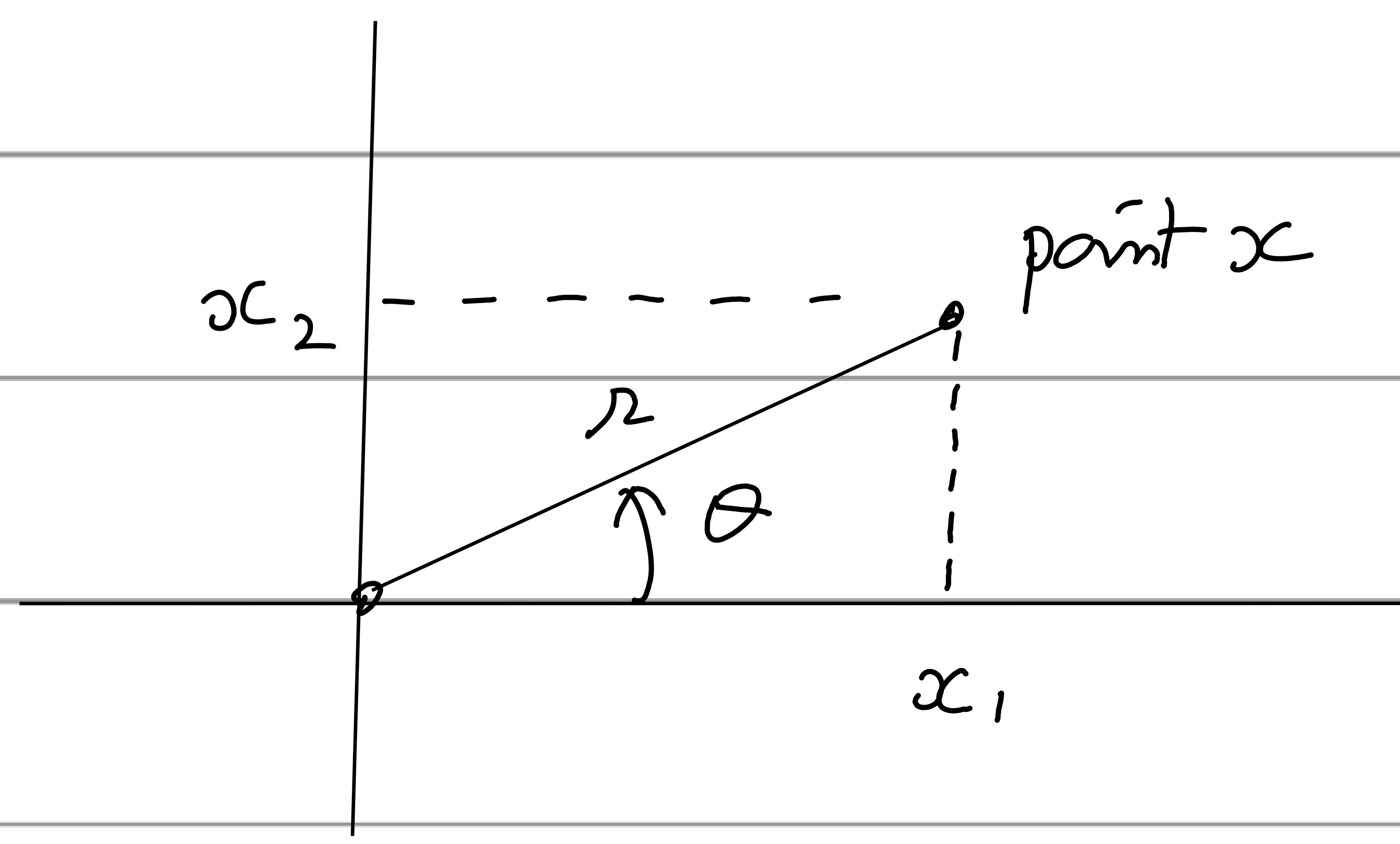
Champs de Vecteur,
Coordonnées cartésiennes ou polaires

