Cours de M2R
Université Joseph Fourier
1° semestre 2008-2009

Analyse sur les surfaces de Riemann

I Surfaces de Riemann. Définition, premiers exemples

(1) notion de variété complexe

(a) cartes, atlas

- Soit X un espace topologique.

Déf Une carte (réelle de dimension n) de X est un couple (U,φ) où $U \subset X$ ouvert et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme sur $\varphi(U)$.
Un atlas de X est une famille $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartes telles que $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$
Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé possédant un atlas réel de dimension n.

Si $n = 2m$ on peut utiliser l'identification $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ et parler de cartes complexes de dimension m

- Deux telles cartes $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^m$ sont dites holomorphiquement compatibles si l'application de changement de carte $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ est un biholomorphisme (holomorphe ainsi que son inverse).

Rappel $U \subset \mathbb{C}^m$ $f : U \to \mathbb{C}^p$ est dite holomorphe si f est différentiable et $\forall x \in U$ $df_x : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^p$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire.
Une application seulement différentiable a une différentielle $\mathbb{R}$-linéaire.
Les théorèmes du calcul différentiel (composition, inversion locale, fonctions implicites) se généralisent sans modification aux fonctions holomorphes.
Il y a le bonus suivant, quelque soit le nombre de variables: une fonction holomorphe est automatiquement C^∞ et même developpable en série entière localement.

Déf Un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ est dit holomorphe si toutes ses cartes sont holomorphiquement compatibles entre elles.

Lemme : (exercice) Deux cartes holomorphiquement compatibles à un atlas holomorphe donné sont compatibles entre elles.

Corollaire Tout atlas holomorphe est contenu dans un unique atlas holomorphe maximal, au sens où toute carte holomorphiquement compatible à un élément de $\mathcal{A}_{max}$ est un élément de $\mathcal{A}_{max}$.

Définition Une variété complexe de dimension m est un espace topologique séparé muni d'un atlas holomorphe de dimension m maximal.

Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1

Remarques

1) il suffit de se donner un atlas holomorphe pour définir une variété complexe

2) en remplaçant le mot "biholomorphisme" par "C^∞-difféomorphisme" on obtient la notion de variété différentiable. Une variété complexe de dimension m définit donc une variété différentiable de dimension $2m$. Ainsi une surface de Riemann (ou courbe complexe) est de dimension réelle 2 - d'où la terminologie.

Exemples $\mathbb{C}^m$ est une variété complexe de dimension m dont un atlas est $(\mathbb{C}^m, id)$

tout ouvert de $\mathbb{C}^m$ (ou d'une variété complexe) est une variété complexe.

(b) applications holomorphes

Déf $X^{(m)}$ $Y^{(m')}$ deux variétés complexes. $f : X \to Y$ continue est dite holomorphe si pour toute carte (U, φ) de X et toute carte (V, ψ) de Y

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}V) \longrightarrow \mathbb{C}^{m'} \text{ est holomorphe}$$

Ex : Si $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ ouvert $f : \Omega \to \mathbb{C}^{m'}$ est une application holomorphe en ce sens ssi elle est holomorphe au sens précédent.

Lemme : id_X est holomorphe. f, g holomorphes composables $\Rightarrow$ $f \circ g$ holomorphe

Def : $f : X \to Y$ est un biholomorphisme ssi f est une bijection holomorphe ainsi que son inverse.

Si X et Y sont des surfaces de R. il suffit que f soit une bijection holomorphe pour que son inverse le soit. On parle alors d'isomorphisme analytique, resp. de surf. de R.

(2) Procédés de construction de variétés complexes

(a) homéomorphismes locaux

Soit Y une variété complexe X un espace topologique séparé et $p : X \to Y$ un homéomorphisme local, c'est à dire :

tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U_x tq $p(U_x)$ ouvert et $p : U_x \to p(U_x)$ homéomorphisme.

On peut, quitte à réduire U_x, supposer que $V = p(U_x)$ est un ouvert de carte et introduire $\varphi : V \to \mathbb{C}^m$ une carte holomorphe de Y. $(U_x, \varphi \circ p)$ est alors une carte complexe de dimension m.

Lemme : Ces cartes sont holomorphiquement compatibles entre elles et forment un atlas holomorphe de X, qui devient une variété complexe de dimension m $p : X \to Y$ est une application holomorphe.

(b) Recollement

Soient X_1 et X_2 deux variétés complexes $U_1 \subset X_1$ $U_2 \subset X_2$ deux ouverts et $\Phi : U_1 \to U_2$ un biholomorphisme

Soit $\sim_\Phi$ la relation d'équivalence sur $X_1 \sqcup X_2$ (union disjointe) définie par :

$$x \in X_i \quad y \in X_i \qquad x \underset{\Phi}{\sim} y \iff x = y$$
$$x \in X_1 \quad y \in X_2 \qquad x \underset{\Phi}{\sim} y \iff x \in U_1,\ y \in U_2,\ y = \Phi(x)$$

$X = X_1 \sqcup X_2 /_{\sim \Phi}$ est alors un espace topologique, X_1 et X_2 s'identifiant à des ouverts de X. Toute carte complexe de X_i définit une carte de X. Pour toute carte (U,φ) de X_1 la carte de X ainsi définie est compatible à celles venant de X_2 car Φ est un biholomorphisme. La réunion des atlas provenant respectivement de X_1 et X_2 forme un atlas holomorphe de X.

