Champs de Vecteur
Crochet de Lie

Rappel de cours

En cours on montre qu'un champ de vecteur

1) s'exprime en coordonnées comme un opérateur différentiel d'ordre 1 :

$$(1) \qquad V = \sum_{j=1}^{n} V_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

2) de façon équivalente, V est une "dérivation", c'est à dire pour toute fonctions $f, g \in C^\infty(M)$,

$$(2) \qquad V(fg) = V(f)\,g + f\,V(g) \qquad \text{"formule de Leibnitz"}$$

(on vérifie facilement que (1) $\Rightarrow$ (2), en cours on montre que réciproquement (2) $\Rightarrow$ (1))

• Soit V, W : deux champs de vecteurs.

Soit $Z := VW - WV =: [V, W]$

opérateur différentiel à priori d'ordre 2,

On va montrer que : Z est un champ de vecteur.

de deux façons différentes.

$\boxed{\text{preuve 1}}$: on va montrer que $Z = [V, W]$

s'écrit sous la forme :

$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k \frac{\partial \cdot}{\partial x_k}$$

Soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction, alors

$$Z(f) = V(W(f)) - W(V(f))$$

$$= \sum_j V_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_k W_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) - \sum_j W_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_k V_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$= \sum_j V_j \sum_k \left(\frac{\partial W_k}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + W_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)$$

$$- \sum_j W_j \sum_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + V_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)$$

$$= \sum_k \underbrace{\left(\sum_j V_j \frac{\partial W_k}{\partial x_j} - W_j \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right)}_{Z_k} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$+ \sum_{j,k} V_j W_k \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right)}_{=0}$$

$$= \sum_k Z_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$ ∎

"il n'y a pas d'opérateur d'ordre 2"

$\boxed{\text{preuve 2}}$ on va montrer que Z est une dérivation.

$$Z(fg) = V(W(fg)) - W(V(fg))$$

$$= V\left(W(f)g + fW(g)\right) - W\left(V(f)g + fV(g)\right)$$

$$= V(W(f))g + \cancel{W(f)V(g)} + \cancel{V(f)W(g)} + fV(W(g))$$

$$- W(V(f))g - \cancel{V(f)W(g)} - \cancel{W(f)V(g)} - fW(V(g))$$

$$= \left(V(W(f)) - W(V(f))\right)g + f\left(V(W(g)) - W(V(g))\right)$$

$$= Z(f)g + fZ(g)$$ ∎