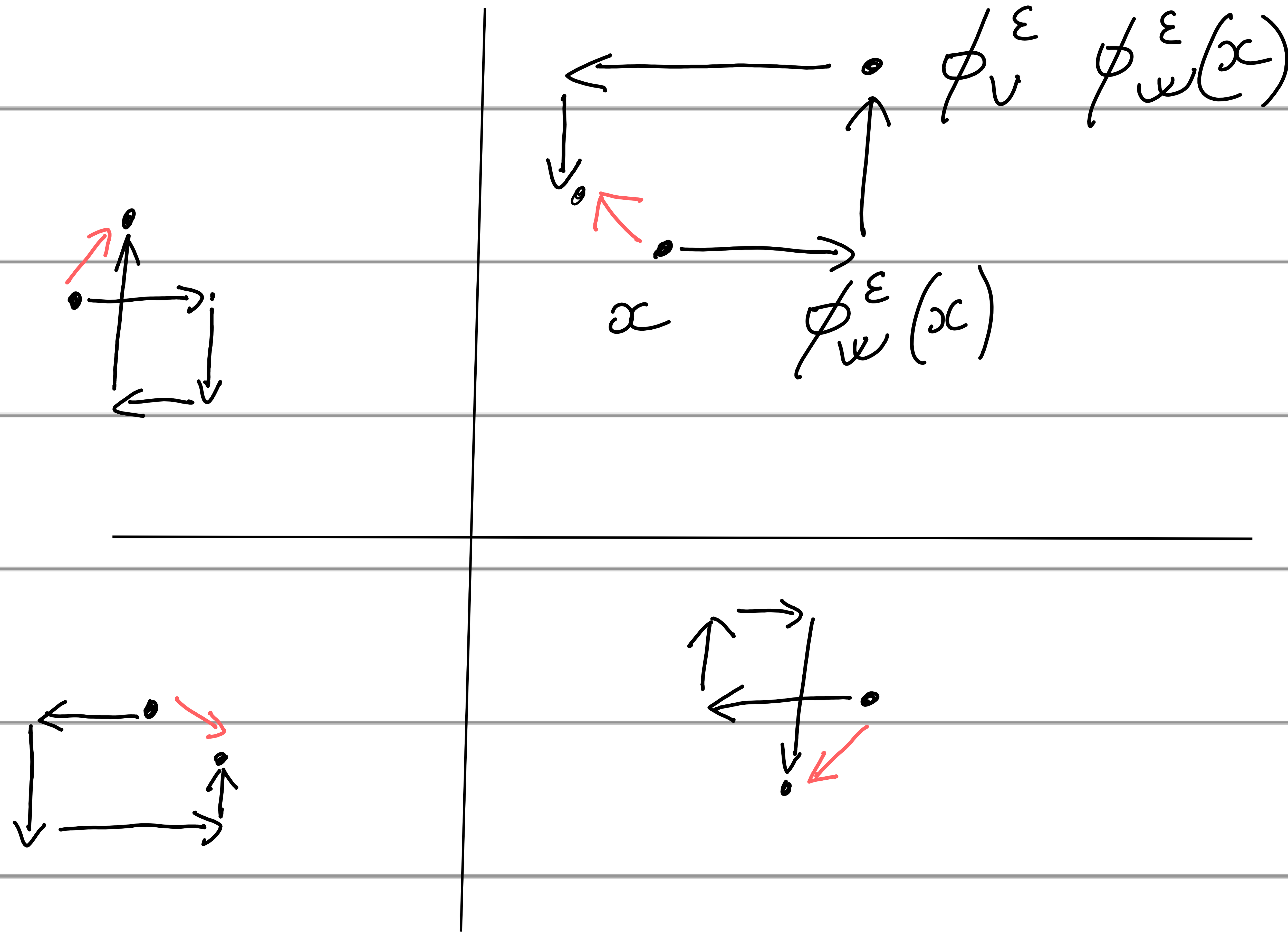
$$+ O(\varepsilon^3)$$

$$= 1 + \varepsilon^2 [V, W] + O(\varepsilon^3)$$

$$= e^{\varepsilon^2 [V, W]} + O(\varepsilon^3)$$

$$= \phi_{[V,W]}^{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^3)$$

ici cela correspond au schéma suivant :



donnant le champ Z :