Champs de Vecteur
Formule de changement de coordonnées

Si $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$ sont deux systèmes de coordonnées locales sur une variété M de dimension n,

si $V \in C^\infty(M; TM)$: champ de vecteur sur M

$f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$: fonction sur M,

alors :

$$V(f) = \sum_{j=1}^{n} V_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

or d'après la formule de dérivée de fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)$$

donc $$V(f) = \sum_j V_j(x) \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

$$= \sum_k \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} V_j(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right)}_{W_k(x)} \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

donc $$W_k(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) V_j(x)$$