

Champs de vecteur

Exemple de flot

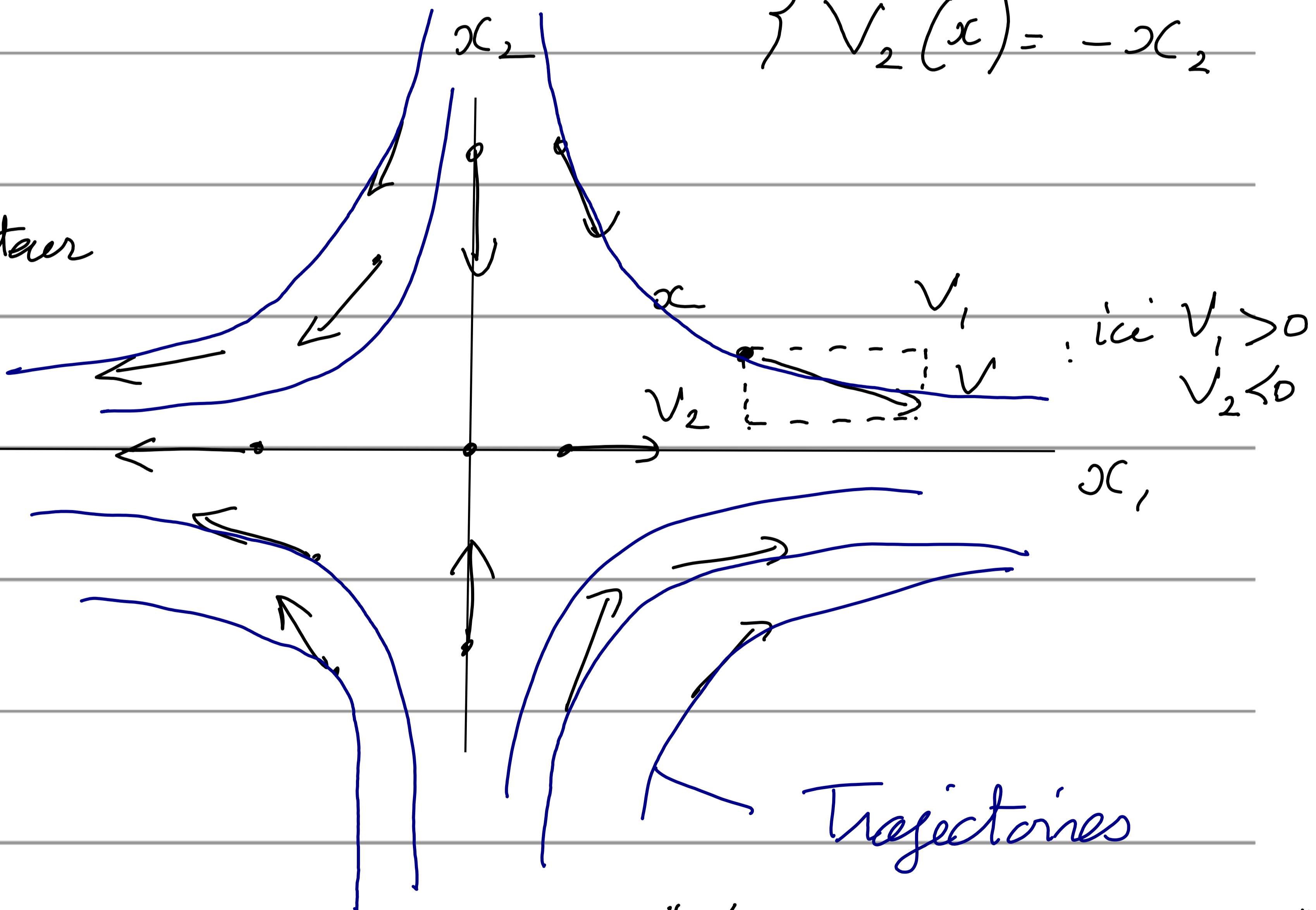
Sur $M = \mathbb{R}^2$, on considère le champ de vecteurs

$$V(x) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

c'est à dire que ses composantes sont

$$\begin{cases} V_1(x) = x_1 \\ V_2(x) = -x_2 \end{cases}$$

schéma :
du champ de vecteur



Pour le moment on a seulement "l'aspect du champ de vecteur".

A la fin de l'exercice, on démontre précisément que les trajectoires sont des hyperboles.

Flot: $\phi^t: M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$

défini par $\frac{d\phi^t}{dt} = V(\phi^t(x))$ (*)

en coordonnées: $\phi^t = (x_1(t), x_2(t))$,

alors (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1(x) = x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = V_2(x) = -x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_1(0) e^t \\ x_2(t) = x_2(0) e^{-t} \end{cases}$ par intégration

avec $x_1(0), x_2(0)$: coord du point initial $x(0)$.

on déduit $x_1(t) x_2(t) = x_1(0) x_2(0)$: constante/t

$\Leftrightarrow x_2(t) = \frac{c}{x_1(t)}$: équ. d'une hyperbole.

les trajectoires sont donc des hyperboles