<u>Déf</u> Si X est séparé la structure complexe de X ainsi construite est dite être obtenue par recollement de X_1 et X_2 le long de Φ.

<u>Ex 1</u> $X_1 = \mathbb{C}_1 \quad X_2 = \mathbb{C}_2$

$U_1 = U_2 = \mathbb{C}^*$

$\phi : U_1 \longrightarrow U_2 \qquad \phi(z) = z^{-1}$

0 = image de $0 \in \mathbb{C}_1$

∞ = image de $0 \in \mathbb{C}_2$

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_1 \sqcup_\phi \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_1 \cup \{\infty\}$ en tant qu'ensemble. $U \ni \{\infty\}$ est un ouvert ssi $\exists R>0 \quad U \cap \mathbb{C}_1 \supset \{z \in \mathbb{C} \quad |z|>R\}$ donc $\mathbb{P}^1$ est séparé. $\mathbb{P}^1$ est aussi compact : c'est la compactification de $\mathbb{C}$ obtenue en ajoutant un point à l'infini (comp. d'Alexandroff)

La surface de Riemann ainsi construite s'appelle la droite projective, ou sphère de Rieman

En tant que variété différentiable elle est difféomorphe à $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2+z^2=1\}$

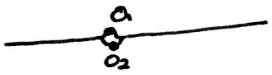
<u>Ex 2</u> $X_1 = \mathbb{C}_1 \quad X_2 = \mathbb{C}_2$

$U_1 = U_2 = \mathbb{C}^*$

$\phi\, U_1 \longrightarrow U_2 \qquad \phi(z) = z.$

0_1 image de $0 \in \mathbb{C}_1$

∞ image de $0 \in \mathbb{C}_2$

$X =$ 

Soit U_1 ouvert de X contenant 0_1 $U_1 \cap \mathbb{C}_1$ est un ouvert de $\mathbb{C}_1$ et contient $\{z \in \mathbb{C}_1 \ |z|<r_1\}$ pour un certain $r_1>0$. Idem pour U_2 ouvert contenant 0_2.

Donc $U_1 \cap U_2 \supset \{z \in \mathbb{C}_1 \quad 0<|z|<\min(r_1,r_2)\} \neq \phi$

Donc X n'est pas séparé et ne définit donc pas une surface de Riemann.

(c) Quotient par un groupe discret.

<u>Déf</u> Γ un groupe et X une variété complexe. Une action de Γ sur X est un homomorphisme $\gamma : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Biholo}(X)$.

Remarque $\Sigma : \Gamma \times X \longrightarrow X$ $\quad (\gamma, x) \longmapsto \sigma(\gamma)(x) = \gamma . x$ vérifie alors $\gamma \cdot (\gamma' \cdot x) = (\gamma\gamma') x$, et tous les axiomes d'opération de groupe sur un ensemble. De plus, et $\forall \gamma \in \Gamma$ $\quad x \longmapsto \gamma . x$ holomorphe.

Remarque Si X espace topologique, une action est un homomorphisme de groupes $\Gamma \to \mathrm{Homéo}(X)$.
— variété diff, ——————————— $\Gamma \to \mathrm{Difféo}(X)$.

Définition: Une action de Γ sur X est dite proprement discontinue ssi

(1) Soient $x_1, x_2 \in X$. L'une des deux possibilités mutuellement exclusives a lieu
(a) $x_2 \in \Gamma . x_1$ $\quad (\Leftrightarrow \Gamma x_1 = \Gamma x_2)$
(b) $\exists U_1, U_2$ vois. de x_1, x_2 tq $\Gamma U_1 \cap U_2 = \emptyset$ $\quad (\Leftrightarrow \Gamma U_1 \cap \Gamma U_2 = \emptyset)$

(2) tout point x a un voisinage U_x tq $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma . U_x \cap U_x \neq \emptyset\}$ fini.

Notons que $\mathrm{Stab}(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma . x = x\}$ vérifie pour tout vois. U de x que

$\mathrm{Stab}(x) \subset \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\}$ car $\forall \gamma \in \mathrm{Stab}(x)$ $\quad x \in \gamma U \cap U$

Une action proprement discontinue est dite sans point fixe si $\forall x \in X$ $\mathrm{Stab}(x) = \{e\}$.
Une action est proprement discontinue sans point fixe si elle vérifie (1) et

(2') tout point x a un voisinage U tq $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\} = \{e\}$.

