

# Dynamique adiabatique et lent-rapide en mécanique ondulatoire. Phénomènes topologiques et description avec l'analyse semi-classique.

Frédéric Faure

Groupe de travail à l'institut Fourier, 5 mai 2017 puis 28 mai 2018 et Lyon  
10 janvier 2019.  
version 9/1/2019. Document in pdf.

## 1 Introduction

Dans la Section 2 on décrit la situation où l'opérateur **Hamiltonien dépendant lentement du temps**. Cela correspond à un système physique quantique dont les paramètres extérieurs varient lentement.

Dans la Section 3, on généralise cette situation : on décrit **deux systèmes couplés lent/rapide**, ce qui signifie que l'un varie lentement par rapport à l'autre. (La situation précédente est un cas particulier si le temps est considéré comme une variable dynamique).

Dans les deux cas le formalisme est identique. Il fait appel à l'**analyse semi-classique**. Il est intéressant de noter que des **aspects géométriques** (espaces fibrés avec connections) apparaissent dans cette théorie qui relie l'analyse, la théorie spectrale, la géométrie et la topologie. Il y a de nombreuses applications en physique quantique.

**Références :** Le livre de Stefan Teufel [31] est une bonne référence sur le théorème adiabatique et ses applications en physique. Voir aussi les Notes d'exposé de Y. Colin de Verdière, "Introduction à la phase de Berry"..

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dynamique dépendant lentement du temps</b>	<b>2</b>
2.1	Évolution d'un vecteur . . . . .	3
2.2	Évolution d'un sous espace linéaire de dimension 1 . . . . .	3

2.3	Évolution d'un sous espace linéaire de dimension $n$ . . . . .	7
2.4	Le théorème adiabatique : réponse à la question 2.4. . . . .	10
2.5	Remarques et conséquences du théorème adiabatique 2.16 . . . . .	14
2.6	Preuve semi-classique du théorème adiabatique 2.16 . . . . .	14
2.7	Preuve plus constructive du théorème adiabatique 2.16 . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Propriétés topologiques des dynamiques lent-rapide couplées sur <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>19</b>
3.1	Reformulation semi-classique de l'équation d'évolution adiabatique (2.1) . .	19
3.2	Observation de transition de niveaux d'énergie en physique moléculaire . .	20
3.3	Modèle simple (forme normale) . . . . .	20
3.4	Modèle de Matsuno (1966) [26] des ondes équatoriales et interprétation topologique (P. Delplace, J. B. Marston, and A. Venaille [7]) . . . . .	28
3.5	Modèle général sur $\mathbb{R}^n$ . Formule de l'indice d'Atiyah-Singer . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Propriétés topologiques des dynamiques lent-rapide couplées sur une variété</b>	<b>42</b>
4.1	Théorème adiabatique pour les systèmes lent-rapides . . . . .	43
4.2	Exemple : couplage spin-orbite . . . . .	43
<b>A</b>	<b>Quantification, opérateurs pseudo-différentiels, analyse semiclassique sur <math>\mathbb{R}^{2d}</math></b>	<b>44</b>
A.1	Quantification et OPD . . . . .	44
A.2	Algèbre des opérateurs PDO . . . . .	45
A.3	Classes de symboles . . . . .	46
<b>B</b>	<b>Espaces fibrés vectoriels et topologie</b>	<b>46</b>
B.1	Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 réel sur $S^1$ . . . . .	46
B.2	Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 complexe sur $S^2$ . . . . .	49
B.3	Vector bundles in terms of transition functions . . . . .	53
<b>C</b>	<b>Codes informatique</b>	<b>57</b>
C.1	Matsuno spectrum . . . . .	57

## 2 Dynamique dépendant lentement du temps

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, on note  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire et  $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ . On suppose donnée une **fonction  $C^\infty$  d'opérateurs auto-adjoints**

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow H(t) : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Ce qui signifie précisément que  $H(t)$  est un opérateur à domaine  $\mathcal{D}$ , borné sur  $H(t) : (\mathcal{D}, \|H(t) \cdot\| + \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ .

## 2.1 Évolution d'un vecteur

Soit  $\tilde{\psi}(\tau) \in \mathcal{H}$ , avec  $\tau \in \mathbb{R}$  solution de l'équation de Schrödinger

$$i \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} = H(\epsilon\tau) \tilde{\psi}(\tau), \quad (2.1)$$

avec la condition initiale  $\tilde{\psi}(0) \in \mathcal{H}$  donnée et un paramètre  $\epsilon > 0$  fixé.

*Remarque 2.1.* Si  $\epsilon \ll 1$ , alors  $H(\epsilon\tau)$  “**varie lentement**” avec  $\tau$ .

### 2.1.1 Reformulation semiclassique :

Posons  $t = \epsilon\tau$ . Eq.(2.1) s'écrit

$$\boxed{i\epsilon \frac{d\psi}{dt} = H(t) \psi(t)}, \quad (2.2)$$

avec  $\psi(t) = \tilde{\psi}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ .

**Question 2.2.** Exprimer  $\psi(t)$  solution de (2.2), pour  $\epsilon \ll 1$ , avec une erreur  $O(\epsilon^k)$ , et  $k$  arbitraire ?

Nous allons voir qu'il est préférable de séparer ce problème d'évolution en deux parties : d'une part l'évolution d'un sous espace linéaire et d'autre part l'évolution des vecteurs dans ce sous espace.

## 2.2 Évolution d'un sous espace linéaire de dimension 1

Si le vecteur  $\psi(t)$  est solution de (2.2), considérons l'espace  $F(t)$  de dimension 1 qu'il engendre, aussi appelé « **état quantique** » :

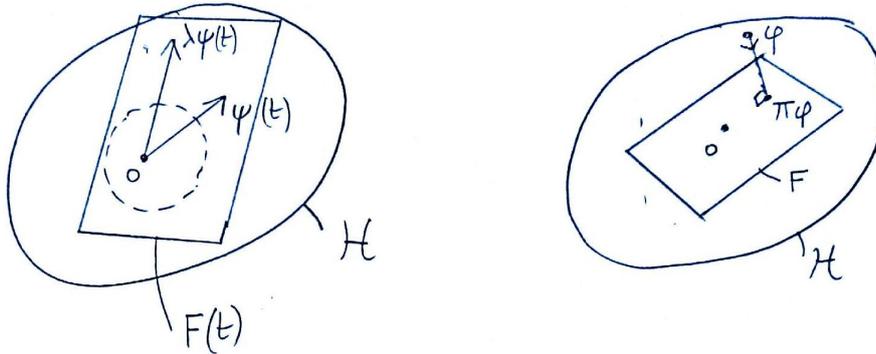
$$F(t) := \text{Span}(\psi(t)) := \{\varphi \in \mathcal{H}; \quad \varphi = \lambda\psi(t), \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Le **projecteur orthogonal** sur cet espace est <sup>1</sup>

$$\Pi(t) = \frac{|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|}{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle} : \mathcal{H} \rightarrow F(t) \subset \mathcal{H}. \quad (2.3)$$

---

1. On utilise la notation de Dirac qui est que  $\langle\psi(t)|$  est la forme linéaire  $\langle\psi(t)|\cdot\rangle$ , et  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  est l'opérateur de rang 1  $\psi(t)\langle\psi(t)|\cdot\rangle$ . Ce qui caractérise le projecteur orthogonal  $\Pi(t)$  sont les 3 propriétés  $\Pi(t)^* = \Pi(t)$ ,  $\Pi(t)^2 = \Pi(t)$  et  $\text{Im}(\Pi(t)) = F(t)$  que l'on vérifie à partir de (2.3).



**Lemme 2.3.** L'opérateur  $\Pi(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  est déterminé par

$$i\epsilon \frac{d\Pi(t)}{dt} = [H(t), \Pi(t)] \quad (2.4)$$

avec  $\Pi(0)$  donné.

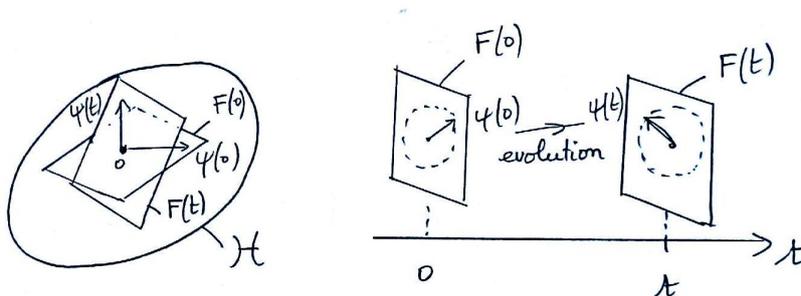
*Démonstration.* On remarque que  $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = cste$  car  $H^* = H$ . On a

$$\begin{aligned} i\epsilon \frac{d\Pi(t)}{dt} &\stackrel{(2.3)}{=} i\epsilon \frac{|\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}|}{\langle\psi|\psi\rangle} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{H|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|H.}{\langle\psi|\psi\rangle} \\ &= [H(t), \Pi(t)] \end{aligned}$$

□

**Question 2.4.** Étant donné  $\Pi(0)$ , exprimer le projecteur  $\Pi(t)$ , solution de (2.4), pour  $\epsilon \ll 1$ , avec une erreur  $O(\epsilon^k)$ , et  $k$  arbitraire ?

**Question 2.5.** Si on connaît la réponse à la question 2.4, comment obtenir la réponse à la question 2.2 ? C'est à dire **quelle est la phase** de  $\psi(t) \in F(t)$  ?



### 2.2.1 Réponse à la question 2.5 : « phase géométrique et dynamique de $\psi(t)$ » :

*Remarque 2.6.* Ici  $\epsilon > 0$  est quelconque, on ne suppose pas  $\epsilon \ll 1$  petit, autrement dit le résultat qui suit est exacte et ne demande pas l'hypothèse adiabatique<sup>2</sup>.

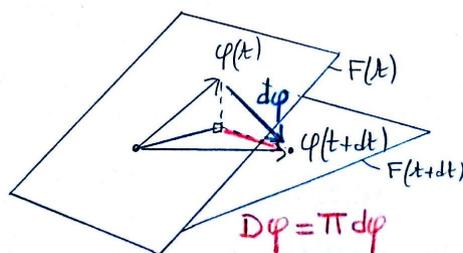
L'ensemble des espaces  $F(t) = \text{Im}(\Pi(t))$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  définissent un **fibré vectoriel Hermitien de rang 1**

$$F \rightarrow \mathbb{R}$$

Ce fibré est munit d'une **dérivée covariante  $D$  (ou connexion) de Levi-Civita (ou de Berry)** induite par  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{H}$ . Si  $t \rightarrow \varphi(t) \in F(t)$  est une fonction arbitraire, alors

$$\frac{D\varphi(t)}{dt} := \Pi(t) \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.5)$$

*Remarque 2.7.* Cette définition signifie que  $\frac{D\varphi(t)}{dt}$  mesure la composante « tangentielle » de  $\frac{d\varphi(t)}{dt}$  dans le sous espace  $F(t)$ .



C'est une **connection Hermitienne**, c'est à dire qui vérifie :

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi_1(t) | \varphi_2(t) \rangle = \langle \frac{D\varphi_1}{dt} | \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1 | \frac{D\varphi_2}{dt} \rangle.$$

*Démonstration.* Utiliser que  $\Pi\varphi_j = \varphi_j$  et  $\Pi^* = \Pi$  pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi_1(t) | \varphi_2(t) \rangle &= \langle \frac{d\varphi_1}{dt} | \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1 | \frac{d\varphi_2}{dt} \rangle = \langle \frac{d\varphi_1}{dt} | \Pi\varphi_2 \rangle + \langle \Pi\varphi_1 | \frac{d\varphi_2}{dt} \rangle \\ &= \langle \Pi \frac{d\varphi_1}{dt} | \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1 | \Pi \frac{d\varphi_2}{dt} \rangle = \langle \frac{D\varphi_1}{dt} | \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1 | \frac{D\varphi_2}{dt} \rangle. \end{aligned}$$

□

---

2. L'article original de Berry[2] a introduit le transport parallèle et l'holonomie (phase de Berry) en physique quantique dans un cadre adiabatique. La présence des deux phénomènes dans cet article a parfois donné l'impression qu'ils allait ensemble alors que ce n'est pas le cas.

On choisit  $\varphi(t) \in F(t)$  tel que  $\|\varphi(t)\| = 1, \forall t$ , et

$$\frac{D\varphi(t)}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

qui signifie que  $\varphi(t)$  **suit le transport parallèle**<sup>a</sup>. La solution est géométrique, car indépendante du paramétrage par  $t \in \mathbb{R}$  (ne dépend que du chemin  $t \rightarrow F(t) \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ ).

a. La **phase de Berry**  $\alpha_{\text{Berry}} \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  est l'holonomie de cette connexion dans le cas d'un chemin fermé dans  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  : si  $F(1) = F(0)$  alors  $\varphi(1) = e^{i\alpha_{\text{Berry}}} \varphi(0)$ .

**Lemme 2.8.** La solution  $\psi(t)$  de (2.2) est

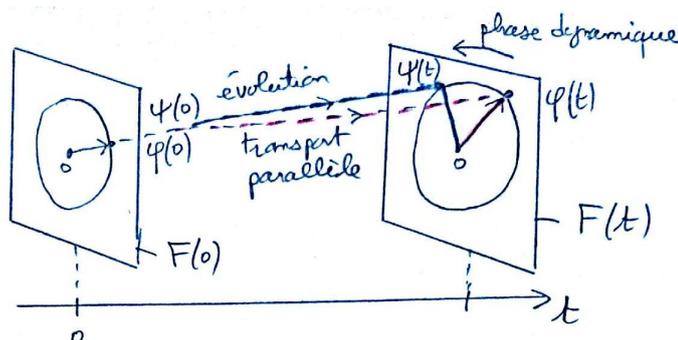
$$\psi(t) = Ae^{i\alpha(t)}\varphi(t) \quad (2.7)$$

avec

$$\alpha(t) = -\frac{1}{\epsilon} \int_0^t \frac{\langle \varphi(s) | H(s) \varphi(s) \rangle}{\langle \varphi(s) | \varphi(s) \rangle} ds \quad : \text{"phase dynamique"} \quad (2.8)$$

et  $A = \langle \varphi(0) | \psi(0) \rangle \in \mathbb{C}$ .

Remarque 2.9.  $\frac{\langle \varphi(s) | H(s) \varphi(s) \rangle}{\langle \varphi(s) | \varphi(s) \rangle}$  est « l'énergie moyenne instantanée ».



Démonstration. Comme  $\varphi(t)$  est une base de  $F(t)$  on peut écrire (2.7). On a  $\dot{\psi} \stackrel{(2.7)}{=} i\dot{\alpha}\psi +$

$Ae^{i\alpha} \dot{\varphi} \stackrel{(2.2)}{=} -\frac{i}{\epsilon} H\psi$ . Donc

$$i\dot{\alpha}\langle \psi | \psi \rangle + Ae^{i\alpha}\langle \psi | \dot{\varphi} \rangle = -\frac{i}{\epsilon}\langle \psi | H\psi \rangle$$

or  $\langle \psi | \dot{\varphi} \rangle = \langle \Pi\psi | \dot{\varphi} \rangle = \langle \psi | \Pi\dot{\varphi} \rangle = \langle \psi | \frac{D\varphi}{dt} \rangle \stackrel{2.6}{=} 0$ , donc

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\langle \psi | H\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\langle \varphi | H\varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}, \quad (2.9)$$

donnant (2.8). □

D'après la réponse à la question 2.5, on peut donc se concentrer sur la question 2.4 qui donnera aussi une réponse à la question 2.2.

## 2.3 Évolution d'un sous espace linéaire de dimension $n$

dans cette Section, on généralise l'étude de la Section 2.2, au cas d'un sous espace de dimension  $n \geq 1$  plus grande. Ce sera utile dans la suite.

### 2.3.1 Espace fibré $F \rightarrow \mathbb{R}$

A une date  $t_1 \in \mathbb{R}$ , considérons un sous espace linéaire de dimension  $n \geq 1$ , noté  $F(t_1) \subset \mathcal{H}$ . On note  $\Pi(t_1) : \mathcal{H} \rightarrow F(t_1) \subset \mathcal{H}$  le projecteur orthogonal de rang  $n$  sur  $F(t_1)$  qui caractérise donc  $F(t_1)$ .

Notons  $U(t_2, t_1) \in U(\mathcal{H})$  l'opérateur unitaire d'évolution, solution de

$$i\epsilon \frac{dU(t_2, t_1)}{dt_2} = H(t_2)U(t_2, t_1), \quad U(t_1, t_1) = \text{Id}. \quad (2.10)$$

ainsi  $\psi(t_2) = U(t_2, t_1)\psi(t_1)$ .

**Lemme 2.10.** « *Évolution d'un projecteur* ». L'évolution du projecteur  $\Pi(t_1)$  est un projecteur orthogonal  $\Pi(t)$  de rang  $n$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , défini par

$$\Pi(t) \circ U(t, t_1) = U(t, t_1) \circ \Pi(t_1). \quad (2.11)$$

et solution de l'équation

$$\begin{aligned} i\epsilon \frac{d\Pi(t)}{dt} &= [H(t), \Pi(t)] \\ \Leftrightarrow \left[ \left( -i\epsilon \frac{d}{dt} \right) + H(t), \Pi(t) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

*Démonstration.* On dérive (2.11) par rapport à  $t_2$  :

$$\dot{\Pi}U + \Pi\dot{U} = \dot{U}\Pi \Leftrightarrow \dot{\Pi}U - \frac{i}{\epsilon}\Pi H U = -\frac{i}{\epsilon}H U \Pi$$

et on fait  $t = t_2 = t_1$  :

$$\dot{\Pi} - \frac{i}{\epsilon}\Pi H = -\frac{i}{\epsilon}H \Pi \Leftrightarrow \dot{\Pi} = -\frac{i}{\epsilon}[H, \Pi]$$

Pour justifier la deuxième ligne, on a pour tout vecteur  $\psi(t) \in \text{Im}(\Pi(t))$ ,

$$\left[ i\epsilon \frac{d}{dt}, \Pi(t) \right] \psi = i\epsilon \frac{d}{dt} (\Pi(t) \psi(t)) - i\epsilon \Pi \frac{d\psi}{dt} = i\epsilon \left( \frac{d\Pi(t)}{dt} \right) \psi(t)$$

donc  $[i\epsilon \frac{d}{dt}, \Pi(t)] = i\epsilon \frac{d\Pi(t)}{dt}$ , et

$$i\epsilon \frac{d\Pi(t)}{dt} = [H(t), \Pi(t)] \Leftrightarrow \left[ i\epsilon \frac{d}{dt}, \Pi(t) \right] = [H(t), \Pi(t)] \Leftrightarrow \left[ -i\epsilon \frac{d}{dt} + H(t), \Pi(t) \right] = 0$$

□

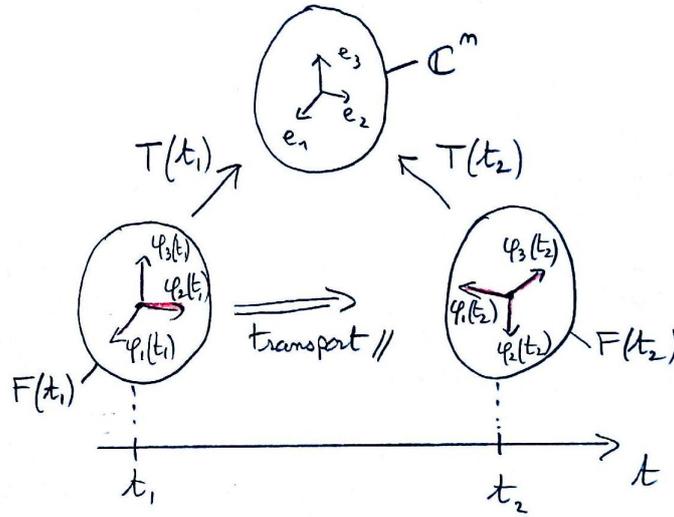
On définit

$$F(t) := \text{Im}\Pi(t)$$

qui est un sous espace de  $\mathcal{H}$  de dimension  $n$ . L'ensemble de ces sous espaces pour  $t \in \mathbb{R}$  forment un fibré vectoriel  $F \rightarrow \mathbb{R}$  de rang  $n$ , munit de la connection Hermitienne de Levi-Civita (2.5).

### 2.3.2 Trivialisation du fibré

L'objectif est de représenter dans l'espace fixe  $\mathbb{C}^n$  la dynamique des vecteurs de  $F(t) \subset \mathcal{H}$ .