$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta$

plan $M = \mathbb{R}^2$:



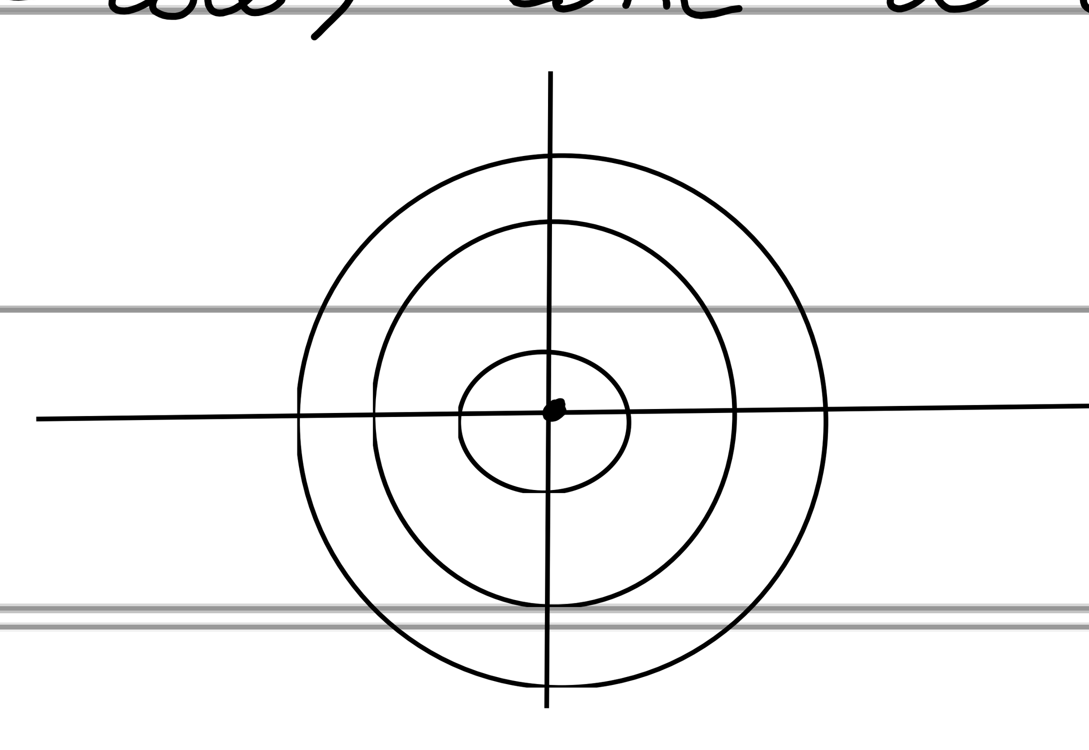
① on a $x_1^2 + x_2^2 = r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) = r^2$

donc

$$f(r,\theta) = e^{-r^2} = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

expression en coordonnées polaires — expression en coord. cartésiennes

Les lignes de niveau $f(x) = \text{cste}$ correspondent donc à $r = \text{cste}$, donc à des cercles de centre O



② on écrit, pour une fonction f quelconque,

$$V(f) = V_r(x)\frac{\partial f}{\partial r} + V_\theta(x)\frac{\partial f}{\partial \theta},$$

or par les formules de dérivées de fonctions composées:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r}$$