Soit Γ une ~~action~~ groupe agissant sur l'espace topologique X

Définition: L'espace quotient $\Gamma \backslash X$ = ensemble des l'orbites de X est muni de la topologie quotient se décrivant ainsi

$U \subset \Gamma \backslash X$ ouvert $\Leftrightarrow \pi^{-1} U$ est un ouvert de X où
$\pi : X \longrightarrow \Gamma \backslash X$ désigne la surjection canonique.

Lemme: π est continue et ouverte, c'est à dire:

si U ouvert $\quad \pi(U)$ est ouvert.

Preuve: $\pi^{-1} \pi(U) = \Gamma . U = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma . U$

Proposition Supposons que Γ agisse proprement discontinument sans point fixe sur la variété complexe X. Il existe alors une unique structure de variété complexe sur $\Gamma \backslash X$ tq $\pi : X \longrightarrow \Gamma \backslash X$ soit holomorphe.

Preuve: Grâce au lemme, la condition (1) implique que si $x_1, x_2 \in X$ vérifiant $y_1 = \pi(x_1) \neq \pi(x_2) = y_2$ $\quad y_i$ a un voisinage ouvert $V_i = \pi(U_i)$ tel que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. La condition (1) seulement implique donc que $\Gamma \backslash X$ est séparé.

La condition (2') implique que $\pi_x = U_x \xrightarrow{\pi} \pi(U_x)$ est injective, donc une bijection. π_x est continue
Comme π est ouverte π_x est un homéomorphisme.

On peut toujours, quitte à réduire U_x, supposer que c'est un ouvert de carte et introduire $U_x \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^n$ une carte holomorphe.

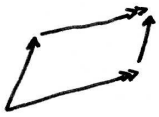
$(\pi(U_x);\ \varphi \circ \pi_x^{-1})$ est alors une carte complexe de dimension n de $\Gamma \backslash X$.

L'holomorphie de l'action de Γ sur X implique que toutes ces cartes sont holomorphiquement compatibles ce qui fournit l'atlas recherché.

<u>Ex</u>

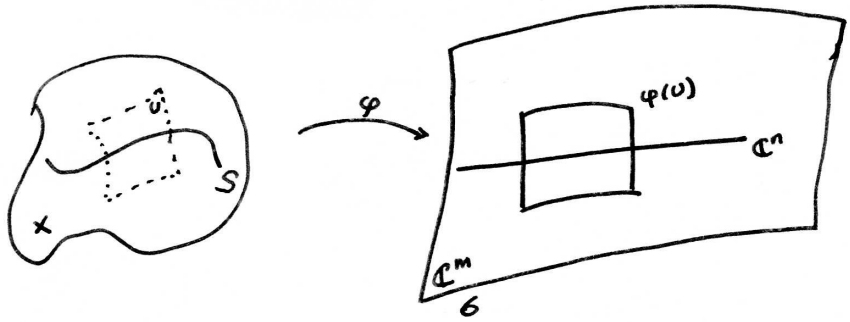
- Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^m$ un sous groupe additif fermé discret. Il existe alors $r \leq 2m$ et $e_1, \dots, e_r$ une famille $\mathbb{R}$-libre de vecteurs de $\mathbb{C}^m$ tq $\Lambda = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i$. L'action par translation de Λ sur $\mathbb{C}^m$ est proprement discontinue sans point fixe.
  $\mathbb{C}^m/\Lambda$ est donc, naturellement, une variété complexe
- Si $r = 2m$ $\quad \mathbb{C}^m/\Lambda$ est compacte
- $m = 1 \quad r = 2$

Q = parallélogramme hachuré
$\pi : Q \to \mathbb{C}/\Lambda$ est surjective
π est injective sur $\mathring{Q}$ et les identifications de point de ∂Q dans $\mathbb{C}/\Lambda$ s'opèrent selon le diagramme habituel :



(d) Sous variétés

- <u>Déf</u> Soit $X^{(m)}$ une variété complexe. $S \subset X$ est une sous variété de dimension $n \leq m$ (ou de codimension $p = m - n$) ssi
  - S est un fermé
  - $\forall s \in S$ il existe une carte (U, φ) avec $s \in U$ $\varphi(s) = 0$ et $\varphi(S \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{C}^n \times \{0\}$.



Lemme les cartes $(S\cap U, \varphi|_{S\cap U})$ comme ~~dir~~ dessus forment un atlas holomorphe de dimension n sur S.

Corollaire : S est une variété complexe de dimension n et l'application holomorphe $i : S \to X$ donnée par l'inclusion $S \subset X$ est appelée une immersion fermée.