A l'instant  $t_1$ , on choisit une base orthonormée de  $F(t_1)$ , notée  $(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_1), \dots, \varphi_n(t_1))$  avec  $\varphi_j(t_1) \in F(t_1)$ . On définit  $\varphi_j(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , en **suivant le transport parallèle** :

$$\frac{D\varphi_j(t)}{dt} = 0, \quad \forall j, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Ainsi  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une base o.n. de  $F(t)$  et

$$\Pi(t) = \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)\rangle\langle\varphi_j(t)|.$$

On note  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  et pour  $t \in \mathbb{R}$ , on introduit l'opérateur :

$$T(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

donné par :

$$T(t) := \sum_{j=1}^n |e_j\rangle\langle\varphi_j(t)|$$

c'est à dire qui envoie la base  $(\varphi_j(t))_j$  de  $F(t)$  vers la base  $(e_j)_j$  canonique<sup>3</sup> de  $\mathbb{C}^n$ . Autrement dit

$$T(t) : F(t) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

est unitaire. Son adjoint est

$$(T(t))^* = \sum_{j=1}^n |\varphi_j(t)\rangle\langle e_j| \quad : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{H}$$

On définit  $\tilde{H}(t)$  par

$$\tilde{H}(t) = T(t) \circ H(t) \circ T^*(t) \quad (2.14)$$

et

$$\tilde{U}(t_2, t_1) = T(t_2) \circ U(t_2, t_1) \circ T^*(t_1) \quad (2.15)$$

c'est à dire que l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(t_1) \subset \mathcal{H} & \xrightarrow{T(t_1)} & \mathbb{C}^n \\ U(t_2, t_1) \downarrow & & \tilde{U}(t_2, t_1) \downarrow \\ F(t_2) \subset \mathcal{H} & \xrightarrow{T(t_2)} & \mathbb{C}^n \end{array} \quad (2.16)$$

**Lemme 2.11.** « *Dynamique réduite dans  $\mathbb{C}^n$*  ». On a

$$i\epsilon \frac{d\tilde{U}(t_2, t_1)}{dt_2} = \tilde{H}(t_2) \tilde{U}(t_2, t_1). \quad (2.17)$$

Ainsi  $\tilde{H}(t)$  et  $\tilde{U}(t_2, t_1)$  sont respectivement le Hamiltonien et l'opérateur d'évolution réalisés dans  $\mathbb{C}^n$ .

*Démonstration.* On a les relations

$$(T(t))^* \circ T(t) = \Pi(t), \quad T(t) \circ (T(t))^* = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}.$$

$$(T(t))^* = \Pi(t) \circ (T(t))^* \quad (2.18)$$

$$(T(t_2))^* \circ \tilde{U}(t_2, t_1) \stackrel{(2.15)}{=} U(t_2, t_1) \circ (T(t_1))^* \quad (2.19)$$

$$\Pi(t) \circ \frac{d(T(t))^*}{dt} \stackrel{(2.13)}{=} 0, \quad \frac{dT(t)}{dt} \circ \Pi(t) = 0. \quad (2.20)$$

On écrit

$$i\epsilon \frac{d\tilde{U}(t_2, t_1)}{dt_2} \stackrel{(2.15)}{=} i\epsilon \frac{dT}{dt} U(t_2, t_1) T^*(t_1) + i\epsilon T(t_2) \frac{dU}{dt_2} T^*(t_1)$$

---

3. i.e. un vecteur de base est  $e_j = \left(0, \dots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{C}^n$ .

Concernant le premier terme :

$$\begin{aligned} \frac{dT(t_2)}{dt_2} U(t_2, t_1) T^*(t_1) &\stackrel{(2.18)}{=} \frac{dT(t_2)}{dt_2} U(t_2, t_1) \Pi(t_1) T^*(t_1) \stackrel{(2.11)}{=} \frac{dT(t_2)}{dt_2} \Pi(t_2) U(t_2, t_1) T^*(t_1) \\ &\stackrel{(2.20)}{=} 0. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} i\epsilon \frac{d\tilde{U}(t_2, t_1)}{dt_2} &= i\epsilon T(t_2) \frac{dU}{dt_2} T^*(t_1) \stackrel{(2.10)}{=} T(t_2) H(t_2) U(t_2, t_1) T^*(t_1) \\ &= T(t_2) H(t_2) U(t_2, t_1) T^*(t_1) \stackrel{(2.19)}{=} T(t_2) H(t_2) T^*(t_2) \tilde{U}(t_2, t_1) \\ &\stackrel{(2.14)}{=} \tilde{H}(t_2) \tilde{U}(t_2, t_1). \end{aligned}$$

□

*Remarque 2.12.* L'équation (2.9) et (2.8), est un cas particulier pour  $n = 1$  de Eq.(2.17).

*Remarque 2.13.* Pour obtenir (2.17) il a été important de considérer une base o.n.  $(\varphi_j(t))_j$  qui **suive le transport parallèle**.

*Remarque 2.14.* Si  $F(t_2) = F(t_1)$ , c'est à dire si on revient dans le même espace, alors les bases o.n. sont reliées par un opérateur unitaire  $H \in U(F(t_1))$  appelée **holonomie** :

$$\varphi_j(t_2) = H(\varphi_j(t_1))$$

et qui **généralise la phase de Berry** en dimension  $n \geq 1$ .

## 2.4 Le théorème adiabatique : réponse à la question 2.4.

On va s'intéresser à décrire l'évolution de sous espaces linéaires  $F(t) \subset \mathcal{H}$  décrit par un projecteur orthogonal  $\Pi(t)$ , t.q.  $F(t) = \text{Im}\Pi(t)$ . D'après le Lemme 2.11, on peut ensuite décrire l'évolution des vecteurs dans ces sous espaces.

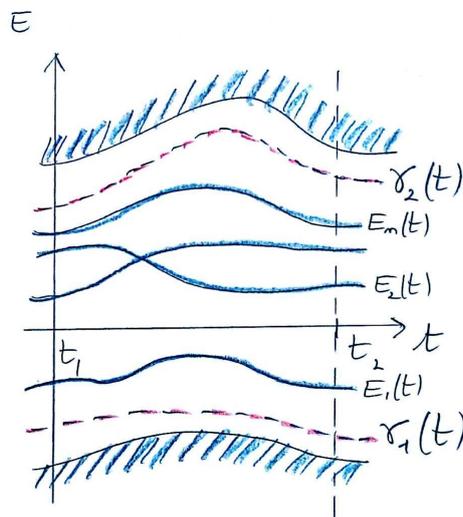
Notons  $\Sigma(t) \subset \mathbb{R}$  le spectre de  $H(t)$ . Sur un intervalle de temps  $t \in [t_1, t_2]$ , on suppose que il existe deux gaps séparant  $n$  valeurs propres  $(E_j(t))_{j=1\dots n}$  du reste du spectre c'est à dire deux courbes continues :

$$\begin{aligned} \exists \gamma_1, \gamma_2 : [t_1, t_2] &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ avec } \gamma_1(t) < \gamma_2(t), \quad \gamma_j(t) \notin \Sigma(t) \\ [\gamma_1(t), \gamma_2(t)] \cap \Sigma(t) &= \{E_1(t), E_2(t), \dots, E_n(t)\} \end{aligned}$$

On note  $F(t) = \bigoplus_{j=1}^n F_j(t)$  **la somme directe des espaces propres** des valeurs propres  $(E_j(t))_{j=1\dots n}$  et

$$\pi(t) = \sum_{j=1}^n \pi_j(t) : \mathcal{H} \rightarrow F(t) \tag{2.21}$$

est le projecteur orthogonal de rang  $n$  sur  $F(t)$  (somme des projecteurs  $\pi_j(t)$  sur les espaces propres de  $E_j(t)$ ).



### 2.4.1 Expression du projecteur spectral $\pi(t)$

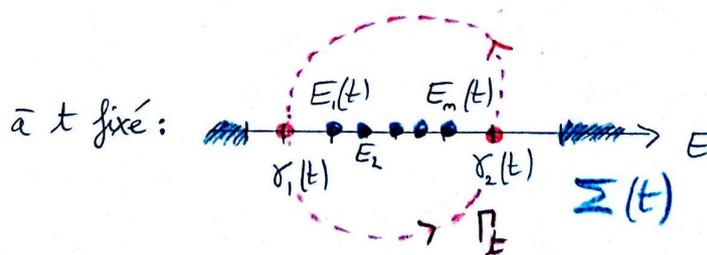
Si  $H(t)\psi_j(t) = E_j(t)\psi_j(t)$  (vecteur propre) alors

$$\pi_j(t) = \frac{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}{\langle\psi_j|\psi_j\rangle}.$$

On utilisera une autre formule (formule des résidus, ou **formule de Riesz**)[29, chap.6] :

$$\pi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} (z - H(t))^{-1} dz, \quad (2.22)$$

où  $\Gamma_t \subset \mathbb{C}$  est le cercle (ou contour) orienté de diamètre  $[\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$  qui ne rencontre donc pas le spectre  $\Sigma(t)$  de  $H(t)$ .



*Démonstration.* Utilisant la décomposition spectrale de  $H(t)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} (z \text{Id} - H(t))^{-1} dz &= \sum_j \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} \underbrace{(z - E_j(t))^{-1}}_{\text{meromorph. sur Int}(\Gamma_t)} dz \right) \pi_j(t) \\ &+ \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} \underbrace{(z - H(t))^{-1}}_{\text{holomorph. sur Int}(\Gamma_t)} \pi_{out}(t) dz \right) \\ &= \sum_j \pi_j(t) = \pi(t). \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne, on remarque que la première intégrale a un pôle en  $z = E_j(t)$  qui est entouré par la courbe  $\Gamma_t$ , et le théorème des résidus donne  $\frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} \underbrace{(z - E_j(t))^{-1}}_{\text{meromorph. sur Int}(\Gamma_t)} dz =$

1. La dernière intégrale n'a pas de pôle entourée par cette courbe et donc l'intégrale est nulle.  $\square$

#### 2.4.2 Remarques sur les « phénomènes de dégénérescence »

**Théorème 2.15.** [1][33] *Génériquement, si  $H(\lambda)$  est une famille de **matrices hermitiennes** ou **unitaires**  $n \times n$  dépendant continûment de paramètres  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ , alors l'ensemble  $W_k$  des paramètres  $\lambda \in W_k$  pour lesquels  $k$  **valeurs propres dégénèrent** (i.e.  $H(\lambda)$  a un espace propre de dimension  $k$ ) est un ensemble de codimension<sup>a</sup>*

$$\text{codim}(W_k) = k^2 - 1$$

*Si  $H(\lambda)$  est une famille de **matrices symétriques réelles**, ou **orthogonales** alors*

$$\text{codim}(W_k) = \frac{1}{2}k(k+1) - 1$$

---

a. i.e.  $\dim(W_k) = p - \text{codim}(W_k)$

multiplicité $k$ :	2	3	4
cas Hermitien $\text{codim}(W_k) = k^2 - 1$	3	8	15
cas symétrique réel $\text{codim}(W_k) = \frac{1}{2}k(k+1) - 1$	2	5	9

*Démonstration.* Une matrice Hermitienne  $k \times k$  a  $k^2$  paramètres réels indépendants (car  $k$  valeurs réelles sur la diagonale, et  $\frac{1}{2}k(k-1)$  valeurs complexes sur le triangles supérieur, soit  $k + 2 \cdot \frac{1}{2}k(k-1) = k^2$ ). Les matrices dont les  $k$  valeurs propres sont égales sont les matrices multiples de l'identité, formant un sous espace  $W_k$  de dimension 1, donc de codimension  $k^2 - 1$ . Une matrice unitaire  $U$  s'écrit  $U = \exp(iH)$  où  $H$  est Hermitienne. Une matrice symétrique réelle  $k \times k$  a  $k + \frac{1}{2}k(k-1)$  paramètres réels indépendants donc de même  $\text{codim}(W_k) = k + \frac{1}{2}k(k-1) - 1$ .  $\square$

Ce résultat donnant  $\text{codim}(W_2) = 3$  montre que pour une famille générique d'opérateurs auto-adjoints  $H(t)$  dépendent de  $t \in \mathbb{R}$ , il ne devrait pas y avoir de dégénérescence. Il faudrait 2 autres paramètres  $\lambda_1, \lambda_2$  pour observer des dégénérescences entre  $k = 2$  valeurs propres.

### 2.4.3 Théorème adiabatique

**Théorème 2.16** (« Théorème adiabatique »). *Si  $\pi(t)$  est défini par (2.21), il existe une unique série d'opérateurs auto-adjoints*

$$\Pi(t) = \pi(t) + \epsilon \Pi_1(t) + \epsilon^2 \Pi_2(t) + \dots \quad (2.23)$$

telle que pour tout  $N \geq 1$ , il existe  $C_N > 0$ , et considérant les  $N$  premiers termes  $\Pi_{(N)}(t) = \pi(t) + \epsilon \Pi_1(t) + \dots + \epsilon^{N-1} \Pi_{N-1}(t)$ ,

(1) On a

$$\left\| (\Pi_{(N)}(t))^2 - \Pi_{(N)}(t) \right\| \leq C_N \epsilon^N$$

c'est à dire que  $\Pi_{(N)}(t)$  est un  $O(\epsilon^N)$ -quasi-projecteur orthogonal de rang  $n$ ,  $\epsilon$ -proche de  $\pi(t)$ .

(2) On a

$$\left\| \left[ \left( -i\epsilon \frac{d}{dt} \right) + H(t), \Pi_{(N)}(t) \right] \right\| \leq C_N \epsilon^N \quad (2.24)$$

c'est à dire que l'espace  $F_{(N)}(t) := \text{Im}(\Pi_{(N)}(t))$  suit l'évolution de Schrödinger avec une erreur  $O(\epsilon^N)$ .

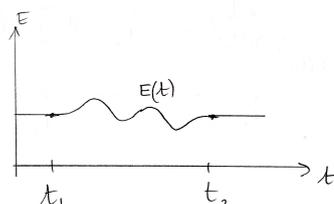
### Historique (partiel) du théorème adiabatique (Voir [31, chap.1])

- Ordre  $N = 1$  :
  - 1928, Born-Fock : énoncé[4],
  - 1950 : Kato : preuve.
- Ordre  $N \geq 1$  :
  - 1959 : Lenard [24].
  - 1981,1993 : Nenciu, Garido.
- Cas  $H(t)$  réel analytique, erreur exponentiellement petite  $O(e^{-c/\epsilon^\alpha})$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  :
  - 1991,1993 Joye,Pfister[22, 23].
  - 1993 : Martinez.
- Preuve utilisant l'analyse semi-classique (présentée dans cet exposé) :
  - 1993 : Sjöstrand [30].
- Description de l'évolution lors des (presque) croisements de valeurs propres
  - 1989 Hagedorn [16]
  - 2004 V. Rousse [28]
  - 2011 Y. Colin de Verdière [32]

- Extension aux dynamiques lent-rapide (Born-Oppenheimer) :
  - 1996 : Emmerich-Weinstein [5]
  - 2001 : Joye-Hagedorn [17].
  - 2003[31] : idem et applications à la physique (approximation de Born-Oppenheimer).
- Aspects topologiques, formule de l'indice.
  - 1996, Fedosov. Deformation quantization and Index Theory[14]
  - 2000, Effets topologiques dans les molécules [10, 11, 13].

## 2.5 Remarques et conséquences du théorème adiabatique 2.16

- (1) La série (2.23) est « asymptotique » : elle est utile pour faire  $N$  fixé et  $\epsilon \rightarrow 0$ , mais ne converge pas en général à  $\epsilon$  fixé et  $N \rightarrow \infty$ .
- (2) Il n'est pas facile de calculer les termes  $\Pi_j(t)$  de la série. Cependant, le théorème d'existence a un intérêt :
  - (a) « **Contrôle en temps long** ». En supposant un contrôle uniforme<sup>4</sup> en temps, alors le théorème adiabatique garantit que  $\pi(t)$  suit l'évolution exacte avec une erreur  $O(\epsilon)$ , sur des intervalles de temps  $|t| \leq O(\epsilon^{-N})$  pour tout  $N \geq 1$ .
  - (b) Dans le cas d'un **branchement adiabatique** : si  $\frac{d^\alpha H}{dt^\alpha}(t_1) = 0$  et  $\frac{d^\alpha H}{dt^\alpha}(t_2) = 0$  pour  $\alpha = 1, \dots, N-1$  alors  $\Pi(t) = \pi(t)$  pour  $t = t_1$  et  $t = t_2$ .



## 2.6 Preuve semi-classique du théorème adiabatique 2.16

Cette preuve est tirée de [30]. Voir l'appendice A pour la définition et propriétés de la quantification  $\text{Op}_\epsilon(\cdot)$  et du star-produit  $\star$  préalable à la lecture de cette preuve.

On note  $(t, \xi_t) \in T^*\mathbb{R}$  les variables canoniques duales. L'idée de cette preuve est travailler avec des symboles en  $(t, \xi_t)$  et de construire le projecteur  $\Pi(t)$  comme pour  $\pi(t)$  en (2.22), mais en remplacer le produit ordinaire de fonctions par le star produit (ce qui est équivalent à travailler avec des opérateurs), et ce qui donnera automatiquement les corrections souhaitées. On travaille avec les **séries asymptotiques en  $\epsilon$ , c'est à dire modulo un reste  $O(\epsilon^N)$  avec  $N \gg 1$  arbitraire.**

On a

$$\begin{aligned} \text{Op}_\epsilon(\xi_t) &= -i\epsilon \frac{d}{dt} \\ \text{Op}_\epsilon(H(t)) &= H(t) \end{aligned}$$

---

4. Cad  $\forall \alpha, \exists C_\alpha > 0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}, |(\partial_t^\alpha H)(t)| \leq C_\alpha$ .

Soit

$$\mathbb{H}(t, \xi_t) := \xi_t + H(t),$$

donc

$$\text{Op}_\epsilon(\mathbb{H}(t, \xi_t)) = -i\epsilon \frac{d}{dt} + H(t),$$

qui est l'opérateur qui apparaît dans (2.24). Pour tous  $z \in \mathbb{C}$ ,  $(t, \xi_t) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(z - \xi_t) \notin \Sigma(t)$ , soit le symbole  $R_z(x, \xi_t)$  (appelé résolvante) tel que

$$(R_z \star (z - \mathbb{H}))(x, \xi_t) = ((z - \mathbb{H}) \star R_z)(x, \xi_t) = 1$$

Soit

$$\begin{aligned} \Pi(t, \xi_t) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{(z-\xi_t) \in \Gamma_t} R_z(t, \xi_t) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(z-\xi_t) \in \Gamma_t} (z - \xi_t - H(t))^{\star(-1)} dz \quad (\text{:inverse pour } \star) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} (z - H(t))^{\star(-1)} dz \\ &= \Pi(t, 0) \end{aligned}$$

et on déduit que l'opérateur suivant admet un développement asymptotique

$$\begin{aligned} \Pi(t) &:= \text{Op}(\Pi(t, 0)) = \Pi(t, 0) \\ &= \Pi_0(t) + \epsilon \Pi_1(t) + \dots \end{aligned}$$

avec le premier terme

$$\Pi_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Gamma_t} (z - H(t))^{-1} dz \stackrel{(2.22)}{=} \pi(t).$$

D'après l'argument standard [29, chap.6] pour la formule de Riesz on déduit que

$$\Pi(t) \star \Pi(t) = \Pi(t)$$

On a aussi  $[R_z, \mathbb{H}]_\star = 0$  donc

$$[\Pi(t), \mathbb{H}]_\star = 0.$$

Unicité de la série : si  $\Pi'(t) = \pi(t) + \epsilon \Pi'_1(t) + \epsilon^2 \Pi'_2(t) + \dots$  est une autre série qui vérifie  $\Pi'(t) \star \Pi'(t) = \Pi'(t)$  et  $[\Pi'(t), \mathbb{H}]_\star = 0$  alors  $[\Pi'(t), \Pi(t)]_\star = 0$  d'après la construction de  $\Pi(t)$  à partir de  $\mathbb{H}$ . Par ailleurs  $\Pi'(t) - \Pi(t) = O(\epsilon)$ . On déduit que  $(1 - \Pi(t)) \Pi'(t) = O(\epsilon)$ . Or  $((1 - \Pi(t)) \Pi'(t))^2 = (1 - \Pi(t)) \Pi'(t)$  donc  $(1 - \Pi(t)) \Pi'(t) = 0$  et de même  $(1 - \Pi'(t)) \Pi(t)$ . Donc

$$\Pi'(t) - \Pi(t) = (1 - \Pi) \Pi' - (1 - \Pi') \Pi + [\Pi, \Pi'] = 0,$$

ce qui donne l'unicité  $\Pi'(t) = \Pi(t)$ .

## 2.7 Preuve plus constructive du théorème adiabatique 2.16

Preuve adaptée de [5]. On va construire les opérateurs  $\Pi_k$  par récurrence sur  $k$ . Tout d'abord, notons

$$p_t := -i\varepsilon \frac{d}{dt}$$

qui est comme un opérateur “impulsion” associé au temps  $t$ . Posons

$$\mathbf{H} := p_t + H(t)$$

**Hypothèse de récurrence :** on suppose que pour  $k \geq 0$

$$\Pi^2 - \Pi = \varepsilon^{k+1}A + O(\varepsilon^{k+2}) \quad (2.25)$$

$$[\Pi, \mathbf{H}] = \varepsilon^{k+1}F + O(\varepsilon^{k+2}) \quad (2.26)$$

où  $A(t), F(t)$  sont des opérateurs indépendants de  $\varepsilon$ . Ces hypothèses sont déjà vraies pour  $k = 0$ .