$$= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \theta}$$

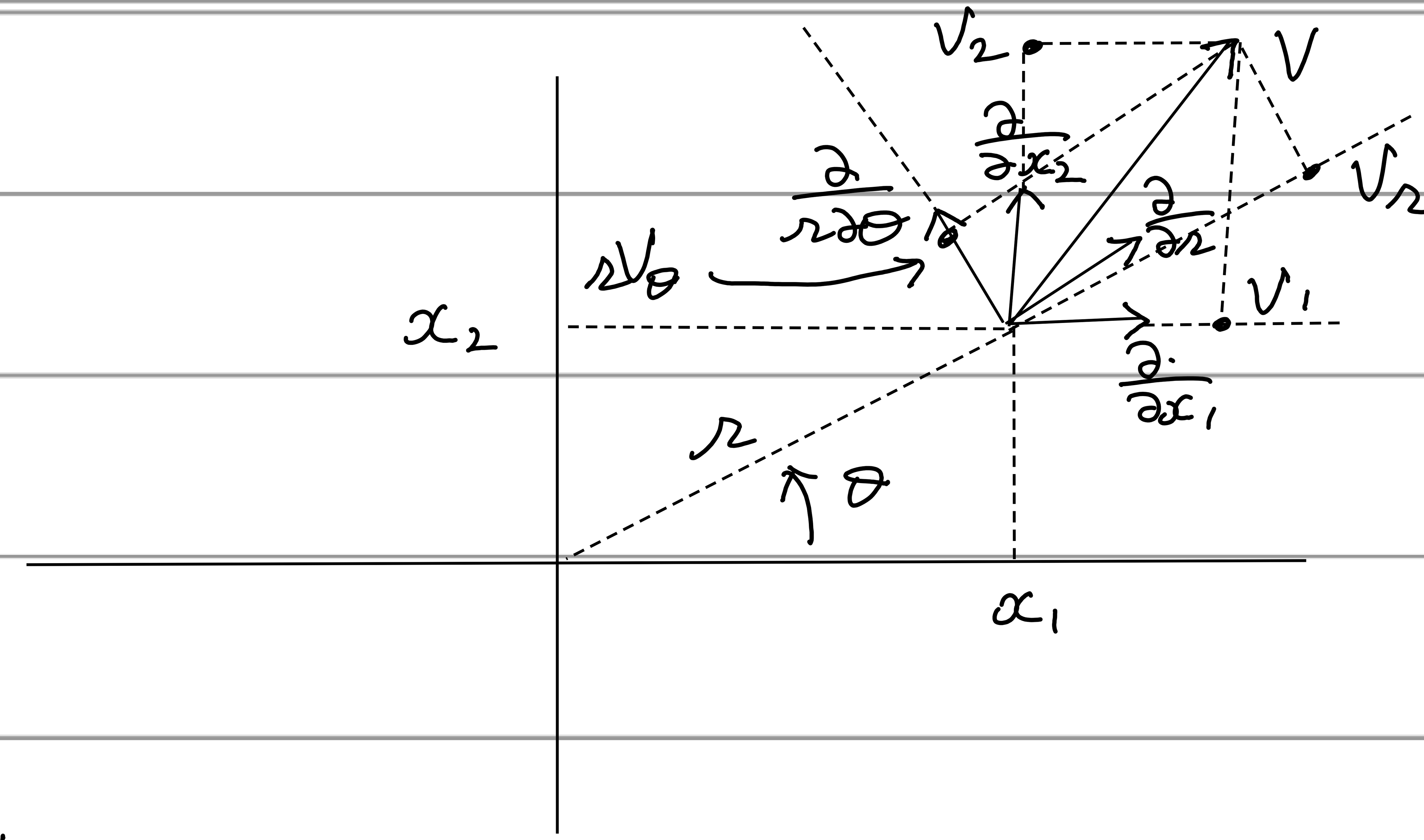
$$= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x_1} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

donc

$$V(f) = \underbrace{\left(\cos\theta\, V_r - r\sin\theta\, V_\theta\right)}_{V_1(x)}\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$+ \underbrace{\left(\sin\theta\, V_r + r\cos\theta\, V_\theta\right)}_{V_2(x)}\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

En cours de physique, on apprend à retrouver ce résultat à l'aide d'un schéma, avec les vecteurs de base orthonormée $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ ou $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r\partial \theta}\right)$ (voir chapitre métrique). obtenue par rotation d'un angle θ :



On déduit :
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matrice de rotation}} \begin{pmatrix} V_r \\ rV_\theta \end{pmatrix}$$

qui correspond à la formule cidessus.