Théorème des fonctions implicites Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert et $F = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^p \end{pmatrix}$ une application holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}^p$. Soit $x_0 \in \Omega$ tel que :

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial z^j}(x_0)\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le p}} \in GL_p(\mathbb{C}).$$

x_0 a alors un voisinage de la forme $U = U_1 \times U_2$ $\quad U_1 \subset \mathbb{C}^{n-p}$ ~~ouvert~~ et $U_2 \subset \mathbb{C}^p$ ouverts et il existe $\psi : U_1 \to U_2$ holomorphe telle que :

$$U \cap F^{-1}(F(x_0)) = \{(z_1, z_2) \in U_1 \times U_2 \mid z_2 = \psi(z_1)\}.$$

Scholie : Comme $(z_1, z_2) \xrightarrow{\Psi} (z_1, z_2 - \psi(z_1))$ est un difféo sur son image et la carte (U, Ψ) vérifie alors que

$$\Psi(U \cap F^{-1}(F(x_0))) = \Psi(U) \cap (\Psi(x_0) + \mathbb{C}^n \times \{0\})$$

et $F^{-1}(F(x_0)) \cap U$ est une sous variété de U de codimension p.

Pour obtenir cette conclusion on peut appliquer le critère précédent avec n'importe quel jeu de p variables distinctes choisies parmi $(z^1, \dots, z^n)$ et la condition devient que la matrice jacobienne de F est de rang maximal égal à p.

Def : $F : X^{(n)} \to Y^{(p)}$ submersion si $\forall (U, \varphi)$ carte holo de X ~~$\forall (V,\psi)$~~
$\forall (V, \psi)$ ——— Y

$\mathcal{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{C}^p$ a une différentielle telle que $\forall x \quad d\mathcal{F}_x \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ est surjective.

Remarque cette condition se teste sur toutes les cartes d'un atlas donné

Théorème Si F submersive, pour tout $y \in Y$ $\quad F^{-1}(y) \subset X$ est une sous variété de codimension p. Plus généralt pour tout $Z \subset Y$ sous variété de codimension q $\quad F^{-1}(Z) \subset X$ sous variété de codimension q.

Remarque : plus généralement ceci a lieu si F est submersive sur un voisinage ouvert de $F^{-1}(z)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ holomorphe. $\mathrm{Crit}(f) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid df_z = 0 \}$

$$= \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \frac{\partial f}{\partial z^1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z^n}(z) = 0 \}$$

si $f^{-1}(0) \cap \mathrm{Crit}(f) = 0$ $f^{-1}(0)$ est une sous variété de codimension 1 de $\mathbb{C}^n$ (une hypersurface). Si $n = 2$ c'est une surface de Riemann.

Remarque : Les procédés décrits en (a), (b), (c), (d) marchent également pour les variétés différentiables (et même seulement topologiques).

(3) fonctions holomorphes et méromorphes

(a) définitions

déf Soit S une surface de Riemann. Une fonction $f : S \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si pour toute carte (U, φ) de S $(U, f \circ \varphi^{-1})$ est holomorphe sur $\varphi(U)$.

~~$h : S \to \mathbb{R}$~~ harmonique

$(U, h \circ \varphi^{-1})$ — harmonique —

$u : S \to \mathbb{R}$ — sous harmonique —

$(U, u \circ \varphi^{-1})$ — sous harmonique —

On définit de même fonction $C^0, C^k, C^\infty, \dots$

Remarque : Une fonction harmonique vérifie $\Delta f = 0$. Comme $\Delta f \circ \varphi = |\varphi'|^2 . \Delta f$ si φ holomorphe $\Delta f = 0 \Rightarrow \Delta(f \circ \varphi) = 0$. De même une fonction sous harmonique est une fonction s.c.i de laplacien positif au sens des distributions. D'où le fait que f s.h + φ holomorphe $\Rightarrow f \circ \varphi$ s.h.

La définition précédente est par conséquent cohérente.

Notation. Si f holo sur $S \to \mathbb{C}$ on note $f \in \mathcal{O}(S)$

définition Une fonction $f : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est dite méromorphe si pour tout carte (U, φ) de S $(U, f \circ \varphi^{-1})$ est méromorphe sur $\varphi(U)$.

Not : $f \in \mathcal{M}(S)$

Rappel. $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ méromorphe ssi l'une des conditions suivantes est vérifiée

(1) ~~pour~~ tout point $p \in \Omega$ a un voisinage Ω' tq $f|_{\Omega'} = \frac{h_1}{h_2}$ $h_i \in \mathcal{O}(\Omega')$ $h_2 \neq 0$

(2) ——————————— tq $f|_{\Omega'}$ ou $f^{-1}|_{\Omega'} \in \mathcal{O}(\Omega')$

(3) $P = f^{-1}(\{\infty\})$ est discret ~~et $\forall z \in P$~~
$f : \Omega \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe

et $\forall z_0 \in P$ la série de Laurent ~~de~~ f en z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour} \quad |z - z_0| > 0 \text{ assez petit}$$

n'a qu'un nombre fini de termes avec n négatifs.

Corollaire de (2) $f : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe si et seulement si f définit une application holomorphe de S vers $\mathbb{P}^1$.

Corollaire de (3) Soit $B \subset S$ un ensemble discret. $f \in \mathcal{O}(S \setminus B)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur S (unique et déterminée et notée également f) si et seulement si

pour tout $b \in B$ il existe une carte (U, φ) centrée en b ($\varphi(b) = 0$) telle que $f \circ \varphi^{-1}$ est la somme d'une série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ n'ayant qu'un nombre fini de termes négatifs.