Comme  $[\Pi_0, H] = 0$ , on peut trouver une base commune où ces opérateurs sont diagonaux :

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} (E_i)_i & 0 \\ 0 & (E'_j)_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{00} & 0 \\ 0 & H_{11} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

avec ces notations, l'hypothèse sur le gap spectral s'écrit :

$$\forall t, \forall i, j, \quad |E_i(t) - E'_j(t)| \geq d_0 > 0 \quad (2.28)$$

Dans cette même base, on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} \\ F_{10} & F_{11} \end{pmatrix},$$

A l'ordre  $k + 1$ , on pose

$$\Pi' = \Pi + \varepsilon^{k+1}K \quad (2.29)$$

et l'on cherche l'opérateur  $K = \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{pmatrix}$ , tel que la récurrence fonctionne à l'ordre suivant :

$$\Pi'^2 - \Pi' = O(\varepsilon^{k+2}) \quad (2.30)$$

$$[\Pi', \mathbf{H}] = O(\varepsilon^{k+2}) \quad (2.31)$$

Tout d'abord, (2.25) donne

$$[\Pi, \varepsilon^{k+1}A] = [\Pi, \Pi^2 - \Pi] + O(\varepsilon^{k+2}) = O(\varepsilon^{k+2})$$

donc à l'ordre dominant,

$$[\Pi_0, A] = 0 \quad (2.32)$$

ce qui implique

$$A_{01} = 0, \quad A_{10} = 0$$

Ensuite (2.26) donne

$$\begin{aligned} \Pi [\Pi, \mathbf{H}] \Pi &= \varepsilon^{k+1} \Pi F \Pi + O(\varepsilon^{k+2}) \\ \Leftrightarrow \Pi^2 \mathbf{H} \Pi - \Pi \mathbf{H} \Pi^2 &= \varepsilon^{k+1} F_{00} + O(\varepsilon^{k+2}) \\ \Leftrightarrow (\Pi + \varepsilon^{k+1} A) \mathbf{H} \Pi - \Pi \mathbf{H} (\Pi + \varepsilon^{k+1} A) &= \varepsilon^{k+1} F_{00} + O(\varepsilon^{k+2}) \\ \Leftrightarrow A \mathbf{H} \Pi - \Pi \mathbf{H} A &= F_{00} + O(\varepsilon) \\ \Leftrightarrow A H \Pi - \Pi H A &= F_{00} \end{aligned}$$

(le terme  $p_t$  a disparu car comme dans (??) le commutateur est à l'ordre  $\varepsilon$ ). Or  $[\Pi_0, H] = 0$ , mais aussi d'après (2.32)  $[\Pi_0, A]$ . On déduit que

$$F_{00} = [A_{00}, H_{00}] \quad (2.33)$$

En faisant de même avec l'opérateur  $(1 - \Pi) [\Pi, \mathbf{H}] (1 - \Pi)$ , on obtient

$$F_{11} = [A_{11}, H_{11}] \quad (2.34)$$

Ensuite (2.30) et (2.29) donnent

$$\begin{aligned} (\Pi + \varepsilon^{k+1} K)^2 &= \Pi + \varepsilon^{k+1} K + O(\varepsilon^{k+2}) \\ \Leftrightarrow \Pi^2 + \varepsilon^{k+1} (K \Pi + \Pi K) &= \Pi + \varepsilon^{k+1} K + O(\varepsilon^{k+2}) \\ \Leftrightarrow A + K \Pi + \Pi K - K &= O(\varepsilon) \\ \Leftrightarrow K_{00} = -A_{00} \text{ et } K_{11} = -A_{11} & \end{aligned} \quad (2.35)$$

De même (2.31) donne

$$\begin{aligned} [\Pi + \varepsilon^{k+1} K, \mathbf{H}] &= O(\varepsilon^{k+2}) \\ \Leftrightarrow F + [K, \mathbf{H}] &= O(\varepsilon) \\ \Leftrightarrow F + [K, H] + i\varepsilon \dot{K} &= O(\varepsilon) \\ \Leftrightarrow F + [K, H] &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

or

$$[K, H] = \begin{pmatrix} [K_{00}, H_{00}] & K_{01} H_{11} - H_{00} K_{01} \\ K_{10} H_{00} - H_{11} K_{10} & [K_{11}, H_{11}] \end{pmatrix}$$

donc (2.36) donne

$$\begin{aligned} F_{00} &= -[K_{00}, H_{00}] = [A_{00}, H_{00}] \\ F_{11} &= -[K_{11}, H_{11}] = [A_{11}, H_{11}] \end{aligned}$$

(on retrouve (2.33) et (2.34)), et :

$$\begin{aligned}
F_{01} &= H_{00}K_{01} - K_{01}H_{11} \\
F_{10} &= H_{11}K_{10} - K_{10}H_{00}
\end{aligned}$$

Soit, si on note les éléments de matrice par  $(F_{01})_{ij}$ , et utilisant les notations de (2.27) et l'hypothèse de gap (2.28) :

$$\begin{aligned}
(F_{01})_{ij} &= (E_i - E'_j) (K_{01})_{ij} \Leftrightarrow (K_{01})_{ij} = (F_{01})_{ij} (E_i - E'_j)^{-1} \\
(F_{10})_{ij} &= (E'_j - E_i) (K_{10})_{ij} \Leftrightarrow (K_{10})_{ij} = (F_{10})_{ij} (E'_j - E_i)^{-1}
\end{aligned}$$

Au final, les équations (2.35) donnent  $K_{00}, K_{11}$  et ces dernières équations  $K_{01}, K_{10}$  finissant de déterminer l'opérateur recherché  $K$ .

### 3 Propriétés topologiques des dynamiques lent-rapide couplées sur $\mathbb{R}^n$

Dans cette section et la suivante, on présente une classe de problèmes de physique ondulatoire qui correspond à un des deux problèmes suivants :

- **“Système ondulatoire lent-rapides couplés”** : deux dynamiques couplées, dont une est plus lente que l’autre.
- **“Équation d’onde vectorielle”** : un système en régime de petite longueur d’onde couplé à un autre système quelconque dont l’état est représenté par un vecteur.

L’équivalence de ces deux problèmes sera discutée plus loin. Dans cette section on discute des modèles où la dynamique lente classique est sur l’espace des phases  $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  (espace cotangent). Ensuite, en section 4, on généralise à des modèles où l’espace des phases est une variété symplectique.

Afin de motiver le formalisme ci-dessous, voici des rappels sur le modèle adiabatique de la Section 2.

#### 3.1 Reformulation semi-classique de l’équation d’évolution adiabatique (2.1)

Si  $\epsilon > 0$  est le « paramètre adiabatique », on considère l’équation de Schrödinger (2.1) où l’opérateur varie lentement (si  $\epsilon \ll 1$ ) avec le temps  $\tau$  :

$$i \frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} = H(\epsilon\tau) \tilde{\psi}(\tau), \quad \tilde{\psi}(\tau) \in \mathcal{H}. \quad (3.1)$$

On va écrire cette équation autrement. On pose  $t = \epsilon\tau$ ,  $\psi(t) = \tilde{\psi}(\frac{t}{\epsilon})$  et on obtient

$$i\epsilon \frac{d\psi}{dt} = H(t) \psi(t). \quad (3.2)$$

Posons pour  $(t, \xi) \in T^*\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la fonction suivante appelée « symbole » :

$$\mathbb{H}(t, \xi) := \xi \text{Id} + H(t) \in \text{Herm}(\mathcal{H})$$

Considérons les opérateurs « (pseudo-)différentiels semi-classiques » suivant dans  $L^2(\mathbb{R}_t) \otimes \mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \text{Op}_\epsilon(\xi \text{Id}) &:= -i\epsilon \frac{d}{dt} \otimes \text{Id}, & \text{Op}_\epsilon(H(t)) &= H(t), \\ \text{Op}_\epsilon(\mathbb{H}) &= -i\epsilon \frac{d}{dt} \otimes \text{Id} + H(t) \in \text{Herm}(L^2(\mathbb{R}_t) \otimes \mathcal{H}). \end{aligned}$$

---

5. L’espace  $L^2(\mathbb{R}_t) \otimes \mathcal{H}$  est équivalent à  $L^2(\mathbb{R}_t; \mathcal{H})$  contenant des fonctions  $\psi(t) \in \mathcal{H}$  de la variable  $t$  et à valeur dans  $\mathcal{H}$ .

Alors

$$(3.1) \Leftrightarrow (3.2) \Leftrightarrow \text{Op}_\epsilon(\mathbb{H})\psi = 0.$$

En conclusion, l'équation d'évolution adiabatique (3.1) se reformule comme une équation avec un opérateur (pseudo-)différentiels semi-classique  $\text{Op}_\epsilon(\mathbb{H})$  dont le symbole  $\mathbb{H}(t, \xi)$  est une fonction sur l'espace des phase  $T^*\mathbb{R}$  à valeur dans  $\text{Herm}(\mathcal{H})$ . Les variables  $(t, \xi)$  sont dites **variables lentes** associées à l'**espace de Hilbert lent**  $L^2(\mathbb{R}_t)$  et par opposition,  $\mathcal{H}$  est appelé **espace de Hilbert de la dynamique rapide**.

### 3.2 Observation de transition de niveaux d'énergie en physique moléculaire

Références pour cette section : [10, 12, 11].

Une **petite molécule** est un ensemble d'atomes (électrons et noyaux) et peut être considérée comme un système quantique isolé mais complexe puisque de nombreux degrés de liberté interagissent fortement à des échelles de temps différentes : les électrons qui sont légers évoluent sur des échelles de temps  $\tau_e \in [10^{-16}s, 10^{-15}s]$ , qui sont petites par rapport aux échelles de temps du mouvement de vibration des noyaux  $\tau_{\text{vib}} \in [10^{-15}s, 10^{-14}s]$ , eux même petits par rapports au mouvement plus lent de rotation de la molécule  $\tau_{\text{rot}} \in [10^{-12}s, 10^{-10}s]$ . En mécanique quantique l'état de la molécule est décrit par une fonction à plusieurs variables et un état stationnaire de la molécule correspond à une fonction propre de l'opérateur Hamiltonien. La valeur propre correspondante est l'énergie de cet état. Si la molécule est suffisamment isolée de son environnement, on peut mesurer expérimentalement ses niveaux d'énergie quantiques (spectre discret) qui correspondent aux états collectifs stationnaires de toutes les interactions internes entre ces différents degrés de liberté. Voir la figure 3.1.

### 3.3 Modèle simple (forme normale)

Références pour cette section : [10, 11]. Le modèle suivant joue un rôle important dans la théorie générale car c'est une « forme normale élémentaire ». C'est aussi un modèle très simple et utile en physique moléculaire pour illustrer le comportement spectral des niveaux d'énergie rotation/vibrationnels (lent/rapide) des noyaux.

Soit  $\mu \in \mathbb{R}$  un paramètre que l'on fixe. Soit  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  des « variables lentes » sur l'espace des phases  $\mathbb{R}^2$ . On introduit le « symbole »

$$H_\mu(x, \xi) := \begin{pmatrix} -\mu & x + i\xi \\ x - i\xi & +\mu \end{pmatrix} \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2). \quad (3.3)$$

On appellera  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  « l'espace de Hilbert rapide ». L'espace de « Hilbert lent » est  $L^2(\mathbb{R})$  et correspond à la quantification de l'espace de phase  $T^*\mathbb{R}$  des « variables lentes ». Soit  $\epsilon > 0$ , le « paramètre adiabatique » et posons

$$\hat{H}_\mu := \text{Op}_\epsilon(H_\mu) := \begin{pmatrix} -\mu \text{Id} & \hat{x} + i\hat{\xi} \\ \hat{x} - i\hat{\xi} & \mu \text{Id} \end{pmatrix} \in \text{Herm}(L^2(\mathbb{R}_x) \otimes \mathbb{C}^2) \quad (3.4)$$

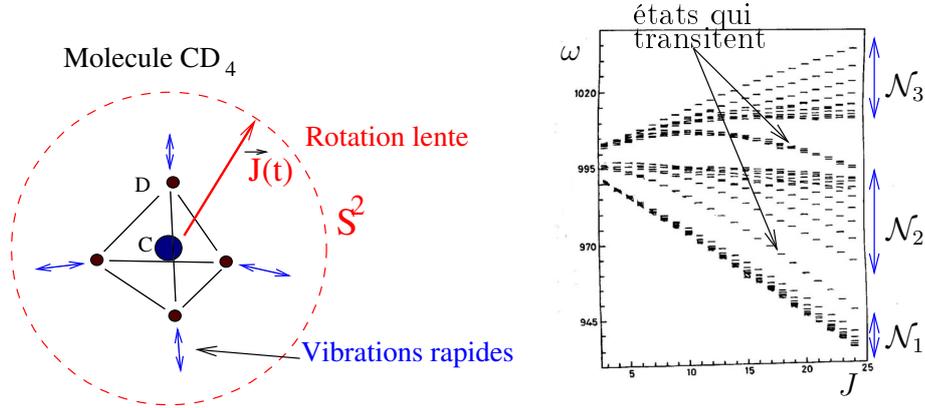


FIGURE 3.1 – Niveaux d'énergie (en  $cm^{-1}$ ) de la molécule  $CD_4$  (carbon with 4 deuterium atoms) en fonction du moment angulaire total  $J \in \mathbb{N}$  (énergie de rotation et qui est une quantité conservée). La structure fine du spectre correspond au mouvement lent de rotation et la structure large au mouvement plus rapide de vibration. On observe des groupes de niveaux et des niveaux qui transitent entre ces groupes.

où  $\text{Id} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{\xi} := \text{Op}_\epsilon(\xi) := -i\epsilon \frac{d}{dx} \in \text{Herm}(L^2(\mathbb{R}))$ , et  $\hat{x}$  est l'opérateur de multiplication par  $x$  dans  $L^2(\mathbb{R}_x)$ .

### 3.3.1 Indice spectral $\mathcal{N}$

Dans le Théorème suivant,  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la base orthonormée des fonctions de Hermite de  $L^2(\mathbb{R})$  définies par

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(\pi\epsilon)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\epsilon}},$$

et

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^\dagger \varphi_n, \quad a \varphi_n = \sqrt{n} \varphi_{n-1}, \quad (3.5)$$

avec les opérateurs

$$a := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (\hat{x} + i\hat{\xi}), \quad a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (\hat{x} - i\hat{\xi}). \quad (3.6)$$

**Proposition 3.1.** « *Spectre de  $\hat{H}_\mu$*  ». Pour chaque paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $\hat{H}_\mu$ , (3.4), a du spectre discret dans  $L^2(\mathbb{R}_x) \otimes \mathbb{C}^2$  :

$$\hat{H}_\mu \phi_n^\pm = \omega_n^\pm \phi_n^\pm, \quad n \geq 0, \quad (3.7)$$

avec pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n^\pm}{\sqrt{\epsilon}} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2 + 2n} \\ \phi_n^\pm &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2n\epsilon}}{\mu + \omega_n^\pm} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

et pour  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \mu \\ \phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On observe qu'il y a

$$\mathcal{N} = +1 \quad (3.9)$$

valeur propre qui transite vers le haut, pour  $\mu$  croissant.

*Remarque 3.2.* Il apparaît dans (3.8) que  $\sqrt{\epsilon}$  est un paramètre naturel de « scaling ». On discute cela en Section 3.5.5.

Voir figure 3.2. Pour le moment on ne peut pas dire que l'observation (3.9) est un résultat de topologie. Pour que  $\mathcal{N}$  soit reconnu comme un « indice topologique », il faudrait que ce modèle appartienne à un ensemble de modèles et montrer que ce nombre  $\mathcal{N} = +1$  est indépendant du modèle (robuste par perturbation). On le fera en Section 3.5.

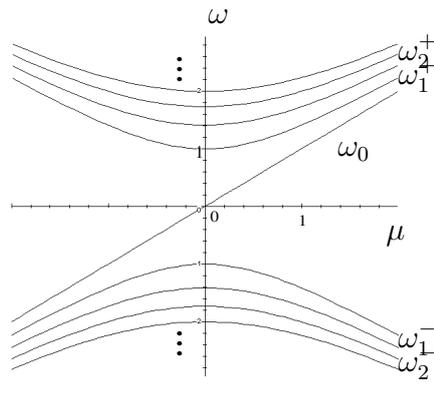


Figure 3.2 – Spectre de (3.7).

*Démonstration.* On verra d'après (3.13) que l'opérateur  $\hat{H}_\mu$  est elliptique. Donc <sup>6</sup>  $\hat{H}_\mu$  a du spectre discret que l'on va déterminer.

**Méthode 1 :** Cette première méthode est directe, simple et sera utilisée à nouveau pour la preuve du Théorème 3.5. Tout vecteur  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$  s'écrit

$$\psi = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} a_n \varphi_n \\ b_n \varphi_n \end{pmatrix}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{C}.$$

On pose  $\omega = \sqrt{\epsilon} \tilde{\omega}$  et  $\mu = \sqrt{\epsilon} \tilde{\mu}$ . On a

$$\begin{aligned} \hat{H}_\mu \psi = \omega \psi &\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} -\mu - \omega & \sqrt{2\epsilon} a \\ \sqrt{2\epsilon} a^\dagger & \mu - \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \varphi_n \\ b_n \varphi_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n \geq 0} -a_n (\tilde{\mu} + \tilde{\omega}) \varphi_n + b_n \sqrt{2} \sqrt{n} \varphi_{n-1} = 0 \\ \sum_{n \geq 0} a_n \sqrt{2} \sqrt{n+1} \varphi_{n+1} + b_n (\tilde{\mu} - \tilde{\omega}) \varphi_n = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a_n (\tilde{\mu} + \tilde{\omega}) + b_{n+1} \sqrt{2} \sqrt{n+1} = 0, & \forall n \geq 0 \\ a_{n-1} \sqrt{2} \sqrt{n} + b_n (\tilde{\mu} - \tilde{\omega}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\tilde{\omega} = -\tilde{\mu}$  alors il n'y a pas de solution non nulle.

Si  $\tilde{\omega} \neq -\tilde{\mu}$  alors le système s'écrit

$$\begin{cases} a_{n'} = \frac{\sqrt{2(n'+1)}}{\tilde{\mu} + \tilde{\omega}} b_{n'+1}, & \forall n' \geq 0 \\ b_{n'} \left( -\frac{2n'}{\tilde{\mu} + \tilde{\omega}} + (\tilde{\omega} - \tilde{\mu}) \right) = 0 \end{cases}$$

Soit  $n \geq 0$ . Si  $b_n \neq 0$  alors

$$\tilde{\mu}^2 - \tilde{\omega}^2 = -2n \Leftrightarrow \tilde{\omega} = \pm \sqrt{\tilde{\mu}^2 + 2n}, \quad n \geq 0.$$

Donc

- Si  $n = 0$ , on a  $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\mu}$  (car  $\tilde{\omega} = -\tilde{\mu}$  est exclu) et  $b_0 = 1$  donnant  $b_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 1$  et  $a_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 0$ .
- Pour  $n \geq 1$ , on a  $\tilde{\omega}_n = \pm \sqrt{\tilde{\mu}^2 + 2n}$  et  $b_n = 1$  donnant  $b_{n'} = 0$  pour  $n' \neq n$  et  $a_{n-1} = \frac{\sqrt{2n}}{\tilde{\mu} + \tilde{\omega}}$  et  $a_{n'} = 0$  pour  $n' \neq n - 1$ .

---

6. On peut se passer de cet argument en remarquant à la fin du calcul que les vecteurs propres trouvés forment une base de l'espace de Hilbert.

**Méthode 2 :** Cette deuxième méthode utilise explicitement une « symétrie » du problème. On calcule d'abord le spectre de  $\hat{H}_\mu^2$  et ensuite on diagonalise  $\hat{H}_\mu$  dans les espace propres obtenus. Observons que

$$[\hat{x}, \hat{\xi}] = \hat{x}\hat{\xi} - \hat{\xi}\hat{x} = i\epsilon \text{Id}. \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned} a^\dagger a &\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{2\epsilon} (\hat{x} - i\hat{\xi}) (\hat{x} + i\hat{\xi}) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} (\hat{x}^2 + \hat{\xi}^2 + i(\hat{x}\hat{\xi} - \hat{\xi}\hat{x})) \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{2\epsilon} (\hat{x}^2 + \hat{\xi}^2 - \epsilon \text{Id}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$a^\dagger a \varphi_n \stackrel{(3.5)}{=} n \varphi_n. \quad (3.12)$$

On a

$$\begin{aligned} \hat{H}_\mu^2 &\stackrel{(3.4)}{=} \begin{pmatrix} \mu^2 + \hat{x}^2 + \hat{\xi}^2 - i(\hat{x}\hat{\xi} - \hat{\xi}\hat{x}) & 0 \\ 0 & \mu^2 + \hat{x}^2 + \hat{\xi}^2 + i(\hat{x}\hat{\xi} - \hat{\xi}\hat{x}) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \begin{pmatrix} \mu^2 + \hat{x}^2 + \hat{\xi}^2 + \epsilon & 0 \\ 0 & \mu^2 + \hat{x}^2 + \hat{\xi}^2 - \epsilon \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.11)}{=} \begin{pmatrix} \mu^2 + 2\epsilon a^\dagger a + 2\epsilon & 0 \\ 0 & \mu^2 + 2\epsilon a^\dagger a \end{pmatrix} = (2\epsilon a^\dagger a + \mu^2) \otimes \text{Id}_{\mathbb{C}^2} + \text{Id}_{L^2} \otimes \begin{pmatrix} 2\epsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On déduit que le spectre de  $\hat{H}_\mu^2$  est constitué des valeurs propres  $\lambda_n = \omega_n^2 = (2\epsilon n + \mu^2)$ ,  $n \geq 0$ , et l'espace propre associé  $E_n$  est

$$E_n = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \right\} \quad : \text{ si } n \geq 1,$$

$$E_0 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il reste à diagonaliser  $\hat{H}_\mu$  dans chaque espace  $E_n$ . Pour  $n = 0$ , on a observe que

$$\hat{H}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix},$$

et que pour  $n \geq 1$ ,

$$\hat{H}_\mu \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\varphi_{n-1} \\ \sqrt{2\epsilon n}\varphi_n \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2\epsilon n}\varphi_{n-1} \\ \mu\varphi_n \end{pmatrix}.$$

Donc dans la base de  $E_n$ ,  $\hat{H}_\mu$  est représenté par la matrice

$$\hat{H}_{\mu/E_n} \equiv \begin{pmatrix} -\mu & \sqrt{2\epsilon n} \\ \sqrt{2\epsilon n} & \mu \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres et vecteurs propres sont

$$\omega_n^\pm = \pm \sqrt{\mu^2 + 2\epsilon n},$$

et vecteurs propres<sup>7</sup>

$$U_n^\pm = \begin{pmatrix} (\omega_n^\pm - \mu) \varphi_{n-1} \\ \sqrt{2\epsilon n} \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2\epsilon n}}{\mu + \omega_n^\pm} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

□

### 3.3.2 Indice topologique de Chern $\mathcal{C}$

On pourra consulter au préalable la section B qui introduit la notion de topologie d'un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur la sphère  $S^2$ .

