

Signatures tonales de Malik. Essai de généralisation.

Frédéric Faure

27 fév. 2010

Abstract

Une **signature tonale de Malik** est un ensemble de notes caractérisé par les deux conditions suivante. (1) Cet ensemble appartient à **une** gamme unique . (2) Cet ensemble est minimal au sens ensembliste.

L'idée explorée ici est de généraliser cette définition en modifiant la condition (1), et chercher des ensembles de notes appelées **signature tonales de niveau 2** qui par exemple appartiennent à **deux** gammes uniques, et sont aussi minimaux. Dans ce cas on dit que **les deux gammes ont une signature commune**. Par exemple les notes **do,mi,fa,si** sont la "signature tonale de niveau 2" des gammes **Do majeur et La mineur harmonique**. Nous donnons la liste complète des signatures tonales de niveau 1 à 3.

En musique, l'utilité de ces signatures tonales de niveau 2 ou plus, pourrait être de marquer une ambiguïté tonale, ou pourraient servir à transiter entre deux gammes (ou plus).

1 Définitions des signatures tonales

On reprends les notations de Malik.

On considère les 12 notes en identifiant une octave à l'unison. Ainsi l'ensemble des notes distinctes est

$$N = \{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}$$

Comme l'a fait Malik, on considère les $12 \cdot 3 = 36$ gammes de bases, **majeures** (ex: *CMaj* noté *MC* par Malik), **Mineures mélodiques** (ex: *Cmel* noté *mC* par M.) et **mineures harmoniques** (ex: *Cmh* noté aussi *hC*).

On note \mathcal{G} l'ensemble de toutes ces gammes.

Definition 1. Soit E un ensemble de notes. On note $\mathcal{G}(E)$ l'ensemble des gammes auxquelles appartient E . Précisément:

$$\mathcal{G}(E) := \{G \in \mathcal{G}, \quad E \subset G\}$$

On appelle **niveau** de E , noté $\text{niv}(E)$, le nombre de ces gammes:

$$\text{niv}(E) = \#\mathcal{G}(E)$$

Exemple:

- $E = \{C, E, G, B\}$. Alors E est contenu dans les gammes

$$\mathcal{G}(E) = \{CMaj, GMaj, Emh\}$$

(peut être plus encore?). Son niveau est donc 3.

- $E = \{C, E, F, G, B\}$ est de niveau 1, car contenu seulement dans *CMaj*.

Remarques

- il est clair que si $E' \subset E$ alors $\mathcal{G}(E) \subset \mathcal{G}(E')$, c'est à dire que si E' est un ensemble de notes de E alors E' appartient à un nombre égal ou plus grand de gammes.
- Beaucoup d'ensembles de notes sont de niveau 0, c'est à dire qu'ils n'appartiennent à aucune gamme ($\mathcal{G}(E) = \emptyset$). Par exemple $\{C, C\#, D\}$ est de niveau 0.

Definition 2. On dit que deux sous ensembles E, E' sont **équivalents** (notation $E' \sim E$) si $\mathcal{G}(E) = \mathcal{G}(E')$.

Remarques

- Si $E \sim E'$ alors ils ont même niveau.
- d'après cette définition, tous les ensembles de niveau zéro sont équivalents.

Exemple $\{C, D, E, F, G, A, B\}$ (la gamme *CMaj*) est équivalent à $\{C, E, F, G, B\}$ (qui est sa signature tonale *MC*), et sont tous les deux des ensembles de niveau 1.

Definition 3. Un ensemble de notes E est une **signature tonale** (noté *ST*) s'il ne contient pas d'ensembles équivalents et plus petits (cad que E est minimal au sens ensembliste, dans sa classe d'équivalence). Le **niveau** de la signature tonale est le niveau de E .

Remarques:

- Les signatures tonales de Malik sont des signatures tonales de niveau 1.
- La définition ci-dessus permet d'envisager des signatures tonales de niveau supérieur.
- Exemple extrême: une note seule, par exemple la note "si": $E = \{B\}$ est clairement minimale dans sa classe d'équivalence. C'est donc une signature tonale de niveau 21 car elle appartient aux 21 gammes suivantes (et pas plus):
doM reM miM solbM solM laM siM dom rem mim solbm labm lam sim doh mibh mih solbh labh lah sih

Definition 4. Soit E un ensemble de notes de niveau $n \geq 1$. On note $ST(\overline{E})$ l'ensemble des signatures tonales dans sa classe d'équivalence, et $ST(E)$ les signatures tonales contenues dans E .

Definition 5. Soient $G_1, G_2, \dots, G_N \in \mathcal{G}$ un ensemble de N gammes et $E = \cap_i G_i$ l'ensemble de leur notes communes. Si $\mathcal{G}(E) = \{G_1, G_2, \dots, G_N\}$ alors on dit que **cet ensemble de gammes a une signature commune**.

Exemples

- On considère les 2 gammes *CMaj* et *Cmel*. Alors leurs notes communes sont $E = \{C, D, F, G, A, B\}$. La signature commune est $\{C, F, G, A, B\}$.

2 Programme et résultats

Je mettrais le programme en pytohn... bientôt.

Voici les résultats:

Signatures Tonales de niveau 1 à 3

7 mars 2010, programme python

The image displays a musical score for a piece titled "Signatures Tonales de niveau 1 à 3". The score is written in a single staff with a treble clef and a 5/4 time signature. It consists of four lines of music, each containing a sequence of notes and rests. Above the notes, there are labels for each measure, such as "MC", "m1C", "m2C", "m3C", "h1C", "h2C", "h3C", "MC-MG", "MC-mC", "MC-mD", "MC-hA", "mC-mGb", "mC-mE", "hC-hEb", "hC-hA", "MC-MF-mF", "MC-MF-hA", "MC-mC-hC", "MC-mC-hA", "MC-mC-mD", "mC-mAb-hC", "MC-mD-hA", "mC-hC-hE", and "mC-hC-hEb". The notes are primarily quarter notes, with some half notes and rests. The key signature is one flat (B-flat).