Corollaire $\mathcal{M}(S)$ est un corps contenant $\mathbb{C}$, si S est connexe.

~~[illegible] f~~

Preuve: Si $f, g \in \mathcal{M}(S)$ on définit $f+g$ d'abord comme fonction holomorphe sur $S \setminus f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty)$ puis en prolongeant cette fonction a une fonction méromorphe sur S. L'unicité du prolongement méromorphe sera le point-clef pour vérifier les propriétés ~~nécessaires~~ à vérifier. (On pourrait aussi utiliser (1)).

(b) cas des surfaces de Riemann compacte

Soit S

Théorème: Une surface de Riemann compacte connexe.
Toute fonction holomorphe sur S est constante.

Preuve: Soit $m \in S$ un point où $|f|$ atteint son maximum. Par le principe du maximum, pour (U, φ) une carte centrée en m, ~~Pd~~ $|f \circ \varphi^{-1}|$ atteint son max en 0 et, par holomorphie, $f \circ \varphi^{-1}$ est constante sur la composante connexe de 0 dans $\varphi(U)$. Donc f est constante sur U.

Ceci implique que le fermé $|f|^{-1}(\max_S |f|)$ est ouvert. Par suite $|f| = \max_S |f|$ car S est connexe. Une nouvelle application du principe du maximum assure que f est localement constante sur S, donc constante car S connexe.

<u>Remarque</u>: la même preuve fonctionne pour les fonctions harmoniques, sous-harmoniques et en plusieurs variables complexes.

(c) valuations naturelles de $\mathcal{M}(S)$ $\qquad$ S surface de R. connexe

Soit $f \in \mathcal{M}(S) \setminus \{0\}$ et $p \in S$. Soit (U, φ) une carte centrée en S. Posons

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n = z^v (a_0 + a_1 z + \cdots) \quad \text{avec } a_0 \neq 0$$

v ne dépend pas de la carte choisie et on pose $v_p(f) = f$.

<u>Prop</u>. v_p est une valuation discrète, ie une application $v_p : \mathcal{M}(S) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$

tq $\quad v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$

$\quad v_p(f+g) \geq \min(v_p(f), v_p(g))$ avec $=$ si $v_p(f) \neq v_p(g)$

<u>Preuve</u>: on se ramène au cas local $S = \Delta$ $p = 0$.

<u>Not</u> on posera $v_p(0) = \infty$.

<u>Lemme</u>: - pour tout $f \in \mathcal{M}(S)$ $\quad Z_f = \{p \mid v_p(f) > 0\}$

$P_f = \{p \mid v_p(f) < 0\}$

sont des fermés discrets.

- $P_f \neq \emptyset \iff f \in \mathcal{O}(S)$.

<u>Théorème</u>: $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{C}(z)$.

<u>Preuve</u>: On appelle z l'application fonction méromorphe $\left(\begin{array}{l} \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z \longmapsto z \end{array} \right)$

qui correspond à $id_{\mathbb{P}^1}$ qui est une application holomorphe $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

Donc $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ car $\mathbb{P}^1$ est un corps.

Soit $R \in \mathbb{C}(z)$ $\quad R = \frac{P}{Q}$ $\quad P, Q \in \mathbb{C}[z]$ on a $v_\infty(R) = -\deg R = -(\deg P - \deg Q)$

En effet si $R(z) \approx c z^{\deg R}$ pour $|z| \gg 1$ $\quad R(\frac{1}{z}) = c \left(\frac{1}{z}\right)^{\deg R}$ pour $|z| \ll 1$

et $w = 1/z : \mathbb{C}_2 \to \mathbb{C}$ est une carte locale de $\mathbb{P}^1$ en ∞.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ Soit γ_R un cercle centré en 0 de rayon 1 tel que $Z_f \cup P_f \cap \mathbb{C} \subset \Delta(0, R)$ ce qui est possible car $Z_f \cup P_f$ est discret dans $\mathbb{P}^1$ donc fini. γ_R est orienté dans le sens trigonométrique.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{df}{f} = \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}} v_p(f)$$ par le théorème des résidus dans l'ouvert de carte $\mathbb{C}_1$

γ_R entoure aussi le point ∞ et on a $\operatorname{ind}(\gamma_R, \infty) = -1$. Donc $\int_{\gamma_R} \frac{df}{f} = -v_\infty(f)$

dans l'ouvert de carte $\mathbb{C}_2$. Donc $\sum_{p \in \mathbb{P}^1} v_p(f) = 0$. (*)

$\psi(z) = \prod_{z_0 \in Z_f \cup P_f} (z - z_0)^{v_p(f)} \in \mathbb{C}(z)$. On a $v_p(\psi) = v_p(f)$ $\forall p \in \mathbb{C}$. Donc par (*)

$v_\infty(\psi) = v_\infty(f)$. Par suite $f/\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1)$ et $f/\psi = \text{cste}$.

