Ensembles de notes

Malik Mezzadri[*],
and
Frédéric Faure[†],

14 décembre 2016

Résumé

Un objet est un ensemble de notes parmi les 12 notes de la gamme chromatique à tempérament égal. En considérant les propriétés de périodicité des objets par transposition, on distingue trois ensembles d'objets notés II, V, I et on présente les relations d'inclusion entre ces ensembles.

1 Définitions et propriétés

1.1 Objets et périodes

On note

$$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/(12\mathbb{Z}) = \{0, 1, 2, \ldots, 10, 11\}$$

l'ensemble des douze notes de la gamme chromatique modulo l'octave. Pour signifier leur utilisation à la gamme chromatique, on associe à chaque élément un symbole de la suite :

$$\{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}.$$

Si $U = (u_0, u_1, \ldots u_{11}) \subset \mathbb{Z}_{12}$ est un sous ensemble de n notes, $U \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_{12}}$. On note $\mathcal{T}_k U := U + k := \{u_0 + k, \ldots u_{11} + k\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ la **transposition** de U par $k \in \mathbb{Z}_{12}$. On introduit la relation d'équivalence entre deux sous ensembles :

$$U' \sim U \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}_{12}, U' = \mathcal{T}_k U.$$

Exemple 1.1. Par exemple $U = \{C, D, E\}$ est équivalent à $U' = \{E, F\#, G\#\}$ car U' est une transposition de U par $k = 4$ demi-tons.

[*]Malik Mezzadri musicien flûtiste de Jazz, compositeur. Nom d'artiste *: "Magic Malik".*

[†]Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier, F-38000 Grenoble, France, frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

Un **objet** o est une classe d'équivalence c'est à dire un ensemble de notes modulo transposition :

$$o \in \mathcal{O}, \qquad \mathcal{O} := \{0,1\}^{\mathbb{Z}_{12}} / \sim . \tag{1.1}$$

La **période** $T(U) \in \mathbb{Z}_{12}$ de U est

$$T(U) := \{k \in \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathcal{T}_k U = U\}.$$

Noter que $T(U)$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}_{12}$, donc parmi la liste suivante

Période (sous groupe de $\mathbb{Z}_{12}$)	$\{0\}$	$\{0,6\}$	$\{0,4,8\}$	$\{0,3,6,9\}$	$\{0,2,4,6,8\}$	$\mathbb{Z}_{12}$
générateur	12	6	4	3	2	1

La période est constante dans une classe d'équivalence, on note $T(o) := T(U)$ la période d'un objet o de représentant U.

Exemple 1.2. Par exemple

- La période de $U = \{C, D, E, F\#, G\#, A\#\}$ (la « gamme par ton ») est $T(U) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- La période de $U = \{D, G\#\}$ est $T(U) = \{0, 6\}$.
- La période de $U = \{C, D, E, F, G, A, B\}$ (la gamme majeur) est $T(U) = \{0\}$.

Dans la proposition suivante on considère le générateur de la période $T(o)$. Par exemple 1 est le générateur de $\mathbb{Z}_{12}$, 2 est le générateur de $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ etc.

Proposition 1.3. *L'ensemble $\mathcal{O}$, (1.1), contient 352 objets répartis selon leur période de la façon suivante :*

générateur de la période T :	1	2	3	4	6	12
Nombre d'objets	2	1	2	3	9	335

Démonstration. Ce résultat s'obtient par énumération des objets. On l'obtient avec un programme disponible sur GitHub « kanular/Generalisation-Fonction-Musique ». Le programme génère un fichier de sortie qui liste tous les objets et leur propriétés. Voici une version javascript en ligne. □

Remarque 1.4. Les deux objets dont le générateur est 1 sont la gamme chromatique $\mathbb{Z}_{12}$ et l'ensemble vide.

1.1.1 Notation binaire d'un objet

La notation suivante est conventionnelle, mais utile pour le programme. Un sous ensemble $U \subset \mathbb{Z}^{12}$ est un élément $U = (u_0, u_1, \dots u_{11}) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_{12}}$. On lui associe un nombre entier $n(U) \in \mathbb{Z}$ par son écriture en base 2, en inversement le sens du mot :

$$n(U) := (u_{11}, u_{10}, \dots u_1, u_0)_{\text{base2}} \in \mathbb{N}.$$

Par transposition on obtient 12 entiers $n(U+k), k \in \{0,\dots 11\}$ et par convention, la **valeur de l'objet** o est le plus petit de ces entiers :

$$v(o) := \min_{k\in\{0,1\dots 11\}} \{n(U+k), \quad \text{t.q. } U \in o\}.$$

Exemple 1.5. Par exemple, pour la gamme par ton, il y a deux sous ensembles possibles

$$U = \{C, D, E, F\#, G\#, A\#\} = 101010101010 = (010101010101)_{\text{base2}} = (1365)_{\text{base10}}$$

$$U' = \{C\#, D\#, F, G, A, B\} = 010101010101 = (101010101010)_{\text{base2}} = (2730)_{\text{base10}}$$

On convient donc que la valeur de l'objet « gamme par ton » est le plus petit des deux représentants soit : $v(o) = (1365)_{\text{base10}}$.