**Proposition 3.3.** « *Aspects topologiques du symbole* ». Les valeurs propres de la matrice  $H_\mu(x, \xi) \in \text{Herm}(\mathbb{C}^2)$ , Eq. (3.3), sont

$$\omega_\pm(\mu, x, \xi) = \pm \sqrt{\mu^2 + x^2 + \xi^2} \quad (3.13)$$

Il y a donc une dégénérescence en  $(\mu, x, \xi) = (0, 0, 0)$ . Pour  $(\mu, x, \xi) \in S^2 = \{(\mu, x, \xi) \in \mathbb{R}^3, |(\mu, x, \xi)| = 1\}$ , i.e. sur la sphère unité dans l'espace des paramètres, l'espace propre  $F_-(\mu, x, \xi) \subset \mathbb{C}^2$  associé à la valeur propre  $\omega_-$  définit un fibré vectoriel complexe de rang 1, noté  $F_-$ . Sa classe d'isomorphisme est caractérisée par l'**indice topologique de Chern** qui est

$$\mathcal{C}(F_-) = +1.$$

De même

$$\mathcal{C}(F_+) = -1.$$

*Démonstration.* On va calculer l'indice  $\mathcal{C}$  par deux méthodes équivalentes, voir section B.

**Méthode 1 (fonction de recollement)** On a

$$p(\omega) := \det(\omega \text{Id} - H_\mu(x, \xi)) \stackrel{(3.3)}{=} \det \begin{pmatrix} \omega + \mu & -(x + i\xi) \\ -(x - i\xi) & \omega - \mu \end{pmatrix} = \omega - (\mu^2 + x^2 + \xi^2)$$

7. Dans xcas, écrire  $H := [-\mu, a], [a, \mu]] ; \text{eigenvals}(H) ; \text{eigenvects}(H) ;$

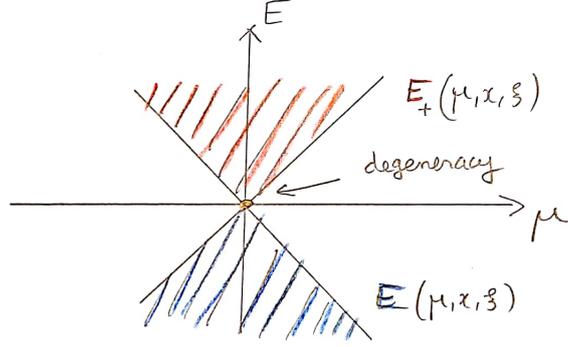


FIGURE 3.3 – On a  $\omega^-(\mu, x, \xi) \leq -|\mu|$ ,  $\omega^+(\mu, x, \xi) \geq |\mu|$ . La zone rouge représente les valeurs possibles de  $\omega^+(\mu, x, \xi)$  à  $\mu$  fixé et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ . De même la zone bleue représente  $\omega^-(\mu, x, \xi)$ . La dégénérescence est en  $(\mu, x, \xi) = (0, 0, 0)$ .

donc  $p(\omega) = 0$  donne les valeurs propres  $\omega_{\pm} = \pm r$  avec  $r := \sqrt{\mu^2 + x^2 + \xi^2}$ , i.e. Eq. (3.13). Les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\omega_+, \omega_-$  sont respectivement<sup>8</sup>

$$U_+ = \begin{pmatrix} -\mu + r \\ x - i\xi \end{pmatrix}, \quad U_- = \begin{pmatrix} -\mu - r \\ x - i\xi \end{pmatrix},$$

i.e.  $H_{\mu}(x, \xi)U_{\pm} = \omega_{\pm}U_{\pm}$ . Notons  $F_{\pm}(\mu, x, \xi) := \text{Vect}(U_{\pm}) \subset \mathbb{C}^2$  les espaces propres associés. Le projecteur spectral  $\pi_-$  sur  $F_-$  est

$$\pi_- = \frac{1}{\|U_-\|^2} U_- \langle U_- | \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \rightarrow F_-(\mu, x, \xi). \quad (3.14)$$

Considérons  $S^2 = \{(\mu, x, \xi) \in \mathbb{R}^3, r = |(\mu, x, \xi)| = 1\}$  la sphère unité dans l'espace des paramètres et les hémisphères nord et sud  $U_1 := \{(\mu, x, \xi) \in S^2, \mu \geq 0\}$ ,  $U_2 := \{(\mu, x, \xi) \in S^2, \mu \leq 0\}$ .

La projection du vecteur fixe  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  sur  $F_-$  donne la section globale :

$$s_1(\mu, x, \xi) := \pi_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(3.14)}{=} \frac{(-\mu - 1)}{((\mu + 1)^2 + x^2 + \xi^2)} \begin{pmatrix} -\mu - 1 \\ x - i\xi \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

On a  $\|s_1\|^2 = \frac{(\mu+1)^2}{((\mu+1)^2 + x^2 + \xi^2)} = \frac{1+\mu}{2}$  donc  $\|s_1\|^2 \neq 0$  pour sur  $U_1$ . Ainsi  $s_1$  est une trivialisations de  $F_- \rightarrow U_1$ . Considérons aussi la trivialisations suivante de  $F_- \rightarrow U_2$  :

$$s_2(\mu, x, \xi) := \pi_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(x + i\xi)}{((\mu + 1)^2 + x^2 + \xi^2)} \begin{pmatrix} -\mu - 1 \\ x - i\xi \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

8. Dans xcas en ligne, écrire :  $H := [[-\mu, x+i*\xi], [x-i*\xi, \mu]]$ ; `eigenvals(H)`; `eigenvects(H)`;

On a  $\|s_2\|^2 = \frac{(x^2+\xi^2)}{((\mu+1)^2+x^2+\xi^2)} = \frac{1-\mu}{2}$  donc  $\|s_2\|^2 \neq 0$  sur  $U_2$ . La fonction de recollement sur l'équateur  $S^1 = \{\mu = 0, x + i\xi = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[ \}$  est définie par

$$\begin{aligned} s_2(\theta) &= f_{21}(\theta) s_1(\theta) \\ \Leftrightarrow (x + i\xi) \begin{pmatrix} -1 \\ x - i\xi \end{pmatrix} &= -f_{21}(\theta) \begin{pmatrix} -1 \\ x - i\xi \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow f_{21}(\theta) &= -e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Le degré de la fonction  $f_{21} : \theta \in S^1 \rightarrow f_{21}(\theta) = -e^{i\theta} \in U(1) \cong S^1$  est  $\mathcal{C} = \deg(f_{21}) = +1$ .

**Méthode 2 (indices des zéros d'une section globale)** On considère la section globale de  $F_- \rightarrow S^2$ ,  $s_2(\mu, x, \xi)$  en (3.16) qui s'annule en  $(\mu, x, \xi) = (1, 0, 0)$  d'après  $\|s_2\|^2 = \frac{1-\mu}{2}$ . Dans un voisinage de ce point on a au premier ordre en  $(x, \xi)$  et posant  $x + i\xi = \epsilon e^{i\theta} \in \mathbb{C}$  avec  $\epsilon \ll 1$ ,

$$s_2(\mu, x, \xi) \stackrel{(3.16)}{=} \frac{(x + i\xi)}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + o(x, \xi) \quad (3.17)$$

$$= -\frac{\epsilon}{2} e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(\epsilon) \quad (3.18)$$

Il apparait la fonction  $e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}$  qui est d'indice (ou « winding number »)  $\mathcal{C} = +1$ .  $\square$

### 3.3.3 Conclusion sur le modèle (3.4)

Dans le modèle défini par (3.4), on observe à partir du symbole, un fibré vectoriel  $F_-$  dont l'indice de Chern est  $\mathcal{C}(F_-) = +1$  et on observe qu'il y a  $\mathcal{N} = +1$  niveau qui transite (vers le haut) dans le spectre de l'opérateur. On verra en Section 3.5, Théorème 3.14, que cette égalité

$$\mathcal{N} = \mathcal{C}$$

est un cas particulier d'un résultat plus général, appelé **formule de l'indice**, valable pour une famille continue de symboles et pour des espaces et fibrés de dimensions plus grandes.

Autre formulation équivalente donnée dans [10, 12, 11] dans un cadre plus général : pour  $|\mu| \gg 1$ , il y a deux groupes de niveaux  $j = -, +$  dans le spectre de  $\hat{H}_\mu$ . Lors de la variation  $\mu = -\infty \rightarrow +\infty$  chaque groupe a une variation  $\Delta\mathcal{N}_j \in \mathbb{Z}$  du nombre de niveaux. On a la formule

$$\Delta\mathcal{N}_j = -\mathcal{C}_j$$

où  $\mathcal{C}_j$  est l'indice de Chern du fibré  $F_j \rightarrow S^2$ .

### 3.4 Modèle de Matsuno (1966) [26] des ondes équatoriales et interprétation topologique (P. Delplace, J. B. Marston, and A. Venaille [7])

#### 3.4.1 Modèle de Matsuno

On présente tout d'abord l'origine physique du modèle de Matsuno [26]. See also Document.

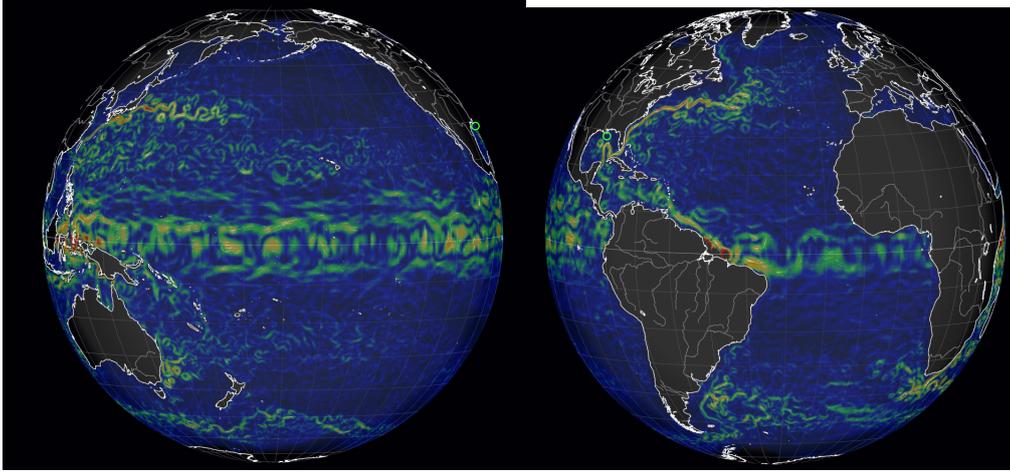


FIGURE 3.4 – Courants marins le 27 mai 2018, d'après le site nullschool. On observe les ondes équatoriales et l'accumulation d'énergie sur les côtes est des continents.

**The shallow water model :** Let  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  be local coordinates on the horizontal plane near the equator.  $x_1$  is the longitude and  $x_2$  the latitude. The function  $(h(x, t) + H) \in \mathbb{R}$  with  $H > 0$  represents the depth of water at position  $x$  and time  $t \in \mathbb{R}$ . The vector  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \in \mathbb{R}^2$  represents the (horizontal) velocity of water. Water is submitted to gravity ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  is the g-force) and since the earth is rotating with frequency  $\Omega$ , there is also an effective Coriolis force. The Navier-Stokes equations with shallow water assumptions gives

$$\begin{aligned} \partial_t h + \text{div}((h + H)u) &= 0 \\ \partial_t u + u \cdot \text{grad}(u) &= -g \text{grad}(h) - fn \wedge u \end{aligned} \tag{3.19}$$

with  $f(x) = 2\Omega \cdot n(x) \in \mathbb{R}$  and  $n(x)$  being the unit normal vector at position  $x$ .

**Linearization :** The idea of Matsuno is to linearize the equations (3.19) in the vicinity of  $x_2 = 0$  (the equator),  $u = 0$  (small velocities),  $h = 0$  (shallow water). We assume

$$f(x) = \beta x_2, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Then (3.19) at first order give the following linear equations

$$\begin{aligned}\partial_t h &= -H \operatorname{div}(u) \\ \partial_t u &= -g \operatorname{grad}(h) - \beta x_2 \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.20}$$

With  $c = \sqrt{gH}$  and the change of variables

$$t' = \sqrt{c\beta}t, \quad x' = \sqrt{\frac{\beta}{c}}x, \quad h' = \sqrt{\frac{\beta}{c}}h, \quad u' = \frac{1}{c}u,$$

we obtain the dimensionless equation, written without ' (equivalently we put  $H = 1, g = 1, \beta = 1$ ) :

$$\begin{aligned}\partial_t h &= -\partial_{x_1} u_1 - \partial_{x_2} u_2 \\ \partial_t u_1 &= -\partial_{x_1} h + x_2 u_2 \\ \partial_t u_2 &= -\partial_{x_2} h - x_2 u_1\end{aligned}$$

See also Shallow\_water\_equations on wikipedia.. We will write

$$\Psi = \begin{pmatrix} h \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}_{x_1, x_2, t}^3) \otimes \mathbb{C}^3.$$

Then

$$i\partial_t \Psi = \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_{x_1} & -i\partial_{x_2} \\ -i\partial_{x_1} & 0 & ix_2 \\ -i\partial_{x_2} & -ix_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Since the coefficients do not depend on  $x_1$  one can assume the Fourier mode in  $x_1$  :

$$\Psi(x_1, x_2, t) = e^{i\mu x_1} \psi(x_2, t)$$

with Fourier variable  $\mu \in \mathbb{R}$  and  $\psi \in L^2(\mathbb{R}_{x_2, t}^2) \otimes \mathbb{C}^3$ . For simplicity we replace  $(x_2, \xi_2)$  by  $(x, \xi)$ . This gives the Matsuno model :

**Définition 3.4.** The « Matsuno model » is the system of equations for  $\psi : (t, x) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \psi(t, x) \in \mathbb{C}^3$  given by

$$i\partial_t \psi = \hat{H}_\mu \psi$$

with the operator

$$\hat{H}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -i\partial_x \\ \mu & 0 & ix \\ -i\partial_x & -ix & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Op}(H_\mu), \quad \in \operatorname{Herm}(L^2(\mathbb{R}_x) \otimes \mathbb{C}^3)\tag{3.21}$$

with symbol

$$H_\mu(x, \xi_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mu & \xi \\ \mu & 0 & ix \\ \xi & -ix & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Herm}(\mathbb{C}^3)$$

and  $\operatorname{Op}(\xi) := -i\partial_x, \operatorname{Op}(x) := x$ .

### 3.4.2 Indice spectral $\mathcal{N}$

La proposition suivante décrit le spectre de l'opérateur  $\hat{H}_\mu$  en fonction du paramètre  $\mu$ .

**Proposition 3.5.** « *Spectre de  $\hat{H}_\mu$*  ». [26] Pour chaque  $\mu \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $\hat{H}_\mu$ , (3.21), a du spectre discret dans  $L^2(\mathbb{R}_x) \otimes \mathbb{C}^3$  donné par

$$\hat{H}_\mu \phi_n^{(j)} = \omega_n^{(j)} \phi_n^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n \geq 1, \quad (3.22)$$

avec  $\omega_n^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$  solutions de l'équation de degré 3 en  $\omega$  :

$$\omega^3 - (\mu^2 + 2n + 1)\omega - \mu = 0, \quad (3.23)$$

appelée **ondes de gravité** pour  $j = 1, 3$  et **ondes planétaires de Rossby** pour  $j = 2$ . De plus il y a les solutions

$$\hat{H}_\mu \phi_K = \mu \phi_K \quad : \text{ onde de Kelvin}$$

$$\hat{H}_\mu \phi_Y^\pm = \omega_\pm \phi_Y^\pm \quad : \text{ onde de Yanai}$$

avec  $\omega_\pm = \frac{1}{2} \left( \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4} \right)$  solutions de  $(\omega^2 - \mu\omega - 1) = 0$ . On observe sur la figure 3.5 que lorsque  $\mu$  augmente, il y a

$$\mathcal{N} = +2$$

valeurs propres qui montent.

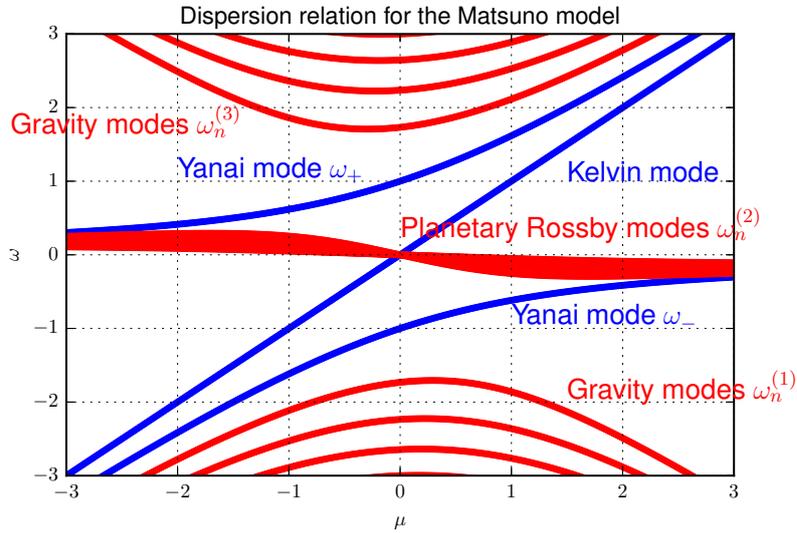


FIGURE 3.5 – Représentations des valeurs propres  $\omega_n^{(j)}(\mu)$ , Eq.(3.22). On observe un indice spectral de  $\mathcal{N} = +2$  niveaux vers le haut. Obtained by the python code of Section C.1.

### Remarques sur la physique des ondes équatoriales :

- Le modèle de Matsuno s'applique à l'océan (couche d'eau chaude d'épaisseur  $\sim 1km$ ) ou à l'atmosphère (couche limite entre troposphère et stratosphère vers 10km). Le courant océanique El Nino est une onde de Kelvin piégée, symétrique en  $x_2$ , de longueur d'onde  $\lambda_1 = 1/\mu$  qui se propage vers le Pérou.
- Depuis des satellites, on observe les modes de Yanai sous forme de nuages associés aux variations de température de l'eau.
- La vitesse de groupe de l'onde  $\Psi$  selon  $x_1$  correspond à la dérivée des courbes  $\omega(\mu) : v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\mu}$ . Pour les ondes de Rossby, à  $\omega$  fixé, on observe une composante avec forte vitesse de groupe  $v_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\mu} < 0$  vers l'est et une autre composante plus faible  $v_2 = \frac{\partial\omega}{\partial\mu} > 0$  vers l'ouest. Voir figure 3.6. Il y a donc accumulation de l'énergie (puis dissipation) sur les côtes est des continents, bien visible, ex : Gulf Stream sur la figure 3.4.

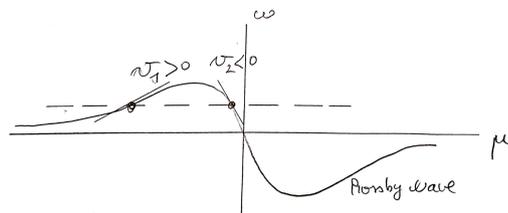


FIGURE 3.6 – A une fréquence  $\omega$  donnée, il y a deux composantes avec des vitesses de groupe  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$  mais  $|v_2| \gg |v_1|$ . Cela explique que l'énergie s'accumule sur les côtes est, voir figure 3.4.

*Démonstration.* On verra d'après (3.24) que l'opérateur  $\hat{H}_\mu$  est elliptique. Donc<sup>9</sup>  $\hat{H}_\mu$  a du spectre discret. Tout vecteur  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^3$  s'écrit

$$\psi = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} a_n \varphi_n \\ b_n \varphi_n \\ c_n \varphi_n \end{pmatrix}, \quad a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}.$$

On introduit

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_2 + i\hat{\xi}_2), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_2 - i\hat{\xi}_2),$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger), \quad \hat{\xi}_2 = -i\partial_x = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a).$$

On a

$$\hat{H}_\mu \psi = \omega \psi \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} -\omega & \mu & \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) \\ \mu & -\omega & \frac{i}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) & \frac{-i}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \varphi_n \\ b_n \varphi_n \\ c_n \varphi_n \end{pmatrix} = 0$$

9. On peut se passer de cet argument en remarquant à la fin du calcul que les vecteurs propres trouvés forment une base de l'espace de Hilbert.