(d) Remarques sur les fonctions méromorphes de plusieurs variables complexes.

Les conditions (1) et (2) définissent, en plusieurs variables complexes, la notion de fonction méromorphe. De sorte que les corollaires de la partie (a) sont valides. Le théorème de la partie (b) ~~est aussi correct~~ se généralise également.

Le point (3) ~~[illegible]~~ est plus subtil en plusieurs variables complexes ainsi que la théorie des valuations.

(4) Surface de Riemann d'une fonction algébrique.

a) fonctions algébriques

- Définition Une fonction algébrique de la variable complexe z est un élément w de la clôture algébrique de $\mathbb{C}(z)$.

Lemme il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}(z)[W]$ de coefficient dominant 1 et de degré >0 minimal tel que $P(z,w)=0$

P est alors irréductible.

Preuve. Soit $K \subset L$ une extension alg. de corps et $y \in L$. Le polynôme minimal P de y est irréductible car $K[x]/p \subset L$ est un sous corps.

Ex $w = \sqrt{z}$ $\qquad P(z,W) = W^2 - z$

$w = \sqrt[3]{z - 1/z}$ $\qquad P(z,w) = W^2 - z + 1/z$ ....

$W^5 - zW - 1 = 0$

Ces fonctions sont ~~[illegible]~~ "bien définies" sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et sur certains ouverts de $\mathbb{C}$. Il n'est pas possible de définir $z \mapsto \sqrt{z}$ comme une fonction holo sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ à cause de l'ambiguïté de signe $-$ qui provient du choix d'une détermination continue du logarithme.

b) une surface de Riemann attachée à une fonction algébrique.

- Soit w une fonction algébrique de polynôme minimal P de sorte que

$$P(z,w) = w^d + a_{d-1}(z) w^{d-1} + \dots + a_d(z) = 0 \qquad a_i(z) = \frac{P_i(z)}{Q_i(z)}$$

$P_i, Q_i \in \mathbb{C}[z]$ premiers entre eux.

Lemme 1: Soit Σ_0 un ensemble fini contenant les racines de tous les polynômes Q_i. Alors P définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_z \setminus \Sigma_0 \times \mathbb{C}_w$

Lemme 2 il existe deux polynômes $R, S \in \mathbb{C}(z)[W]$ tels que

$$RP + S\frac{\partial P}{\partial W} = 1.$$

Preuve $\quad$ P étant irreductible de degré d et $\frac{\partial P}{\partial w}$ un polynôme de degré $d-1$ dans $K[w]$ $\quad K = \mathbb{C}(z)$ il suit que P et $\frac{\partial P}{\partial w}$ sont premiers entre eux et le théorème de Bézout ~~impl~~ permet de conclure.

Posons $\quad R = \sum \alpha_i(z) w^i \qquad \alpha_i = A_i / A'_i \qquad A_i, A'_i, B_i, B'_i \in \mathbb{C}[z].$

$\quad S = \sum \beta_i(z) w^i \qquad \beta_i = B_i / B'_i$

<u>Lemme 3</u> $\quad$ Soit Σ un ensemble fini contenant les racines de tous les polynômes B_i B'_i et Σ_0. Alors P définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Sigma \times \mathbb{C}$ telle que P et $\frac{\partial P}{\partial w}$ n'ont pas de zéros commun. ~~dans~~

En particulier pour tout $(z_0, w_0) \in P^{-1}(0)_\Sigma = \{(z,w) \in \mathbb{C} \setminus \Sigma \times \mathbb{C} \mid P(z,w) = 0\}$ il existe une fonction holomorphe $\overline{w}$ définie sur un ouvert $\Omega_0 \ni z_0$ et un voisinage U de (z_0, w_0) tel que

$$U \cap P^{-1}(0)_\Sigma = \text{graphe de } \overline{w}.$$

<u>Preuve</u>: • la relation $\quad RP + S \cdot \frac{\partial P}{\partial w} = 1$ dans $\mathbb{C}(z)[w]$ se lit transcrit ~~en~~ une relation de la même forme entre les fonctions holomorphes $R, S, P, \frac{\partial P}{\partial w} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \Sigma \times \mathbb{C})$. Par suite si $(z_0, w_0) \in P^{-1}(0)_\Sigma$ on a:

$$R(z_0, w_0)\, P(z_0, w_0) + S(z_0, w_0) \frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0) = 1$$

puis $\quad S(z_0, w_0) \frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0) = 1 \quad$ et $\quad \frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0.$

• le dernier point résulte du théorème des fonctions implicites.