1.2 Objets non symétriques, objets symétriques et MATL

On dit que o est un **objet non symétrique** si $T(o) = \{0\}$. On note

$$A := \{o \in \mathcal{O},\, T(o) = \{0\}\} \subset \mathcal{O}$$

l'ensemble des objets non symétriques. D'après la Proposition 1.3 il y a 335 objets dans A. Les autres objets sont appelés **symétriques** et on note

$$B := \mathcal{O} \backslash A.$$

l'ensemble des objets symétriques.

Parmi les objets symétriques, si on exclu la gamme chromatique $\mathbb{Z}_{12}$ et l'ensemble vide, d'après la Proposition 1.3 il reste $1+2+3+9 = 15$ objets symétriques appelés **modes à transposition limités (MATL).**

générateur du MATL	2	3	4	6
Nombre d'objets MATL	1	2	3	9

Voici leur structure précise et leur nom commun (Mx est le mode x de Messian).

générateur du MATL	structure et valeur en base 10	nom
2	101010101010 = 1365	gamme par tons, M1
3	100100100100 = 585	
3	110110110110 = 1755	gamme diminuée, M2
4	100010001000 = 273	
4	110011001100 = 819	
4	111011101110 = 1911	M3
6	100000100000 = 65	triton
6	110000110000 = 195	
6	101000101000 = 325	
6	111000111000 = 455	M5
6	110100110100 = 715	
6	101100101100 = 845	
6	111100111100 = 975	M4
6	111010111010 = 1495	M6
6	111110111110 = 2015	M7

1.3 Relations d'inclusion entre objets

Si $o, o' \in \mathcal{O}$ sont deux objets, on note

$$o \subset o' \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall U \in o, \forall U' \in o', \exists k \in \mathbb{Z}_{12}, U + k \subset U',$$

i.e. si « l'objet o est **inclus** dans l'objet o' ».

On note

$$I := \{o \in A, \forall o' \in B, o \subsetneq o' \Rightarrow o' = \mathbb{Z}_{12}\}$$

i.e. c'est l'ensemble des objets non symétriques qui ne sont inclus dans aucun objet symétrique hormis la gamme chromatique.

On note

$$II := A \backslash I$$

l'ensemble complémentaire c'est à dire les objets non symétriques qui sont inclus dans un objet symétrique (autre que la gamme chromatique).

Le **nombre de notes** d'un objet est noté $\sharp o \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.6. *L'ensemble I contient 52 objets dont*

Nombre de notes :	6	7	8	9	10	11
Nombre d'objets dans I	3	12	18	13	5	1

Voici les trois objets « minimaux » de I c'est à dire ayant 6 notes :

(1) C C# D D# E F

(2) C D D# E F G

(3) C D E F G A

Démonstration. Ce résultat s'obtient par énumération des objets. On l'obtient avec un programme disponible sur GitHub « kanular/Generalisation-Fonction-Musique ». Le programme génère un fichier de sortie qui liste tous les objets et leur propriétés. Voici une version javascript en ligne. □

Remarquer que au contraire, pour tout objet symétrique $o \in B$ il existe un objet $o' \in A$ qui le contient $o \subset o'$.

Si $o, o' \in \mathcal{O}$ sont deux objets, on introduit la relation :

$$o \to o' \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} o \subset o' \text{ et } \sharp o' = \sharp o + 1,$$

i.e. si o' s'obtient à partir de o par l'**ajout d'une note**.

2 Interprétation en musique

Ce qui suit est l'idée de Malik Mezzadri, une manifestation/utilisation des structures précédentes en musique.

Si on note $V := B$ l'ensemble des objets symétriques, le **dynamisme orienté** considère le mouvement

$$II \to V \to I.$$

Ce dynamisme est économe, il choisit les solutions ou l'ajout de note est minimum en fonction des opérateurs choisis.

Voici une version javascript en ligne.