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n \geq 0} -\omega a_n \varphi_n + \mu b_n \varphi_n + \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) c_n \varphi_n = 0 \\ \sum_{n \geq 0} \mu a_n \varphi_n - \omega b_n \varphi_n + \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) c_n \varphi_n = 0 \\ \sum_{n \geq 0} \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) a_n \varphi_n - \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) b_n \varphi_n - \omega c_n \varphi_n = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -\omega a_n + \mu b_n + \frac{i}{\sqrt{2}} (c_{n-1} \sqrt{n} - c_{n+1} \sqrt{n+1}) = 0 \\ \mu a_n - \omega b_n + \frac{i}{\sqrt{2}} (c_{n-1} \sqrt{n} + c_{n+1} \sqrt{n+1}) = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} (a_{n-1} \sqrt{n} - a_{n+1} \sqrt{n+1}) - \frac{i}{\sqrt{2}} (b_{n-1} \sqrt{n} + b_{n+1} \sqrt{n+1}) - \omega c_n = 0 \end{cases}, \forall n \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu - \omega) (a_n + b_n) + i\sqrt{2} c_{n-1} \sqrt{n} = 0 \\ (\mu + \omega) (a_n - b_n) + i\sqrt{2} c_{n+1} \sqrt{n+1} = 0 \\ (a_{n-1} - b_{n-1}) \sqrt{n} - (a_{n+1} + b_{n+1}) \sqrt{n+1} + i\sqrt{2} \omega c_n = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On introduit

$$\begin{aligned}
s_n &:= a_n + b_n, & d_n &:= b_n - a_n \\
\Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{2} (s_n - d_n), & b_n &= \frac{1}{2} (s_n + d_n)
\end{aligned}$$

Alors

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mu - \omega) s_{n'} + i\sqrt{2n'} c_{n'-1} = 0 \\ -(\mu + \omega) d_{n'} + i\sqrt{2(n'+1)} c_{n'+1} = 0 \\ -d_{n'-1} \sqrt{n'} - s_{n'+1} \sqrt{n'+1} + i\sqrt{2} \omega c_{n'} = 0 \end{cases} \quad \forall n' \geq 0.$$

Considérons différents cas.

- (1) Si  $\mu = \omega$ , cela donne  $c_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 0$  et donc  $d_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 0$  et  $s_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 1$ . Il y a une solution avec  $s_0 = 1$ , appelée « **Onde de Kelvin** ».
- (2) Si  $\mu = -\omega$ , cela donne  $c_{n'} = 0, s_{n'} = 0, d_{n'} = 0$  pour tout  $n' \geq 0$ , donc il n'y a pas de solution.
- (3) Si  $\mu - \omega \neq 0$  et  $\mu + \omega \neq 0$  alors

$$s_{n'+1} = \frac{-i\sqrt{2(n'+1)}}{(\mu - \omega)} c_{n'}, \quad d_{n'-1} = \frac{i\sqrt{2n'}}{(\mu + \omega)} c_{n'}$$

et donc pour tout  $n' \geq 0$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\sqrt{2n'}}{(\mu + \omega)} c_{n'} - \frac{-i\sqrt{2}(n'+1)}{(\mu - \omega)} c_{n'} + i\sqrt{2} \omega c_{n'} = 0 \\
& \Leftrightarrow (-n'(\mu - \omega) + (n'+1)(\mu + \omega) + \omega(\mu^2 - \omega^2)) c_{n'} = 0 \\
& \Leftrightarrow (\omega^3 - \omega(2n'+1 + \mu^2) - \mu) c_{n'} = 0
\end{aligned}$$

Si de plus  $c_n \neq 0$  alors  $\omega^3 - \omega(2n+1 + \mu^2) - \mu = 0$ .

- (a) Si  $c_0 = 1$  alors  $\omega^3 - \omega(1 + \mu^2) - \mu = (\omega + \mu)(\omega^2 - \mu\omega - 1) = 0$  donnant  $(\omega^2 - \mu\omega - 1) = 0$  (car  $\omega = -\mu$  est exclu) et les « **ondes de Yanai** » :

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4} \right)$$

avec les composantes  $c_0 = 1$ ,  $c_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 1$ .  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = \frac{-i\sqrt{2}}{(\mu-\omega)}$  et  $s_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 2$ .  $d_{n'} = 0$  pour  $n' \geq 0$ . Ce qui détermine  $a_{n'}, b_{n'}$ .

- (b) Si  $c_n = 1$  et  $c_{n'} = 0$  pour  $n' \neq n$ , alors  $\omega_n^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sont solutions de (3.23). Cela détermine les composantes  $d_{n'}, s_{n'}, a_{n'}, b_{n'}$ , appelée **ondes de gravité** pour  $j = 1, 3$  et **ondes planétaires de Rossby** pour  $j = 2$ .

□

### 3.4.3 Indice topologique $\mathcal{C}$

On pourra consulter au préalable la section B qui introduit la notion de topologie d'un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur la sphère  $S^2$ .

**Proposition 3.6.** « **Aspects topologiques du symbole  $H_{\mu}(x, \xi)$  (3.3)** ». [7] Les valeurs propres de la matrice  $H_{\mu}(x, \xi) \in \text{Herm}(\mathbb{C}^3)$  sont

$$\omega^{(1)}(\mu, x, \xi) = -\sqrt{\mu^2 + x^2 + \xi^2} \quad (3.24)$$

$$\omega^{(2)}(\mu, x, \xi) = 0 \quad (3.25)$$

$$\omega^{(3)}(\mu, x, \xi) = +\sqrt{\mu^2 + x^2 + \xi^2} \quad (3.26)$$

Il y a donc une dégénérescence en  $(\mu, x, \xi) = (0, 0, 0)$ . Pour  $(\mu, x, \xi) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  (sphère unité), l'espace propre  $F^{(j)}(\mu, x, \xi) \subset \mathbb{C}^2$  associé à la valeur propre  $\omega^{(j)}(\mu, x, \xi)$  définit un fibré vectoriel complexe de rang 1 au dessus de  $S^2$ , dont les **indices topologiques de Chern** sont

$$\mathcal{C}_1 = +2, \quad \mathcal{C}_2 = 0, \quad \mathcal{C}_3 = -2.$$

*Démonstration.* La preuve est semblable à celle de la proposition 3.3. Les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $H_{\mu}(x, \xi)$  sont <sup>10</sup>

$$\omega_1(\mu, x, \xi) = -r, \quad \omega_2(\mu, x, \xi) = 0, \quad \omega_3(\mu, x, \xi) = r,$$

avec  $r = \sqrt{\mu^2 + x^2 + \xi^2}$ . Vecteurs propres

$$U_1 = \begin{pmatrix} \mu^2 + \xi^2 \\ i\xi x - \mu r \\ -i\mu x - \xi r \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} -x \\ i\xi \\ -i\mu \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} \mu^2 + \xi^2 \\ i\xi x + \mu r \\ -i\mu x + \xi r \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

<sup>10</sup>. obtenues avec xcas, en écrivant : `H:=[[0,mu,xi],[mu,0,i*x],[xi,-i*x,0]]; eigenvals(H); eigenvects(H);`

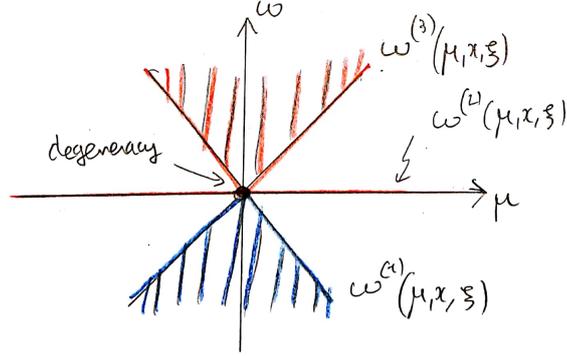


FIGURE 3.7 – Zones représentant  $\omega^{(j)}(\mu, x, \xi)$  à  $\mu$  fixé et  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ ,  $j = 1, 2, 3$ . On a  $\omega^{(1)} \leq -|\mu|$ ,  $\omega^{(2)} = 0$ ,  $\omega^{(3)} \geq |\mu|$ .

On a

$$H_\mu(x, \xi) = \sum_{j=1}^3 \omega_j \Pi_j,$$

avec les projecteurs spectraux orthogonaux

$$\Pi_j = \frac{U_j \langle U_j | \cdot \rangle}{\|U_j\|^2}.$$

$$F_j(\mu, x, \xi) = \text{Im} \Pi_j(\mu, x, \xi) \subset \mathbb{C}^3$$

est l'espace propre et définit un fibré complexe de rang 1 sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  noté  $F_j$ .

**Calcul de  $\mathcal{C}_1$**  Soit  $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$  vecteur de base fixé et

$$s_1(\mu, x, \xi) = \Pi_1 u_0 \in \mathbb{C}^3$$

qui définit une section globale du fibré  $F_1$ . On considère la sphère  $S^2 = \{(\mu, x, \xi), r = 1\}$ .

On a

$$s_1(\mu, x, \xi) = \Pi_1 u_0 \stackrel{(3.27)}{=} \frac{U_1}{\|U_1\|^2} (i\mu x - \xi) \quad (3.28)$$

avec  $\|U_1\|^2 \stackrel{(3.27)}{=} 2(\mu^2 + \xi^2)$

$$\|s_1\|^2 = \frac{((\mu x)^2 + \xi^2)}{2(\mu^2 + \xi^2)}.$$

On observe que  $\|s_1\|^2$  s'annule en deux points  $(\mu, x, \xi) = (\pm 1, 0, 0) \in S^2$ . Près du point  $(\mu, x, \xi) = (1, 0, 0)$ , posant  $x + i\xi = \epsilon e^{i\theta}$ , on a

$$\begin{aligned} s_1 &\stackrel{(3.28)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (i\mu x - \xi) + o(\epsilon) \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon e^{i\theta} + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Il apparait la fonction  $e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}$  de degré +1. Près du point  $(\mu, x, \xi) = (-1, 0, 0)$ , posant  $\xi + ix = \epsilon e^{i\theta}$  (qui respecte l'orientation de  $S^2$ ), on a

$$\begin{aligned} s_1 &\stackrel{(3.28)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (i\mu x - \xi) + o(\epsilon) \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon e^{i\theta} + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Il apparait la fonction  $e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}$  de degré +1. Au total on déduit que

$$\mathcal{D}_1 = +1 + 1 = +2.$$

**Calcul de  $\mathcal{C}_2$**  On a pour  $(\mu, x, \xi) \in S^2$  on  $\|U_2\| = 1$  donc  $U_2$  définit une section globale non nulle du fibré  $F_2$  donc

$$\mathcal{D}_2 = 0.$$

**Calcul de  $\mathcal{C}_3$**  Soit on utilise  $\sum_{j=1}^3 \mathcal{C}_j = 0$  (car le fibré  $\mathbb{C}^3 \rightarrow S^2$  est trivial) donnant directement  $\mathcal{C}_3 = -2$ , soit on calcule  $\mathcal{C}_3$  comme on l'a fait pour  $\mathcal{C}_1$  :

Soit  $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$  vecteur de base fixé et

$$s_3(\mu, x, \xi) = \Pi_3 u_0 \in \mathbb{C}^3$$

qui définit une section globale du fibré  $F_3$ . On considère la sphère  $S^2 = \{(\mu, x, \xi), r = 1\}$ . On a

$$s_3(\mu, x, \xi) = \Pi_3 u_0 \stackrel{(3.27)}{=} \frac{U_3}{\|U_3\|^2} (i\mu x + \xi) \quad (3.29)$$

avec  $\|U_3\|^2 \stackrel{(3.27)}{=} 2(\mu^2 + \xi^2)$ ,

$$\|s_3\|^2 = \frac{((\mu x)^2 + \xi^2)}{2(\mu^2 + \xi^2)}.$$

On observe que  $\|s_3\|^2$  s'annule en deux points  $(\mu, x, \xi) = (\pm 1, 0, 0) \in S^2$ . Près du point  $(\mu, x, \xi) = (1, 0, 0)$ , posant  $x + i\xi = \epsilon e^{i\theta}$ , on a

$$\begin{aligned} s_3 &\stackrel{(3.29)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (i\mu x + \xi) + o(\epsilon) \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon e^{-i\theta} + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Il apparait la fonction  $e^{i\theta} \rightarrow e^{-i\theta}$  de degré  $-1$ . Près du point  $(\mu, x, \xi) = (-1, 0, 0)$ , posant  $\xi + ix = \epsilon e^{i\theta}$  (qui respecte l'orientation de  $S^2$ ), on a

$$\begin{aligned} s_1 &\stackrel{(3.29)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (i\mu x + \xi) + o(\epsilon) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon e^{-i\theta} + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Il apparait la fonction  $e^{i\theta} \rightarrow e^{-i\theta}$  de degré  $-1$ . Au total on déduit que

$$\mathcal{D}_3 = -1 - 1 = -2.$$

□

#### 3.4.4 Conclusion sur le modèle (3.4)

Formulation donnée dans [10, 12, 11] dans un cadre plus général : pour  $|\mu| \gg 1$ , il y a trois groupes de niveaux  $j = 1, 2, 3$  dans le spectre de  $\hat{H}_\mu$ . Lors de la variation  $\mu = -\infty \rightarrow +\infty$  chaque groupe a une variation  $\Delta\mathcal{N}_j \in \mathbb{Z}$  du nombre de niveaux. On a la formule

$$\Delta\mathcal{N}_j = -\mathcal{C}_j$$

où  $\mathcal{C}_j$  est l'indice de Chern du fibré  $F_j \rightarrow S^2$ .

Autre formulation possible : Dans le modèle défini par (3.4), on observe à partir du symbole, un fibré vectoriel  $F_1$  (ou  $F_1 \oplus F_2$ ) dont l'indice de Chern est  $\mathcal{C} = +2$  et on observe qu'il y a  $\mathcal{N} = +2$  niveaux qui transite (vers le haut) dans le spectre de l'opérateur. On verra en Section 3.5, Théorème 3.14, que cette égalité

$$\mathcal{N} = \mathcal{C}$$

est un cas particulier d'un résultat plus général, appelé **formule de l'indice**, valable pour une famille continue de symboles et pour des espaces et fibrés de dimensions plus grandes.

### 3.5 Modèle général sur $\mathbb{R}^n$ . Formule de l'indice d'Atiyah-Singer

Dans cette Section on propose un cadre général qui contient les modèles particuliers des Sections précédentes 3.3 et 3.4 et montre que les aspects topologiques observés sont une manifestation de la formule de l'indice de Atiyah-Singer.

#### 3.5.1 Famille admissible de symboles $(H_\mu)_\mu$

Soit  $\mu \in ]-2, 2[$  un paramètre. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  point de « l'espace des phases lent ». Soit un entier  $d \geq 2$ . On note  $\text{Herm}(\mathbb{C}^d)$  l'espace des matrices Hermitiennes de taille  $d \times d$  (i.e. opérateurs Hermitiens sur  $\mathbb{C}^d$ ). On considère une fonction lisse (en  $\mu, x, \xi$ )

$$H_\mu : \begin{cases} T^*\mathbb{R}^n & \rightarrow \text{Herm}(\mathbb{C}^d) \\ (x, \xi) & \mapsto H_\mu(x, \xi) \end{cases} \quad (3.30)$$

appelée **symbole** (on suppose que pour chaque  $\mu \in ]-2, 2[$ ,  $H_\mu \in S_{\rho, \delta}^m(T^*\mathbb{R}^n)$  est un symbole convenable, ce qui correspond à des hypothèses de régularité à l'infini, voir Définition A.4.

Pour  $\mu, x, \xi$  fixés, les valeurs propres de la matrice  $H_\mu(x, \xi)$  sont notées

$$\omega_1(\mu, x, \xi) \leq \dots \leq \omega_d(\mu, x, \xi).$$

Nous introduisons maintenant une notation pour les espaces propres. Si on a des indices  $j_1 \leq j_2$  tels que  $\omega_{j_1-1}(\mu, x, \xi) < \omega_{j_1}(\mu, x, \xi)$  et  $\omega_{j_2}(\mu, x, \xi) < \omega_{j_2+1}(\mu, x, \xi)$  c'est à dire qu'il y a des « gap spectraux », (ou si  $j_1 = 1$  ou  $j_2 = d$ ) alors on notera  $F_{j_1; j_2}(\mu, x, \xi)$  l'espace spectral<sup>11</sup> associé au groupe de valeurs propres  $\omega_{j_1} \leq \dots \leq \omega_{j_2}$ . On a  $\dim F_{j_1; j_2}(\mu, x, \xi) = j_2 - j_1 + 1$  et  $F_{j_1; j_2}(\mu, x, \xi)$  dépend de façon  $C^\infty$  de  $(\mu, x, \xi)$  là où il est défini.

On fera l'hypothèse importante suivante sur la famille de symbole  $(H_\mu)_\mu$  illustrée sur la figure 3.8.

**Hypothèse 3.7.** « *Hypothèse de gap spectral* ». On suppose que la famille de symbole  $(H_\mu)_\mu$  est telle qu'il existe un indice  $r \in \{1, \dots, d-1\}$  et  $C > 0$  tels que si  $\|(\mu, x, \xi)\| \geq 1$  et  $|\mu| \leq 2$  alors

$$\omega_r(\mu, x, \xi) < -C \text{ et } \omega_{r+1}(\mu, x, \xi) > +C$$

#### 3.5.2 Indice spectral de la famille de symboles $(H_\mu)_\mu$

Soit  $\epsilon > 0$ . On considère l'opérateur

$$\hat{H}_{\mu, \epsilon} := \text{Op}_\epsilon(H_\mu) \in \text{Herm}(L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^d), \quad (3.31)$$

11. Précisément, l'espace  $F_{j_1; j_2}(\mu, x, \xi) = \text{Ran} \Pi_{j_1; j_2}(\mu, x, \xi)$  est l'image du projecteur spectral obtenu par la formule de Cauchy

$$\Pi_{j_1; j_2}(\mu, x, \xi) := \frac{i}{2\pi} \oint_\gamma (z - H_\mu)^{-1} dz$$

où le chemin d'intégration  $\gamma \subset \mathbb{C}$  contient le segment  $[\omega_{j_1}; \omega_{j_2}]$  et traverse les gaps.

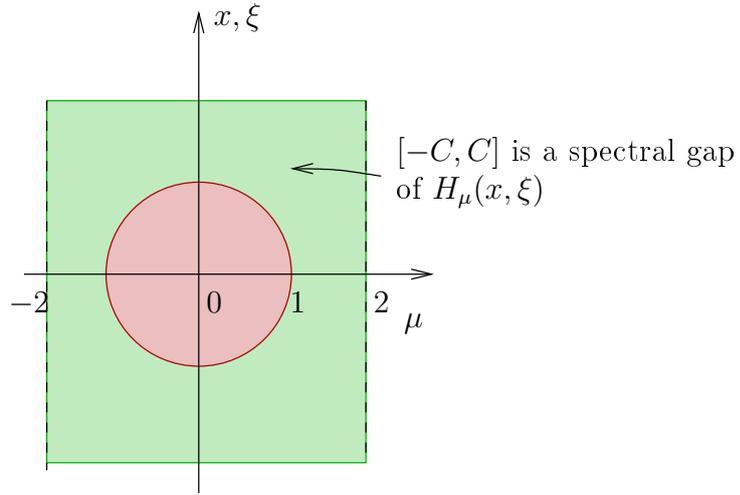


FIGURE 3.8 – Hypothèse 3.7. Dans la zone de paramètres  $(\mu, x, \xi)$  en vert, on suppose que le spectre de la matrice  $H_\mu(x, \xi)$ , contient  $r$  valeurs propres inférieures à  $-C$  et que les autres sont supérieures à  $C > 0$ . Il n’y a donc pas de spectre dans l’intervalle  $[-C, +C]$ .

obtenu par la quantification de Weyl du symbole  $H_\mu$ . Voir annexe A.

**Théorème 3.8.** *Supposons l’hypothèse 3.7. Pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ , tout  $\mu \in (-2, 2)$ , l’opérateur  $\hat{H}_{\mu, \epsilon}$  a du **spectre discret** dans l’intervalle  $] -C + \alpha, +C - \alpha[$  qui dépend continûment de  $\mu, \epsilon$  et **pas de spectre** dans cet intervalle si  $1 + \alpha < |\mu| < 2 - \alpha$ .*

Voir figure 3.9.

*Démonstration.* On utilise la résolvante de l’opérateur  $\hat{H}_{\mu, \epsilon}$  qui est un opérateur compact et continue en  $\mu, \epsilon$ . □

On peut alors donner la définition suivante d’indice spectral  $\mathcal{N}$  du symbole, illustré sur la figure 3.9.

**Définition 3.9.** « **Indice spectral de  $(H_\mu)_\mu$**  ». Avec l'hypothèse 3.7, et d'après le Théorème 3.8, à  $\epsilon$  fixé, **chaque gap spectral peut être indicé** de la façon suivante. Notons  $(\omega_n(\mu, \epsilon))_{n \in \mathbb{Z}}$  les valeurs propres de  $\hat{H}_{\mu, \epsilon}$  appartenant à l'intervalle  $I_\alpha := ]-C + \alpha, +C - \alpha[$  et classées par ordre croissant, indicées par  $n \in \mathbb{Z}$  ( $n$  est bien défini à une constante près). Chaque valeur propre  $\omega_n(\mu, \epsilon) \in \mathbb{R}$  est continue en  $\mu, \epsilon$ . Pour un point  $(\mu, \omega) \in (-2, 2) \times I_\alpha$  différent d'une valeur propre, on associe l'entier  $n \in \mathbb{Z}$  de la valeur propre inférieure, i.e. tel que  $\omega_n(\mu, \epsilon) < \omega < \omega_{n+1}(\mu, \epsilon)$ . On note  $n_{\text{in}} := n(-2, 0)$  l'indice du gap du premier gap et  $n_{\text{out}} := n(2, 0)$  l'indice du dernier gap. Cela définit un entier

$$\mathcal{N} := n_{\text{in}} - n_{\text{out}} \in \mathbb{Z} \quad (3.32)$$

appelé « **indice spectral** de la famille de symboles  $(H_\mu)_\mu$  », qui compte le « nombre de valeurs propres qui montent en fonction de  $\mu$  ».  $\mathcal{N}$  est indépendant de  $\epsilon$  et plus généralement invariant par toute variation continue du symbole  $(H_\mu)_\mu$ . C'est donc un « **invariant topologique** ».