Ainsi la fonction implicite $\overline{w}$ peut être vue comme une branche de la fonction algébrique w. Le problème est qu'on n'a ni contrôle ni unicité du domaine de définition Ω_0. ~~à cause du phénomène~~

<u>Proposition</u>: $\quad P^{-1}(0)_\Sigma$ est une surface de Riemann et $\pi : P^{-1}(0)_\Sigma \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma$ défini par $\pi(z,w) = z$ vérifie les propriétés suivantes

(1) π homéomorphisme local

(2) pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma \qquad \text{card}\, \pi^{-1}(z) = d$

(3) π est propre, c'est à dire

$$\forall K \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma \qquad \pi^{-1} K \text{ est compact.}$$

~~Démonstration. La seconde projection $\tilde{w} : P^{-1}(0)_\Sigma \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que $P(\tilde{z}, \tilde{w}) = 0$~~

Preuve: (1) si M, N sont des esp. topologique et $\phi \in C^0(M,N)$ la première projection $p_M : Gr(\phi) \to M$ est un homéomorphisme.

Près de tout point, π ~~étant~~ la première projection du graphe de la fonction implicite locale $\bar{w}$. Il suit que π est un homéomorphisme local.

(2) $\pi^{-1}(z)$ est constitué des racines du polynôme d'une variable complexe

$$P_z = W^d + a_{d-1}(z) W^{d-1} + \dots + a_0(z)$$

Comme au lemme 3, le lemme 2 implique que

$$R(z,w) P_z + S(z,w) \frac{\partial P_z}{\partial w} = 1 \quad \text{et donc}$$

que P_z et P'_z sont deux polynômes premiers entre eux.

Ceci implique que P_z est scindé à racines simples. D'où (2).

(3) Soit $K \subset\subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ un compact et $M = \sup_{z \in K} \max |a_0(z)|, \dots, |a_{d-1}(z)| < \infty$

$p^{-1}(K)$ est borné en raison du lemme:

Lemme Soit $Q = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu Y^\nu \in \mathbb{C}[Y]$ et λ une racine de Q

$$|\lambda| \leq \max \left(1 ; \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\right)$$

preuve:
$$\lambda^d = -\sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{a_d} \lambda^i$$

D'où
$$|\lambda|^d \leq \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|} |\lambda|^i \leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\right) \max(1, |\lambda|)^{d-1}$$

Posons $\pi = \tilde{z}$ comme nouvelle notation.

Remarque: La seconde projection $\tilde{w} : P^{-1}(0)_\Sigma \to \mathbb{C}$ $(z,w) \mapsto w$ definit une fonction holomorphe sur $P^{-1}(0)_\Sigma$ vérifiant $P(\tilde{z}, \tilde{w}) = 0$. La canonicité plus forte de cette construction comparée à celle de la fonction implicite attachée à w pourrait nous satisfaire, même si la construction dépend encore ~~fort~~ du choix de Σ, en dépit du fait que $\tilde{w}$ n'est pas définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ mais sur une surface de Riemann "au dessus" de $\mathbb{C}$.

Ce dernier fait est inévitable et traduit l'ambiguïté du choix des determinations de la fonction algébrique w – un problème inévitable dans la théorie classique.

Un défaut plus important est

Remarque : $p^{-1}(0)_\Sigma$ n'est pas compacte.

Preuve : Sinon $\tilde{z}, \tilde{w}$ seraient des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann compacte $p^{-1}(0)_\Sigma$ donc localement constantes. Or $\tilde{z}$ définit un homéo local donc n'est pas localement constante.

(c) revêtements.

- **Définition** M, N deux espaces topologiques.
une application continue surjective $\pi : M \longrightarrow N$ est un revêtement si
N a un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tq $\forall \alpha \in A$
$\pi^{-1} U_\alpha$ est réunion disjointe d'ouverts $W_{\alpha,j}$ tq $\pi : W_{\alpha,j} \longrightarrow U_\alpha$
est un homéomorphisme.

Exemples : 1) $\begin{pmatrix} S^1 \longrightarrow S^1 \\ e^{i\theta} \longrightarrow e^{2i\pi\theta} \end{pmatrix}$

2) $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

3) $p_n : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z \longmapsto z^n \end{pmatrix}$

4) Soit $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ une action proprement discontinue sans point fixe sur M variété complexe : $M \longrightarrow \Gamma \backslash M$ est un revêtement

5) Si $U \subset N$ ouvert $\pi^{-1} U \longrightarrow U$ est un revêtement de U.
π revêtement de N

Preuve : 1) 2) 3) exercice 5) trivial $U = \bigcup_\alpha U \cap U_\alpha$ convient
4). Pour tout ouvert U tq $U \longrightarrow \Gamma \backslash M$ injectif $\underset{\underset{U}{\wr\wr}}{\pi^{-1} U} = \Gamma . U \simeq \Gamma \times U = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma . U$
d'après la preuve donnée plus haut.

Remarque : 2) et 3) sont des cas particuliers de (4) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[dr, "\exp"] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & \mathbb{C}^* \\ \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{\exp}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\exp}$ est un isomorph. analytique

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[dr, "p_n"] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & \mathbb{C}^* \\ \mathbb{C}^*/U_n \arrow[ur, "\widetilde{p_n}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{p_n}$ est un isom^{ce} analytique avec $U_n = \{ \zeta \in \mathbb{C}^* \mid \zeta^n = 1 \}$.