*Remarque 3.10.* La dernière remarque que  $\mathcal{N}$  est invariant par variation continue du symbole découle du fait que l'application  $H_\mu \rightarrow \mathcal{N} \in \mathbb{Z}$  est continue donc localement constante. La question que l'on se pose maintenant est de relier l'indice spectral à d'autres invariants topologiques que l'on obtiendrait à partir du symbole.

*Remarque 3.11.* Pour définir l'indice spectral  $\mathcal{N}$ , on a utilisé la quantification de Weyl en (3.31) pour définir l'opérateur  $\hat{H}_{\mu, \epsilon}$ . On aurait pu choisir une autre quantification. En fait l'indice  $\mathcal{N}$  ne dépend pas du choix de la quantification.

On peut calculer l'indice spectral  $\mathcal{N}$  en calculant le spectre des opérateurs (3.31) et en utilisant la définition (3.32). Cependant, comme  $\mathcal{N}$  est un invariant topologique qui ne dépend que de la classe d'homotopie du symbole, on peut souhaiter trouver une caractérisation simple de  $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}$  à partir du symbole  $(H_\mu)_\mu$ .

**Question 3.12.** *Comment calculer l'indice spectral  $\mathcal{N}$  directement à partir de la famille de symboles  $(H_\mu)_\mu$  ?*

Réponse : dans la section suivante, Théorème 3.14, on va voir que  $\mathcal{N}$  est simplement relié au degré d'une certaine application  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  qui s'obtient à partir du symbole  $(H_\mu)_\mu$ .

### 3.5.3 Indice topologique de Chern $\mathcal{C}$ et formule de l'indice

*Remarque 3.13.* On pourra consulter au préalable la Section B.3 qui présente des informations générales sur la topologie des fibrés vectoriels complexes sur les sphères.

Soit

$$S^{2n} := \{(\mu, x, \xi) \in \mathbb{R}^{1+2n}, \quad \|(\mu, x, \xi)\| = 1\},$$

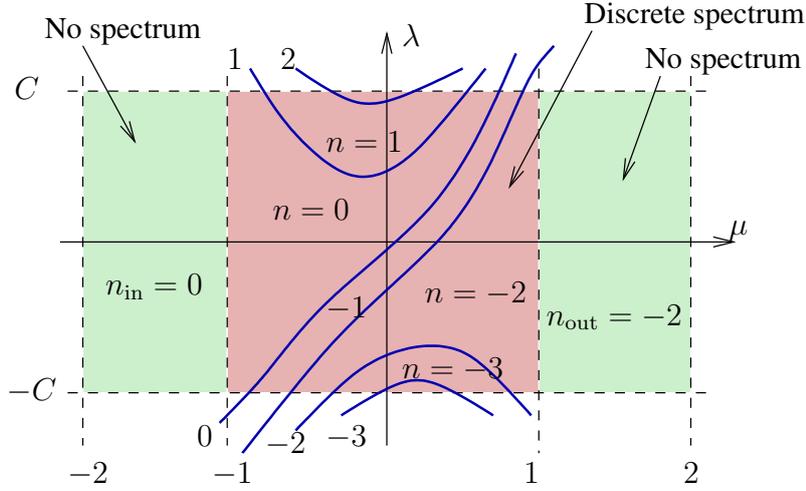


FIGURE 3.9 – Spectre de l'opérateur  $\hat{H}_{\mu, \epsilon}$  à  $\epsilon$  fixé. D'après le théorème 3.8, dans la zone verte il n'y a pas de spectre. Dans la zone rouge le spectre est discret (en bleu) et dépend continûment de  $\mu, \epsilon$ . On peut donc numéroter les valeurs propres par ordre croissant et chaque gap spectral par l'indice  $n$  de la valeur propre inférieure et définir l'indice spectral  $\mathcal{N} = n_{in} - n_{out}$  de la famille de symboles  $(H_{\mu})_{\mu}$ . Dans cet exemple il y a  $\mathcal{N} = 0 - (-2) = +2$  « valeurs qui montent en fonction de  $\mu$  ».

qui est la sphère unité dans l'espace des paramètres. D'après l'hypothèse 3.7, l'espace spectral  $F(\mu, x, \xi) := F_{1,r}(\mu, x, \xi) \subset \mathbb{C}^d$  définit un fibré vectoriel complexe  $C^{\infty}$  de rang  $r$  sur  $S^{2n}$  noté  $F \rightarrow S^{2n}$ . On peut supposer que  $r \geq n$  d'après la remarque 3.15.

D'après le Théorème B.17 de Bott, la topologie de  $F$  est caractérisée par un entier  $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}$  appelé indice topologique de Chern.

**Théorème 3.14.** « *Formule de l'indice* ». Notons  $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}$  l'indice topologique de Chern obtenu à partir du symbole  $(H_{\mu})_{\mu}$ . Notons  $\mathcal{N}$  l'indice spectral défini par (3.32). On a

$$\mathcal{N} = \mathcal{C}. \quad (3.33)$$

*Remarque 3.15.* Si on remplace le symbole matriciel  $H_{\mu}(x, \xi) \in \text{Herm}(\mathbb{C}^d)$  en (3.30) par le symbole matriciel  $\tilde{H}_{\mu}(x, \xi) \in \text{Herm}(\mathbb{C}^{d+m})$  suivant

$$\tilde{H}_{\mu}(x, \xi) = \begin{pmatrix} H_{\mu}(x, \xi) & 0 \\ 0 & \omega_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^m} \end{pmatrix}$$

avec  $\omega_0 < -C$  alors on observe que

- $\tilde{H}_{\mu}$  satisfait l'hypothèse 3.7.
- Son indice spectral  $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$  est égal à celui du symbole  $(\tilde{H}_{\mu})_{\mu}$  car  $\text{Op}_{\epsilon}(\tilde{H}_{\mu}) \equiv \text{Op}_{\epsilon}(H_{\mu}) \oplus \text{Op}_{\epsilon}(\omega_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^m})$  et le spectre de  $\text{Op}_{\epsilon}(\omega_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^m}) = \omega_0 \text{Op}_{\epsilon}(\text{Id}_{\mathbb{C}^m})$  est en  $\omega = \omega_0$ .
- Le fibré vectoriel  $\tilde{F} \rightarrow S^{2n}$  associé est  $\tilde{F} = F \oplus T_m$  où  $T_m = S^{2n} \times \mathbb{C}^m$  est le fibré trivial et  $\text{rank}(\tilde{F}) = \text{rank}(F) + m$ .

### 3.5.4 Arguments de preuve de la formule de l'indice (3.33)

Voir [3, Section III.1.B, p.271]. Voici quelques arguments.

A partir d'une famille de symboles  $H = (H_\mu)_\mu$  on a défini deux indices topologiques  $\mathcal{N}_H \in \mathbb{Z}$  et  $\mathcal{C}_H \in \mathbb{Z}$ . Ces indices dépendent seulement de la classe d'équivalence des symboles que l'on appellera symbole  $H$  dans la suite. On souhaite montrer qu'ils sont égaux,  $\mathcal{N}_H = \mathcal{C}_H$ . La stratégie est la suivante :

- (1) On considère deux **modèles simples** :
  - (a) un symbole  $H^{(0)}$  donnant  $\mathcal{N}_{H^{(0)}} = \mathcal{C}_{H^{(0)}} = 0$ . Il s'agit simplement d'un symbole scalaire constant (matrice de taille  $d = 1$ ).
  - (b) un symbole  $H^{(1)}$  donnant  $\mathcal{N}_{H^{(1)}} = \mathcal{C}_{H^{(1)}} = 1$ . Il s'agit simplement de la forme normale (3.3) de la Section 3.3.
- (2) Étant donné deux symboles  $H, H'$  on définit des opérations particulières notées  $H \oplus H'$  et  $H \otimes H'$  donnant deux nouveaux symboles et faisant que l'espace des symboles  $(\{H\}, \oplus, \otimes)$  est un anneau. On observe que  $H^{(0)}, H^{(1)}$  sont respectivement l'élément neutre pour  $\oplus, \otimes$  et engendrent cet anneau.
- (3) On montre que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{H \oplus H'} &= \mathcal{N}_H + \mathcal{N}_{H'}, & \mathcal{C}_{H \oplus H'} &= \mathcal{C}_H + \mathcal{C}_{H'}, \\ \mathcal{N}_{H \otimes H'} &= \mathcal{N}_H \mathcal{N}_{H'}, & \mathcal{C}_{H \otimes H'} &= \mathcal{C}_H \mathcal{C}_{H'},\end{aligned}$$

autrement dit  $\mathcal{N} : \{H\} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $\mathcal{C} : \{H\} \rightarrow \mathbb{Z}$  sont des homomorphismes d'anneau.

- (4) On déduit que pour tout  $H \in \{H\}$ , on a  $\mathcal{N}_H = \mathcal{C}_H$ .

### 3.5.5 Cas particulier de symboles matriciels linéaire en $(\mu, x, \xi)$

Si on a une fonction linéaire

$$\tilde{H} : (\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}^{1+2n} \rightarrow H(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{\xi}) \in \text{Herm}(\mathbb{C}^d)$$

et la règle de quantification  $\text{Op}_1(\tilde{\xi}) = -i\partial_{\tilde{x}}$  (i.e. avec  $\epsilon = 1$ ) alors pour  $\epsilon > 0$ , on effectue le changement de variables

$$\mu = \sqrt{\epsilon}\tilde{\mu}, \quad x = \sqrt{\epsilon}\tilde{x},$$

qui donne

$$\text{Op}_\epsilon(\xi) = -i\epsilon\partial_x = -i\sqrt{\epsilon}\partial_{\tilde{x}} = \sqrt{\epsilon}\text{Op}_1(\tilde{\xi})$$

et donc le symbole  $H(\mu, x, \xi) = \sqrt{\epsilon}\tilde{H}(\mu, x, \xi)$  vérifie

$$\text{Op}_\epsilon(H_\mu) = \sqrt{\epsilon}\text{Op}_1(\tilde{H}_{\tilde{\mu}})$$

## 4 Propriétés topologiques des dynamiques lent-rapide couplées sur une variété

**Dynamique lente :** la dynamique lente est modélisée par le formalisme semi-classique : soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique « quantifiable »<sup>12</sup> au sens où on a un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\hbar$ , on a une quantification :

$$\text{Op}_\hbar : \mathcal{S}(M) \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_\hbar),$$

vérifiant les axiomes du star-produit<sup>13</sup>  $\star$  pour  $\text{Op}_\hbar(a \star b) = \text{Op}_\hbar(a) \circ \text{Op}_\hbar(b)$ . On appellera  $M$  « l'espace des phases de la dynamique lente », et  $\mathcal{H}_\hbar$  « l'espace quantique de la dynamique lente ». Le paramètre  $\hbar \ll 1$  définira la lenteur (limite adiabatique ou limite semi-classique).

**Couplage à la dynamique rapide :** On considère un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  (appelé espace de la dynamique rapide) et une fonction  $C^\infty$

$$H : M \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$$

qui est un symbole sur  $M$  à valeurs opérateurs dans  $\mathcal{H}$ . On suppose  $H(\rho)$  auto-adjoint pour tout  $\rho \in M$ . La quantification ci-dessus définit un opérateur

$$\text{Op}(H) \in \text{End}(\mathcal{H}_\hbar \otimes \mathcal{H})$$

**Hypothèses :** Notons  $\Sigma(\rho) \subset \mathbb{R}$  le spectre de  $H(\rho)$ . Pour tout  $\rho \in M$ , on suppose que il existe deux gaps séparant  $n$  valeurs propres  $(E_j(\rho))_{j=1\dots n}$  du reste du spectre c'est à dire deux courbes continues :

$$\exists \gamma_1, \gamma_2 : M \rightarrow \mathbb{R}, \text{ avec } \forall \rho \in M, \gamma_1(\rho) < \gamma_2(\rho), \quad \gamma_j(\rho) \notin \Sigma(\rho)$$

$$[\gamma_1(\rho), \gamma_2(\rho)] \cap \Sigma(\rho) = \{E_1(\rho), E_2(\rho), \dots, E_n(\rho)\}$$

On note  $F(\rho) = \bigoplus_{j=1}^n F_j(\rho)$  la somme directe des espaces propres des valeurs propres  $(E_j(\rho))_{j=1\dots n}$  et

$$\pi(\rho) = \sum_{j=1}^n \pi_j(\rho) : \mathcal{H} \rightarrow F(\rho) \tag{4.1}$$

est le projecteur orthogonal de rang  $n$  sur  $F(\rho)$  (somme des projecteurs  $\pi_j(\rho)$  sur les espaces propres de  $E_j(\rho)$ ).

12. Par exemple  $\mathcal{H}_\hbar = \Gamma(M; L^{\otimes N})$  qui est l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites  $L^{\otimes N} \rightarrow M$ , avec  $\hbar = \frac{1}{2\pi N}$

13. par exemple la quantification de Toeplitz  $\text{Op}_\hbar(a) := P\mathcal{M}_aP$ , où  $P$  est le projecteur sur les sections holomorphes et  $\mathcal{M}_a$  la multiplication par  $a$

## 4.1 Théorème adiabatique pour les systèmes lent-rapides

**Théorème 4.1** (« Théorème adiabatique pour lent-rapide »). [5] Si  $\pi(\rho)$  est défini par (2.21), il existe une unique série de symboles à valeur opérateurs auto-adjoints dans  $\mathcal{H}$  :

$$\forall \rho \in M, \quad \Pi(\rho) = \pi(\rho) + \epsilon \Pi_1(\rho) + \epsilon^2 \Pi_2(\rho) + \dots \in \text{Herm}(\mathcal{H}) \quad (4.2)$$

c'est à dire  $\epsilon$ -proche de  $\pi(\rho)$ , et telle que pour tout  $N \geq 1$ , et considérant les  $N$  premiers termes  $\Pi_{(N)}(\rho) = \pi(\rho) + \epsilon \Pi_1(\rho) + \dots + \epsilon^{N-1} \Pi_{N-1}(\rho)$ , il existe  $C_N > 0$  tel que

(1) On a

$$\|\Pi_{(N)}(\rho) \star \Pi_{(N)}(\rho) - \Pi_{(N)}(\rho)\| \leq C_N \epsilon^N,$$

c'est à dire que  $\text{Op}(\Pi_{(N)})$  est un quasi-projecteur orthogonal de rang  $n$ .

(2) On a

$$\|[\text{Op}(H), \text{Op}(\Pi_{(N)})]\| \leq C_N \epsilon^N$$

qui signifie que  $\text{Op}(\Pi_{(N)})$  est quasiment un projecteur spectral de  $\text{Op}(H)$ .

Le Théorème suivant est une version de la formule de l'indice d'Atiyah-Singer (ou de Riemann-Roch-Hirzebruch) due à Fedosov et montre une manifestation topologique dans le nombre de valeurs propres du spectre de  $\text{Op}(H)$ . On donne des exemples simples ci-dessous.

**Théorème 4.2** (« Théorème de l'indice pour les systèmes adiabatique lent-rapide »). [14][15][8, thm7.1]. Si  $M$  est compacte et si  $L^{\otimes N} \rightarrow M$  est le fibré en droite quantifiant ( $\hbar = \frac{1}{2\pi N}$ ) alors

$$\text{Rank}(\text{Op}(\Pi)) = \int_M [\text{Ch}(F) \wedge e^{N\omega} \wedge \text{Todd}(TM)]_{2d} \quad (4.3)$$

où

$$e^{N\omega} = 1 + N\omega + \dots + \frac{N^d \omega^d}{d!}$$

$\text{Ch}(F)$  est le caractère de Chern du fibré vectoriel  $F$  et

$$\text{Todd}(TM) = \det\left(\frac{\Omega(TM)}{1 - \exp(-\Omega(TM))}\right) = 1 + \frac{\Omega(TM)}{2} + \dots \in H_{DR}^\bullet(M)$$

est la classe de Todd du fibré tangent  $TM$  définie à partir de la courbure de Riemann  $\Omega(TM)$  et  $[\cdot]_{2d}$  est la restrictions aux 2d-formes.

## 4.2 Exemple : couplage spin-orbite

Ref : [10, 11, 13].

L'espace de phase lent est  $S^2$  décrivant un moment angulaire  $\vec{J} \in S^2$  et l'espace quantique lent est  $\mathcal{H}_j$  la représentation irréductible de  $SU_2$  de  $\dim \mathcal{H}_j = 2j + 1$ .

L'espace quantique rapide est celui d'un spin 1/2,  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ .

Le symbole dépend d'un paramètre extérieur  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est

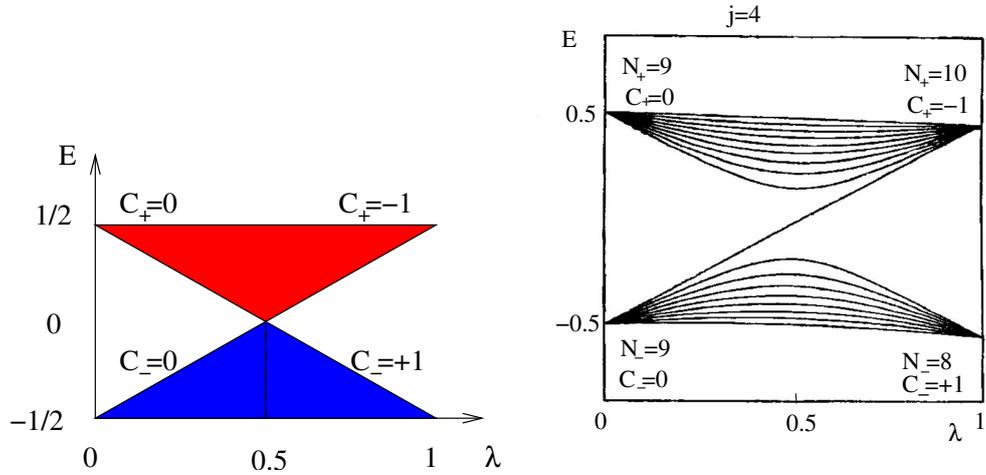
$$H_\lambda(\vec{J}) = (1 - \lambda) S_z + \lambda \vec{J} \cdot \vec{S}$$

avec  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$  les matrices de Pauli.

Dans ce cas, la formule (4.3) s'écrit plus simplement :

$$\mathcal{N}_\pm = \text{Rank}(\text{Op}(\Pi_\pm)) = (2j + 1) - C_\pm$$

où  $C_\pm \in \mathbb{Z}$  est l'indice de Chern du fibré  $F_\pm \rightarrow S^2$ .



## A Quantification, opérateurs pseudo-différentiels, analyse semiclassique sur $\mathbb{R}^{2d}$

### A.1 Quantification et OPD

Références : [34][27][25][6].

On note  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $\xi \in \mathbb{R}^d$  les variables duales. Le petit paramètre est  $\hbar > 0$  (noté  $\epsilon > 0$  dans ces notes). Si  $a(x, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  est une fonction sur l'espace des phase  $T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d}$  appelée « **symbole** », on lui associe un opérateur appelé **opérateur pseudo-différentiel (OPD)**  $\text{Op}_\hbar(a)$  :

$$(\hat{a}\psi)(x) = (\text{Op}_\hbar(a)\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i\xi \cdot (x-y)/\hbar} \psi(y) dy d\xi$$

L'opération

$$\text{Op}_\hbar : a \rightarrow \hat{a} = \text{Op}_\hbar(a)$$

s'appelle la **quantification de Weyl**.

*Remarque A.1.* Par exemple,

- pour une fonction  $V(x)$  (fonction de  $x$  seulement) on vérifie que  $\text{Op}_\hbar(V(x)) = V(x)$ , opérateur multiplication par  $V$ .
- On a  $\text{Op}_\hbar(\xi_j) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j}$  et de même  $\text{Op}_\hbar(V(\xi)) = V(\text{Op}_\hbar(\xi))$ , donc  $\text{Op}_\hbar(|\xi|^2) = \sum_j (\text{Op}_\hbar(\xi^j))^2 = -\hbar^2 \Delta$ . Ainsi on obtient l'**opérateur Hamiltonien** en mécanique quantique :

$$H(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2m} + V(x) \quad \rightarrow \quad \hat{H} = \text{Op}(H) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x)$$

- On a  $\text{Op}_\hbar(\bar{a}) = (\text{Op}_\hbar(a))^*$  (adjoint).

## A.2 Algèbre des opérateurs PDO

La proposition suivante montre que **le produit de deux OPD est un OPD**.

**Proposition A.2.** — [34, sec.4.3] « *Composition d'opérateurs et star-produit de symboles* » : Pour tout  $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  on a pour  $\hbar \ll 1$

$$\text{Op}_\hbar(a) \circ \text{Op}_\hbar(b) = \text{Op}_\hbar(a \star b) \quad (\text{A.1})$$

avec  $a \star b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  donné par

$$\begin{aligned} a \star b &= \left( e^{i\hbar \hat{A}} (a(x, \xi) b(y, \eta)) \right)_{y=x, \eta=\xi} \\ &= ab + \hbar \frac{1}{2i} \{a, b\} + \hbar^2 \dots \end{aligned}$$

avec  $\hat{A} = \frac{1}{2} (\partial_x \partial_\eta - \partial_\xi \partial_y)$

- « *Commutateurs d'opérateurs et crochets de Poisson de symboles* » :

$$\left[ \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \text{Op}_\hbar(a), \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \text{Op}_\hbar(b) \right] = \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \text{Op}_\hbar(\{a, b\}) (1 + O(\hbar)) \quad (\text{A.2})$$

c'est à dire :

$$[a, b]_\star := a \star b - b \star a = i\hbar \{a, b\} + O(\hbar^3)$$

- **Trace d'opérateurs** :

$$\text{Tr}(\text{Op}_\hbar(a)) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x, \xi) dx d\xi \quad (\text{A.3})$$

**Exemple A.3.** on calcule directement que  $x(-i\hbar \frac{d}{dx})\psi - (-i\hbar \frac{d}{dx})(x\psi) = i\hbar\psi$  et par ailleurs  $\{x, \xi\} = 1$ . Cela s'écrit  $[\hat{x}, \hat{\xi}] = i\hbar \text{Id}$  ou

$$\left[ \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \text{Op}_\hbar(x), \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \text{Op}_\hbar(\xi) \right] = \left( -\frac{i}{\hbar} \right) \text{Op}_\hbar(\{x, \xi\})$$

conformément à (A.2).

### A.3 Classes de symboles

Les relations d'algèbres de la proposition A.2 sont un peu formelles. Pour les rendre utilisables, il faut contrôler les restes en terme de norme d'opérateurs.

Pour cela il faut faire des hypothèses sur les symboles, qui correspondent au fait que les symboles varient peu à « l'échelle des cellules de Planck  $dx d\xi \sim \hbar$  » (i.e. principe d'incertitude). On appelle classe de symboles des ensemble de symboles qui forme pour algèbre fermée pour l'opération  $\star$ . For example, the following classes of symbols have been introduced by Hörmander [21]. Let  $M$  be a smooth compact manifold.

**Definition A.4.** Let  $m \in \mathbb{R}$  called the **order**. Let  $0 \leq \delta < \frac{1}{2} < \rho \leq 1$ . The **class of symbols**  $S_{\rho,\delta}^m$  contains smooth functions  $a \in C^\infty(T^*M)$  such that on any charts of  $U \subset M$  with coordinates  $x = (x_1, \dots, x_n)$  and associated dual coordinates  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  on  $T_x^*U$ , any multi-index  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , there is a constant  $C_{\alpha,\beta}$  such that

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \quad (\text{A.4})$$

The case  $\rho = 1, \delta = 0$  is very common. We denote  $S^m := S_{1,0}^m$ .

For example on a chart,  $p(x, \xi) = \langle \xi \rangle^m$  is a symbol  $p \in S^m$ .

If  $m \leq m'$  then  $S^m \subset S^{m'}$ . We have  $S^{-\infty} := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m = \mathcal{S}(T^*M)$ .

*Remark A.5.* Le sens géométrique de la définition A.4 n'est pas clair a priori. Hörmander a amélioré la signification géométrique dans [20, 21] en introduisant une métrique associée dans l'espace des phases  $T^*M$ . Voir aussi [27], [9].

## B Espaces fibrés vectoriels et topologie

**References :** Fedosov [14], page 11, Hatcher [19] p.14.

### B.1 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 réel sur $S^1$

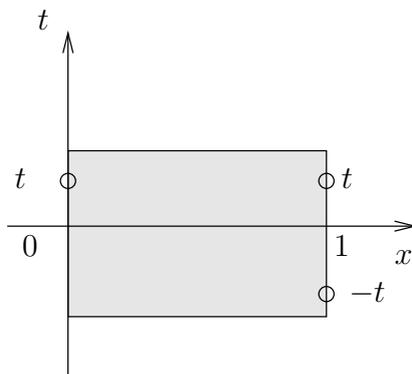
On donnera en Section B.3 des définitions précises. On commence par une définition imprécise mais illustrée sur des exemples. Un **espace fibré vectoriel**  $F \rightarrow B$  de rang  $r$  est une collection d'espaces vectoriels (réels ou complexes), tous de même dimension  $r$  et paramétrés par des points sur un espace de base  $B$ . Localement on suppose que cette collection est comme un produit direct.

#### B.1.1 Construction d'un fibré réel de rang 1 sur $S^1$

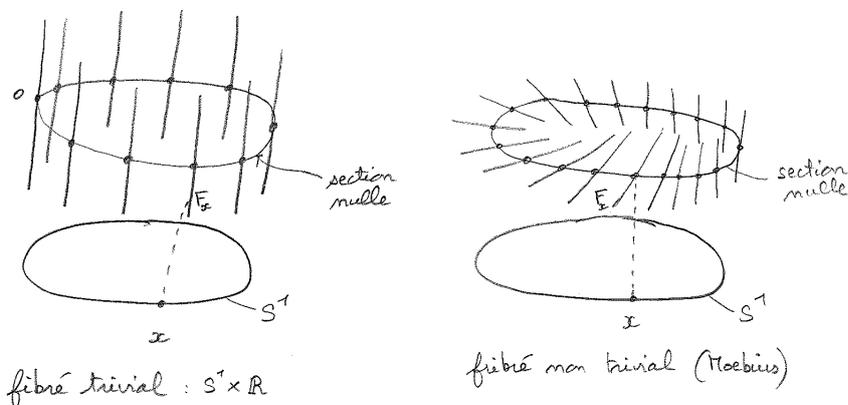
L'exemple le plus simple est le cas où l'espace de base est le cercle  $B = S^1$  et le rang est  $r = 1$ , c'est à dire que chaque fibre est isomorphe (comme espace vectoriel) à la droite réelle  $\mathbb{R}$ .

On imagine sans peine deux exemples d'espace fibré réel de rang 1 sur  $S^1$  :

- Le **fibré trivial**  $S^1 \times \mathbb{R}$  que l'on obtient à partir du fibré  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  sur le segment  $x \in [0, 1]$ , en identifiant les points  $(0, t) \sim (1, t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- Le **fibré de Moëbius**, que l'on obtient à partir du fibré  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  sur le segment  $x \in [0, 1]$ , en identifiant  $(0, t) \sim (1, -t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , c'est à dire que l'on recolle les extrémités à "l'envers".



Le fibré de Moebius n'est pas isomorphe au fibré trivial. Une façon de le justifier est que dans le cas du fibré trivial, le complément de la section nulle ( $s(x) = 0, \forall x$ ) a deux composantes connexes, alors que pour le fibré de Moebius, le complément n'a qu'une composante. (Faire une construction en papier que l'on coupe au ciseaux selon  $s(x) = 0$ ).



**Théorème B.1.** *Tout espace fibré réel  $F \rightarrow S^1$  de rang 1 est isomorphe au fibré trivial ou au fibré de Möebius. Autrement dit il y a seulement deux classes d'équivalences :*

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^1(S^1) = \{0, 1\}$$

associée à un indice  $SW = 0$  : fibré trivial,  $SW = 1$  : fibré de Moebius, qui s'appelle l'indice de **Stiefel-Whitney**. On dit que l'indice  $SW$  caractérise la topologie du fibré  $F$ .

*Démonstration.* Partant d'un fibré quelconque  $F \rightarrow S^1$  de rang 1, on coupe l'espace de base  $S^1$  en un point, et on se retrouve avec le fibré  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  sur le segment  $x \in [0, 1]$ .

Pour reconstruire le fibré initial  $F$ , il y a deux possibilités : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , identifier  $(0, t) \sim (1, t)$ , ou  $(0, t) \sim (1, -t)$ , ce qui donne respectivement le fibré trivial ou de Moebius. Plus précisément cette construction montre l'existence d'un homéomorphisme entre  $F$  et le fibré trivial ou le fibré de Moebius.  $\square$

**Remarque :**

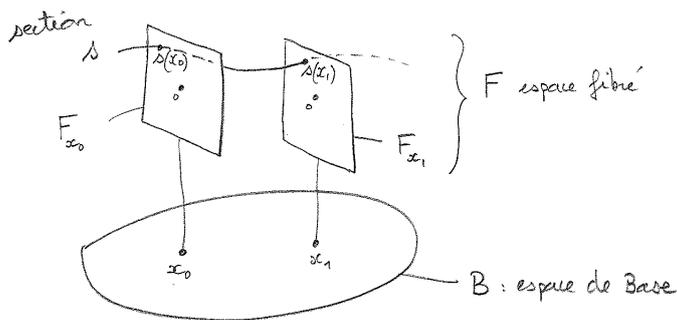
- l'indice de Stiefel-Whitney  $SW = 0, 1$  donne donc le nombre de  $1/2$  tours que font les fibres au-dessus de l'espace de base  $S^1$ . Le cas  $SW = 2$  (1 tour complet) est isomorphe au fibré trivial. On convient donc que l'indice  $SW \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ , c'est à dire  $SW$  est un entier modulo 2. Il est intéressant d'avoir la structure additive sur les indices  $SW$  ( $1 + 1 = 0$  par exemple).
- Remarquer que dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , un ruban faisant un tour, ne peut pas être déformé continûment vers le fibré trivial<sup>14</sup>. Cette restriction est due au plongement dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  (dans  $\mathbb{R}^4$ , cela serait possible), et n'est pas une propriété intrinsèque du fibré qui est trivial.

**B.1.2 Topologie d'un espace fibré réel de rang 1 sur  $S^1$  à partir des zéros d'une section**

**Définition B.2.** Si  $F \rightarrow B$  est un espace fibré vectoriel, une **section globale** du fibré est une application (continue ou  $C^\infty$ )  $s : B \rightarrow F$  qui à chaque point de base  $x \in B$  associe un point dans la fibre  $s(x) \in F_x$ . On note

$$C^\infty(B, F) \tag{B.1}$$

l'espace des sections  $C^\infty$  du fibré  $F$ .



On appelle **zéro de la section**  $s$  les points  $x \in B$  tels que  $s(x) = 0$ .

Considérons tout d'abord le cas très simple et instructif d'un fibré réel de rang 1 sur  $S^1$ . Une section est localement comme une fonction numérique à valeur réelle, donc génériquement, elle s'annule transversalement en des points isolés. Noter que "générique" signifie

14. Preuve : si on découpe ce ruban sur la section  $s = 0$ , on obtient deux rubans entrelacés, alors que la même découpe pour un ruban trivial donne deux rubans séparés.

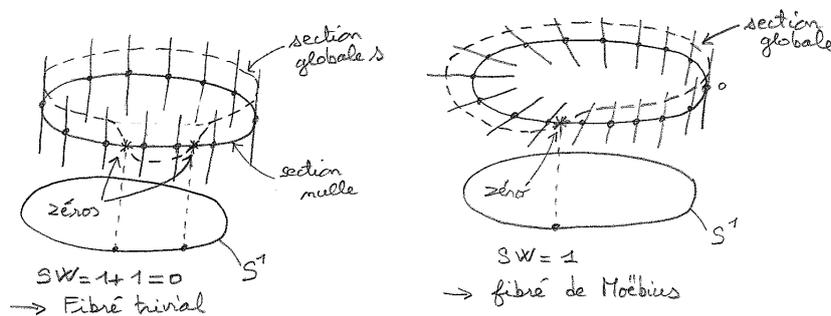
“sauf cas exceptionnel”.

La figure suivante montre que l'on a le résultat suivant :

**Théorème B.3.** Si  $F \rightarrow S^1$  est un fibré réel de rang 1 sur  $S^1$ , et  $s$  est une section “générique”, alors l'indice topologique  $SW(F)$  est donné par

$$SW(F) = \sum_{x \text{ t.q. } s(x)=0} \sigma_s(x)$$

où  $\sigma_s(x) = 1$  pour un zéro générique de la section  $s$ . La somme est obtenue modulo 2, et ainsi  $SW(F) \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ . Le résultat est indépendant de la section  $s$  choisie.



## B.2 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 complexe sur $S^2$

### B.2.1 Construction d'un fibré complexe de rang 1 sur $S^2$

Voyons tout d'abord comment construire un espace fibré complexe de rang 1 sur  $S^2$ . On découpe la sphère  $S^2$  le long de l'équateur, obtenant deux hémisphères  $H_1$  et  $H_2$ . On considère les fibrés triviaux  $F_1 = H_1 \times \mathbb{R}^2$  et  $F_2 = H_2 \times \mathbb{R}^2$  sur chaque hémisphère. Pour construire un fibré sur  $S^2$ , il suffit de décider comment “coller” ou “identifier” les fibres de  $F_1$  au-dessus de l'équateur avec celles de  $F_2$ . Notons  $\theta \in S^1$  l'angle<sup>15</sup> (longitude) qui caractérise un point sur l'équateur. Notons  $\varphi(\theta) \in S^1$  l'angle qui signifie que la fibre  $F_2(\theta)$  est recollée à la fibre  $F_1(\theta)$  après une rotation d'angle  $\varphi(\theta)$ . En notation complexe,  $F_2(\theta) = e^{i\varphi(\theta)} F_1(\theta)$ . Après recollement des deux hémisphères et des fibres au dessus de l'équateur, on obtient un fibré  $F \rightarrow S^2$  de rang 2. Ainsi le fibré  $F$  que l'on vient de construire est défini par sa **fonction de recollement** sur l'équateur :

$$\varphi : \theta \in S^1 \rightarrow \varphi(\theta) \in S^1$$

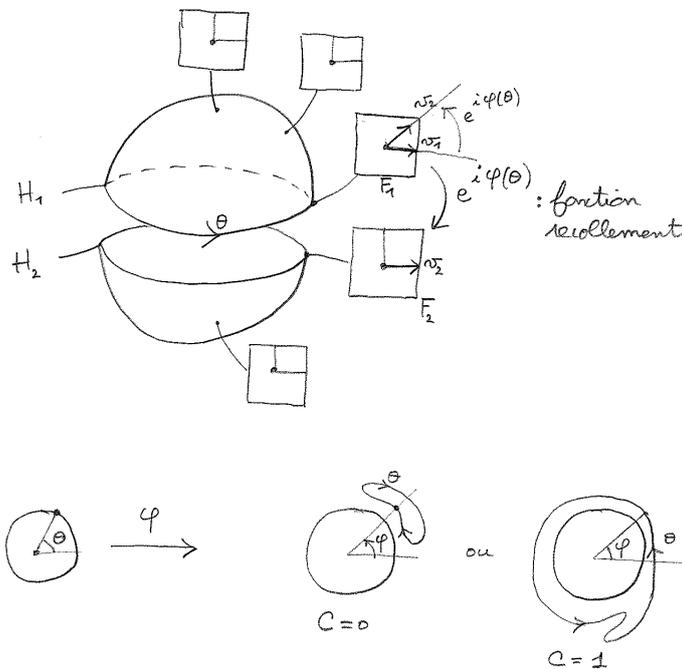
C'est une fonction continue et périodique donc :  $\varphi(2\pi) \equiv \varphi(0) [2\pi]$ , soit

$$\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi C, \quad C \in \mathbb{Z} \tag{B.2}$$

l'indice entier  $C$  représente le nombre de tours que fait  $\varphi$ , lorsque  $\theta$  fait un tour. On appelle  $C$  le **degré de l'application**  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ . Il est clair que deux fonctions  $\varphi, \varphi'$

<sup>15</sup>. Ici on note  $S^1$  le cercle.  $\theta \in S^1$  est donc repéré par un angle  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même degré  $C = C'$ , et par conséquent les fibrés  $F$  et  $F'$  sont isomorphes si et seulement si  $C = C'$ .



**Théorème B.4.** *Tout fibré complexe  $F \rightarrow S^2$  de rang 1 est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus avec une fonction de recollement sur l'équateur. Sa topologie est caractérisée par un entier  $C \in \mathbb{Z}$  appelé (1er) **indice de Chern**. Autrement dit*

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}^2(S^2) = \mathbb{Z}$$

*Démonstration.* Il nous faut montrer que tout fibré  $F$  est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus. Partant d'un tel fibré  $F$ , on coupe l'espace de base  $S^2$  le long de l'équateur noté  $E$  pour obtenir deux fibrés  $F_1 \rightarrow H_1$  et  $F_2 \rightarrow H_2$ . Chacun de ces fibrés est trivial car<sup>16</sup> les espaces de base sont des disques (espaces contractiles). Le fibré  $F$  est donc défini par sa fonction de recollement au dessus de l'équateur  $E$ .  $\square$

Considérons l'exemple du fibré tangent  $TS^2$ .  $TS^2$  peut être identifié à un fibré complexe de rang 1 car  $S^2$  est orientable.

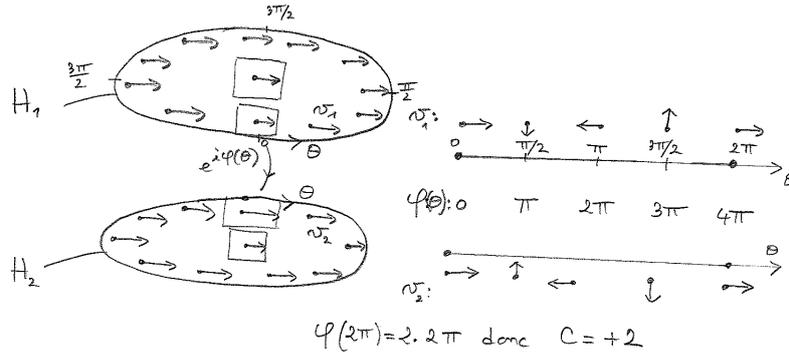
**Théorème B.5.** *Le fibré tangent  $TS^2$  n'est pas trivial, son indice de Chern est :*

$$C(TS^2) = +2 \tag{B.3}$$

16. Voir [19, corollaire 1.8 p.21] ou d'après l'explication suivante : on choisit un vecteur non nul  $v_0 \in F_1(x_0)$  où  $x_0 \in H_1$  est le pôle nord. Soit  $x_\theta \in E$  un point sur l'équateur. En utilisant un transport parallèle, on transporte le vecteur  $v_0$  du point  $x_0$  vers  $x_\theta \in E$ , radialement. Cela définit une section  $v_1$  jamais nulle du fibré  $F_1 \rightarrow H_1$ , montrant que ce fibré est trivial, donc isomorphe à  $F_1 \simeq H_1 \times \mathbb{R}^2$ . De même pour  $F_2 \simeq H_2 \times \mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* On va calculer le degré  $C$  de sa fonction de recollement défini par Eq.(B.8). On procède comme dans la preuve ci-dessus. On trivialisise le fibré au dessus de  $H_1$ , et  $H_2$ , et on déduit le degré  $C$  de la fonction de recollement. Voir figure qui représente les deux hémisphères vues par dessus et dessous avec un champ de vecteur sur chacune. On trouve  $C = +2$ .

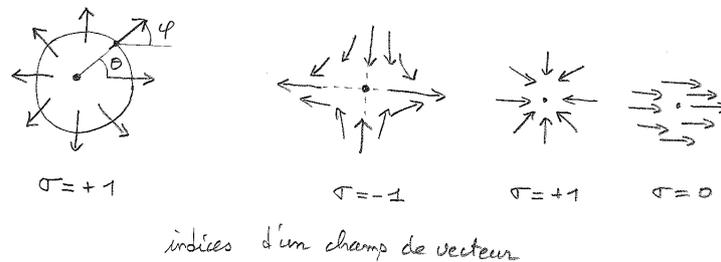
□



*Remarque B.6.* Le fibré trivial  $S^2 \times \mathbb{C}$  a l'indice de Chern  $C = 0$ .

### B.2.2 Topologie d'un espace fibré sur $S^2$ à partir des zéros d'une section

Il y a un résultat analogue à Th. B.3 pour un fibré complexe  $F \rightarrow S^2$  de rang 1 sur  $S^2$ . Avant de l'établir, remarquons qu'une section  $s$  d'un tel fibré est localement comme une fonction à deux variables et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , donc génériquement, elle s'annule transversalement en des points isolés. Si  $\theta \in S^1$  paramétrise un petit cercle de points  $x_\theta$  autour d'un zéro  $x \in S^2$  de  $s$ , alors par hypothèse, la valeur de la section  $s(x_\theta) \in F_{x_\theta} \cong \mathbb{C}$  est non nulle pour tout  $x_\theta$ , et l'on note  $\varphi \in S^1$  son argument. Au zéro est donc associé une application  $\varphi : \theta \rightarrow \varphi(\theta)$  dont le degré aussi appelé **indice** du zéro de la section (défini par Eq.(B.8)), sera noté  $\sigma_s(x) \in \mathbb{Z}$ . Génériquement,  $\sigma_s(x) = \pm 1$ . (Noter que le signe de  $\sigma_s(x)$  dépend de l'orientation choisie de l'espace de base et de la fibre. Dans le cas du fibré tangent, ces deux orientations ne sont pas indépendantes, et le résultat  $\sigma_s(x)$  devient indépendant du choix de l'orientation).



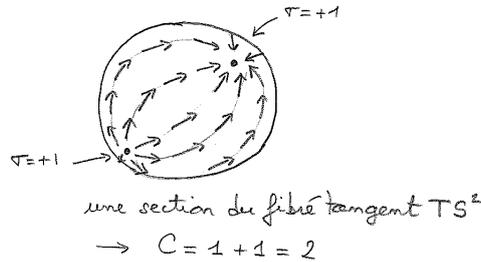
**Théorème B.7.** Si  $F \rightarrow S^2$  est un fibré complexe de rang 1 sur  $S^2$ , et  $s$  est une section "générique", alors l'indice topologique de Chern  $C(F)$  est donné par

$$C(F) = \sum_{x \text{ t.q. } s(x)=0} \sigma_s(x) \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.4})$$

où  $\sigma_s(x) = \pm 1$  caractérise le degré du zéro. Le résultat est indépendant de la section  $s$  choisie.

*Démonstration.* Dans la preuve du théorème B.4, on a construit des sections jamais nulles  $v_1, v_2$  respectivement des fibrés  $F \rightarrow H_1, F \rightarrow H_2$ . Si on modifie ces sections  $v_1, v_2$  pour les faire coïncider sur l'équateur dans le but de construire une section globale  $s$  du fibré  $F \rightarrow S^2$ , on peut y arriver sauf en des points isolés, qui seront les zéros de  $s$ , et on s'aperçoit que la somme des indices sera égale au degré de la fonction de recollement  $\varphi$  donc à  $C(F)$ .  $\square$

**Exemple du fibré  $TS^2$**  La figure suivante montre un champ de vecteur sur la sphère  $S^2$ . C'est une section globale du fibré tangent. Ce champ de vecteur a deux zéros d'indice +1 chacun. Ainsi on retrouve  $C(TS^2) = +2$ , soit Eq.(B.3).



*Remarque B.8.* Si  $\Omega$  est la (2 forme) courbure de Gauss de la sphère (autrement dit la courbure du fibré  $TS^2$ ), la formule de Gauss-Bonnet donne :

$$\int_{S^2} \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 = C \quad (\text{B.5})$$

C'est un cas particulier de la formule de Chern-Weil (B.11).

*Remarque B.9.* Si l'on souhaite expliciter le champ de vecteur, on peut prendre le vecteur fixe dans  $\mathbb{R}^3$  :  $V = (0, 0, 1)$  orienté selon l'axe  $z$ . Alors pour un point  $x \in S^2$  donné, on choisit :

$$V_x = P_x V \in TS^2 \quad (\text{B.6})$$

est un vecteur tangent. Le champ de vecteur  $V_x$  s'annule au pôle nord et sud, avec un indice +1.

## B.3 Vector bundles in terms of transition functions

### B.3.1 Definitions

**Définition B.10.** We say that  $(F, \pi, B)$  is a **complex vector bundle of rank  $r$**  if  $F, B$  are manifolds,  $\pi : F \rightarrow B$  a map such that there exists a covering  $(U_i)_i$  of  $B$  and diffeomorphisms  $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$  such that

- (1)  $\pi : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  is the composition of  $\varphi_i$  with projection onto  $U_i$
- (2) if  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  then  $\varphi_i \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$  which maps  $(x, u) \rightarrow (x, f_{ij}(x)u)$  with  $f_{ij}(x) \in GL(r, \mathbb{C})$ .

We say that  $\varphi_i$  are **trivialization functions**, and  $f_{ij}$  are **transition functions**.

**Proposition B.11.** *The transition functions fulfill the **cocycle conditions** :*

$$f_{ji} = f_{ij}^{-1}, \forall x \in U_i \cap U_j \quad f_{ij} f_{jk} f_{ki} = 1, \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

*Conversely functions  $f_{ij}$  with cocycle conditions, define a unique vector bundle.*

*Démonstration.*  $f_{ji}^{-1} = (\varphi_j \varphi_i^{-1})^{-1} = \varphi_i \varphi_j^{-1} = f_{ij}$ . And  $f_{ij} f_{jk} f_{ki} = (\varphi_i \varphi_j^{-1}) (\varphi_j \varphi_k^{-1}) (\varphi_k \varphi_i^{-1}) = 1$ .

**Définition B.12.** Two vector bundles  $(F, \pi, B)$  and  $(F', \pi', B)$  (with same base  $B$ ) are **isomorphic** if there exists  $h : F \rightarrow F'$  which preserves the fibers and such that  $h : F_x \rightarrow F'_x$  is an isomorphism of linear spaces. □

We write  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^r(B)$  for the isomorphism class of complex vector bundles of rank  $r$  over  $B$ .

**Proposition B.13.** *Two vector bundles  $F$  and  $F'$  are isomorphic iff there exists functions  $h_i : U_i \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  such that*

$$f'_{ij} = h_i f_{ij} h_j^{-1}$$

*Démonstration.* If  $h$  is an isomorphism, define  $h_i = \varphi'_i h \varphi_i^{-1}$ . Conversely, define  $h = (\varphi'_i)^{-1} h_i \varphi_i$  on  $U_i$  which does not depend on  $i$ . □

### B.3.2 Complex Vector bundles over spheres $S^k$

Reference : Hatcher [19] p.22.

We treat the case where the base space is

$$B = S^k := \left\{ (x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad \sum_j x_j^2 = 1 \right\}.$$

The sphere  $S^k = D_1^k \cup D_2^k$  can be decomposed in two disks (or hemispheres), the north hemisphere  $D_1^k$  where  $x_{k+1} \geq 0$  and the south hemisphere  $D_2^k$  where  $x_{k+1} \leq 0$ . The common

set is the equator  $S^{k-1} = D_1^k \cap D_2^k$  which is also a sphere. So a vector bundle is described by the transition function at the equator :  $f_{21} : S^{k-1} \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ , which is called the **clutching function**.

Let us denote  $[f_{21}]$  the homotopy class of the map  $f_{21}$ . We have  $[S^{k-1}, GL(r, \mathbb{C})] \cong [S^{k-1}, U(r)] =: \pi_{k-1}(U(r))$ .

**Proposition B.14.** *Two vector bundles  $F \rightarrow S^k, F' \rightarrow S^k$  are isomorphic iff their clutching functions are homotopic  $[f_{21}] = [f'_{21}]$ . In other words*

$$\text{Vect}_{\mathbb{C}}^r(S^k) \cong \pi_{k-1}(U(r))$$

**Homotopy groups of spheres** Les groupes  $\text{Vect}^r(S^k) = \pi_{k-1}(U(r))$  s'obtiennent à partir des groupes d'homotopie des sphères  $\pi_m(S^n)$  d'après  $U(r)/U(r-1) \cong S^{2r-1}$  donnant la fibration

$$U(r) \cong (S^{2r-1} \leftarrow S^{2r-3} \leftarrow \dots \leftarrow S^5 \leftarrow S^3 \leftarrow S^1) \quad (\text{B.7})$$

Voir table B.1. Voir Livre de Hatcher.

$\pi_n(S^m)$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$
$S^1$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
$S^2$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$
$S^3$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_6$
$S^4$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$
$S^5$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$S^6$	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
$S^7$	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$

TABLE B.1 – Groupes d'homotopie des sphères  $\pi_m(S^n)$

On a

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

qui est le degré (et se calcule en considérant la somme des signes du déterminant en un point donné, cf wiki\_en) :

**Définition B.15.** le **degré** d'une application  $f : S^m \rightarrow S^m$  est

$$\text{deg}(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(\det(D_x f)) \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.8})$$

qui est indépendant du choix d'un point générique  $y \in S^m$ . Dans le cas  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , le degré  $\text{deg}(f)$  s'appelle aussi « winding number de  $f$  ».

Pour  $m < n$  on a

$$\pi_m(S^n) = 0,$$

car l'image de  $f : S^m \rightarrow S^n$  est non surjective et donc passe à  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n$  qui se rétracte en un point car  $\mathbb{R}^m$  est contractile. Mais pour  $m > n$ , les groupes d'homotopie des sphères  $\pi_n(S^m)$  sont assez compliqués et pas tous connus.

**Homotopy groups of  $U(r)$**  A partir de la fibration (B.7) et du tableau B.1 on déduit le tableau B.2. Voir [19], [18].

$\pi_k(U(r))$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$
$U(1)$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
$U(2)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$U(3)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_6$
$U(4)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$U(5)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{K}(S^k)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0

$\text{Vect}^r(S^k)$	$S^2$	$S^3$	$S^4$	$S^5$	$S^6$	$S^7$
$\text{Vect}^1$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
$\text{Vect}^2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$\text{Vect}^3$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_6$
$\text{Vect}^4$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
$\text{Vect}^5$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{K}(S^k)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0

TABLE B.2 – Groupes d'équivalences de fibrés complexes de rang  $r$  sur la sphère  $S^k$ .  $\text{Vect}^r(S^k) = \pi_{k-1}(U(r))$ .

### Observations sur le tableau B.2

- $\text{Vect}^2(S^5) \cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  : cela signifie qu'il y a une seule classe de fibrés non triviaux de rang 2 sur  $S^5$ .
- $\text{Vect}^r(S^3) \cong 0$  signifie que les fibrés vectoriels complexes sur  $S^3$  sont tous triviaux.
- $\text{Vect}^1(S^{k \geq 2}) \cong 0$  signifie que les fibrés vectoriels complexes de rang 1 sur  $S^{k \geq 2}$  sont tous triviaux.

Une observation remarquable est le théorème suivant : (K-theory<sup>17</sup>)

**Théorème B.16.** « *Bott Periodicity Theorem 1959* ». Il y a la propriété de **stabilité** suivante : si  $2r \geq k$  alors  $\text{Vect}^r(S^k)$  est indépendant de  $r$ . On note  $\tilde{K}(S^k) := \text{Vect}^r(S^k)$  appelé **groupe de K-théorie**. De plus il y a la propriété de **périodicité** :

$$\begin{aligned} \tilde{K}(S^{k+2}) &= \tilde{K}(S^k) = \mathbb{Z} \text{ if } k \text{ even} \\ &= 0 \text{ if } k \text{ oddeven} \end{aligned}$$

Pour la preuve, voir [19].

17. The symbol  $K(X)$  comes from « Klassen » in german, by A. Grothendieck 1957, see Lectures of Karoubi. The symbol  $C(X)$  was already used.

### B.3.3 Indice topologique de Chern $\mathcal{C}$ d'un fibré complexe $F \rightarrow S^{2n}$ de rang $r \geq n$

D'après le tableau B.2, si  $F \rightarrow S^{2n}$  est un fibré complexe de rang  $r$ , avec  $r \geq n$ , alors sa classe d'isomorphisme est caractérisée par un entier  $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}$ . Voici comment calculer cet entier appelé « indice topologique de Chern »

La classe d'équivalence du fibré  $F$  est caractérisée par la classe d'homotopie de la fonction de recollement à l'équateur  $g = f_{21}$ ,

$$g : S^{2n-1} \rightarrow U(r).$$

qui est la fonction de transition de l'hémisphère nord vers l'hémisphère sud.

Si  $r > n$  alors on peut déformer continûment  $g$  de sorte à avoir  $\forall x \in S^{2n-1}, g_x(e_r) = e_r$  (où  $(e_1, \dots, e_r)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^r$ . Cf [3, Section III.1.B, p.271]). Ainsi  $g$  restreint à  $\mathbb{C}^{r-1} \subset \mathbb{C}^r$  donne une fonction  $g : S^{2n-1} \rightarrow U(r-1)$ . Par récurrence on se ramène au cas  $r = n$  c'est à dire à une fonction de recollement  $g : S^{2n-1} \rightarrow U(n)$ .

On définit la fonction

$$f : \begin{cases} S^{2n-1} & \rightarrow S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \\ x & \rightarrow g_x(e_1) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Le degré  $\deg(f)$  est défini en Définition B.15.

**Théorème B.17.** (Bott 1958)[3, Section III.1.B, p.271]. Soit  $F \rightarrow S^{2n}$  un fibré complexe de rang  $r \geq n$ . L'indice topologique

$$\mathcal{C} := (-1)^n \frac{\deg(f)}{(n-1)!}. \quad (\text{B.10})$$

est entier  $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}$  (et pas seulement rationnel) et caractérise la topologie de  $F$  : si  $F \rightarrow S^{2n}$  et  $F' \rightarrow S^{2n}$  sont des fibrés de même rang  $r \geq n$  avec le même indice  $\mathcal{C}$  alors  $F$  et  $F'$  sont isomorphes.

*Remarque B.18.* Si le fibré  $F \rightarrow S^{2n}$  est muni d'une connexion (arbitraire), la théorie de Chern-Weil permet d'exprimer l'indice topologique  $\mathcal{C}$  à partir de la courbure  $\Omega$  de la connexion :

$$\mathcal{C} = \int_{S^{2n}} \text{Ch}_{2n}(F) \quad (\text{B.11})$$

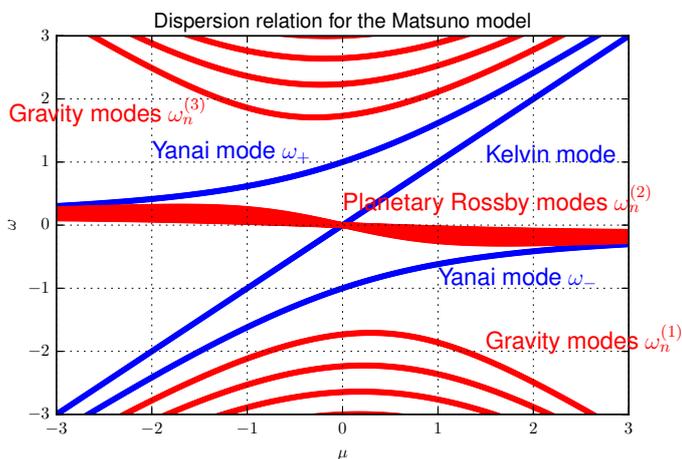
$$\text{Ch}(F) := \text{Tr} \left( \exp \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right) \right)$$

où  $\Omega$  est la courbure de la connexion, considérée comme une deux forme sur  $S^{2n}$ . Cela définit  $\text{Ch}(F)$  appelé caractère de Chern qui est une forme différentielle sur  $S^{2n}$  et on note  $\text{Ch}_{2n}(F)$  sa composante de degré  $2n$  qui est une forme volume sur  $S^{2n}$ . La formule (B.11) généralise la formule de Gauss-Bonnet (B.5).

## C Codes informatiques

### C.1 Matsuno spectrum

To get Figure 3.5 :



---

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib import rc
rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
rc('text', usetex=True)

N= 10 # number of Rossby modes
mu1, mu2 = -3,3
om1, om2 = -3,3
for n in np.arange(0,N):
    L_G1, L_G2, L_G3, L_mu, L_Y1, L_Y2, L_K = [],[],[], [],
    [],[],[]
    for mu in np.arange(mu1, mu2, 0.02):
        L_mu.append(mu)
        if(n==0):
            L_K.append(mu)
            coef2 = [1, -mu, -1] #coefs of equation degree 2:
            L_omega2 = np.roots(coef2) # 2 solutions
            L_Y1.append(L_omega2[0]) #Yanai frequencies
            L_Y2.append(L_omega2[1])

    else:
```

```

coef3 = [1, 0, -(mu**2+2*n+1), -mu] #coefs of
      equation degree 3:
L_omega3 = np.roots(coef3) # 3 solutions
L_G1.append(L_omega3[0])
L_G2.append(L_omega3[1])
L_G3.append(L_omega3[2])

if (n==0):
    plt.plot(L_mu, L_Y1, marker = '.', color='blue',
             linestyle = 'none')
    plt.plot(L_mu, L_Y2, marker = '.', color='blue',
             linestyle = 'none')
    plt.plot(L_mu, L_K, marker = '.', color='blue', linestyle
             = 'none')
else:
    plt.plot(L_mu, L_G1, marker = '.', color='red',
             linestyle = 'none')
    plt.plot(L_mu, L_G2, marker = '.', color='red',
             linestyle = 'none')
    plt.plot(L_mu, L_G3, marker = '.', color='red',
             linestyle = 'none')

plt.xlabel('$\mu$')
plt.ylabel('$\omega$')
plt.title('Dispersion_relation_for_the_Matsuno_model')
plt.text(1.5, 1, 'Kelvin_mode', ha="left", family='sans-serif',
         color = 'blue', size=14)
plt.text(1, -1, 'Yanai_mode_$\omega_-$', ha="left", family='sans-
         serif', color = 'blue', size=14)
plt.text(-2, 1, 'Yanai_mode_$\omega_+$', ha="left", family='sans-
         serif', color = 'blue', size=14)
plt.text(1.5, -2, 'Gravity_modes_$\omega_n^{\{1\}}$', ha="left",
         family='sans-serif', color = 'red', size=14)
plt.text(-3.5, 1.6, 'Gravity_modes_$\omega_n^{\{3\}}$', ha="left",
         family='sans-serif', color = 'red', size=14)
plt.text(0, 0.2, 'Planetary_Rossby_modes_$\omega_n^{\{2\}}$', ha="
         left", family='sans-serif', color = 'red', size=14)

plt.grid()
plt.axis([mu1,mu2,om1,om2]) # select the view

```

```
plt.savefig('Matsuno_spectrum.eps') # save the file
plt.show()
```

---

## Références

- [1] Arnol'd, V.I. Modes and quasimodes. *Funct. Anal. Appl.*, 6 :94–101, 1972.
- [2] M.V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 45 :392, 1984.
- [3] B. Booss and D.D. Bleecker. *Topology and analysis. The Atiyah-Singer index formula and gauge- theoretic physics. Transl. from the German by D. D. Bleecker and A. Mader.* Universitext. New York etc. : Springer-Verlag. XVI, 451, 1985.
- [4] Max Born and Vladimir Fock. Beweis des adiabatenatzes. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 51(3) :165–180, 1928.
- [5] C. Emmrich and A. Weinstein. Geometry of the transport equation in multicomponent WKB approximations. *Commun. Math. Phys.*, 3(176) :701–711, 1996.
- [6] Y. Colin de Verdière. *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale. Book in progress.* <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/>. 2002.
- [7] Pierre Delplace, J. B. Marston, and Antoine Venaille. Topological origin of equatorial waves. *Science*, 358(6366) :1075–1077, 2017.
- [8] E. Hawkins. Geometric quantization of vector bundles and the correspondence with deformation quantization. *Commun. Math. Phys.*, 215 :409–32, 2000.
- [9] F. Faure and M. Tsujii. Fractal Weyl law for the ruelle spectrum of Anosov flows. *arXiv :1706.09307 link*, 2017.
- [10] F. Faure and B. Zhilinskii. Topological Chern indices in molecular spectra. *Phys. Rev.Lett.*, 85(5) :960–963, 2000.
- [11] F. Faure and B. Zhilinskii. "Topological properties of the Born-Oppenheimer approximation and implications for the exact spectrum". *Lett. in Math. Phys.*, 55 :219–238, 2001.
- [12] F. Faure and B. Zhilinskii. Qualitative features of intra-molecular dynamics. what can be learned from symmetry and topology. *Acta Appl. Math.*, 70 :265–282, 2002.
- [13] F. Faure and B. Zhilinskii. Topologically coupled energy bands in molecules. *Phys. Lett., A*, 302(5-6) :242–252, 2002.
- [14] B. Fedosov. *Deformation Quantization and Index Theory.* 1996.
- [15] B. Fedosov. The Atiyah-Bott-Patodi Method in deformation quantization. *Commun. Math. Phys.*, 209 :691–728, 2000.
- [16] George A Hagedorn. Adiabatic expansions near eigenvalue crossings. *Annals of Physics*, 196(2) :278–295, 1989.

- [17] George A Hagedorn and Alain Joye. A time-dependent born–oppenheimer approximation with exponentially small error estimates. *Communications in Mathematical Physics*, 223(3) :583–626, 2001.
- [18] A. Hatcher. *Algebraic topology*. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>, 1998.
- [19] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>, 1998.
- [20] L. Hörmander. The weyl calculus of pseudo-differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32(3) :359–443, 1979.
- [21] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators III*, volume 257. Springer, 1983.
- [22] Alain Joye, H Kunz, and Ch-Ed Pfister. Exponential decay and geometric aspect of transition probabilities in the adiabatic limit. *Annals of Physics*, 208(2) :299–332, 1991.
- [23] Alain Joye and Charles-Edouard Pfister. Superadiabatic evolution and adiabatic transition probability between two nondegenerate levels isolated in the spectrum. *Journal of mathematical physics*, 34(2) :454–479, 1993.
- [24] Andrew Lenard. Adiabatic invariance to all orders. *Annals of Physics*, 6(3) :261–276, 1959.
- [25] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Universitext. New York, NY : Springer, 2002.
- [26] Taroh Matsuno. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 44(1) :25–43, 1966.
- [27] F. Nicola and L. Rodino. *Global pseudo-differential calculus on Euclidean spaces*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2011.
- [28] Vidian Rousse. Landau–zener transitions for eigenvalue avoided crossings in the adiabatic and born–oppenheimer approximations. *Asymptotic Analysis*, 37(3, 4) :293–328, 2004.
- [29] I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*, volume 113. Springer, 1996.
- [30] Johannes Sjöstrand. Projecteurs adiabatiques du point de vue pseudodifférentiel. *COMPTES RENDUS-ACADEMIE DES SCIENCES PARIS SERIE 1*, 317 :217–217, 1993.
- [31] Stefan Teufel. *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*. Springer, 2003.
- [32] De Verdière and Yves Colin. Bohr-sommerfeld phases for avoided crossings. *arXiv preprint arXiv :1103.1507*, 2011.
- [33] J. von Neumann and E. Wigner. *Phys. Z.*, 30 :467, 1929.
- [34] M. Zworski. *Semiclassical Analysis*. Graduate Studies in Mathematics Series. Amer Mathematical Society, 2012.