Lemme: Une application continue $\pi : M \to N$ est un revêtement ssi

(1) $\forall n \in N$ $\pi^{-1}(n)$ discret et non vide

(2) N a un recouvrement par des ouverts U tq

$\exists D_U$ discret et $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times D_U$ un homéomorphisme tq

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times D_U \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\pi_1 = 1^{\circ}$ projection

Remarque: Sous (2) $\forall n \in U$ $\pi^{-1}(n) \xrightarrow{\pi_2 \circ \psi} D_U$ est une bijection.

Preuve: $\Rightarrow$ remarquons d'abord qu'un revêtement est un homéomorphisme local.

Soit $m \in \pi^{-1}(n)$ et V un vois. ouvert de m tq $V \to \pi(V)$ homéomorphisme $\pi^{-1}(n) \cap V = \{m\}$. Donc m est isolé dans $\pi^{-1}(n)$ et $\pi^{-1}(n)$ est discret si π est un homéomorphisme local.

(2) et $\Leftarrow$ sont clairs

Définition Si dans (2) D_U est toujours fini de cardinal d on dit que π est un revêtement à d feuillets.

Proposition Tout homéomorphisme local propre est un revêtement si les espaces sont séparés.

Corollaire: $\pi : p^{-1}(0)_\Sigma \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma$ est un revêtement à d feuillets.

Preuve (de la proposition) Soit $\pi : M \to N$ un homéomorphisme local propre.

$\forall n \in N$ $\pi^{-1}(n)$ est discret et compact - donc fini.

Posons $\pi^{-1}(n) = \{m_1, \dots, m_N\}$ et choisissons $V_1 \dots V_N$ des voisinages 2 à 2 disjoints tels que $\pi_i : V_i \xrightarrow{\pi} \pi(V_i)$ homéo. Un tel choix est possible car M est séparé....

$V = \bigcap_i \pi(V_i)$ est un ouvert de N contenant n et $\tilde{V} = \bigcup_i \pi_i^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de $\pi^{-1}(n)$ réunion disjointe de N ouverts isomorphes à V via π. Cet énoncé est vrai pour tout $W \subset V$ vois. ouvert de n

Montrons que si W assez petit $\tilde{W} = \pi^{-1}(W)$. Il est clair que $\tilde{W} \subset \pi^{-1}(W)$.

Par l'absurde, il existe sion $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tq $n_k \xrightarrow[k \to \infty]{} n$ et $m_k \in \pi^{-1}(n_k)$ avec $m_k \notin \tilde{W}$. $\pi^{-1}(\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{n\})$ est compact car $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{n\}$ l'est et π est propre. Donc quitte à extraire $m_k \xrightarrow[k \to \infty]{} m_\infty$ et par continuité $\pi(m_\infty) = n$. Comme $\tilde{W}$ est un voisinage de $\pi^{-1}(n)$ c'est un voisinage de m_∞ et donc pour $k \gg 0$ $m_k \in \tilde{W}$. Contradiction.

• <u>Lemme 2</u> Soit X un espace top. localement compact et I un intervalle réel ($I=[0,1]$ ou $\mathbb{R}$ ou ...)
Soit $\pi : M \to N$ un revêtement. ~~Il existe alors et~~
Soit un diagramme de applications continues de la forme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, "\pi"] \\ X \times I \arrow[r, "h"'] & N \end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique $H : X \times I \to M$ tel que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ X \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "H"] & N \end{tikzcd}$$

Ce lemme est le principe de relèvement des homotopies.

∘ <u>Preuve</u> : par unicité on se ramène au cas où X est compact et $I=[0,1]$.
Soit $\{t \in [0,1] \mid$ le lemme est valide pour $I=[0,t]\} = J$. On veut montrer que $J=I$
c'est un intervalle non vide de la forme $[0,t_{max}]$ ou $[0,t_{max}[$.
$h(X \times \{t_{max}\})$ a un recouvrement ~~ouvert~~ fini par des ouverts U de N tq la propriété (2) du lemme 1 a lieu car X est compact. Donc $\exists \varepsilon > 0$ tq
$X \times]t_m-\varepsilon, t_m+\varepsilon[\cap I$ a un recouvrement fini par des ouverts $V_i \simeq V_i^o \times]t_m-\varepsilon, t_m+\varepsilon[$
tq $h(V_i) \subset U_i$ U_i ouvert de N tq $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times D_i$ D_i discret

~~est alors nécessairement de la forme (h_i, d) où~~
~~d. $]t_m-\varepsilon, t_m[\times X \cap V_i$ est localement constant et donc constante sur~~
~~sur $V_i = V_i^o \times]$~~

$H|_{V_i \cap X \times]t_m-\varepsilon, t_m[} = H|_{V_i^o \times]t_m-\varepsilon, t_m[}$ est alors de la forme (h, d_i)
où — par continuité — d_i est localement constante sur $V_i^o \times]t_m-\varepsilon, t_m[$ et
donc constante ~~sur~~ $\{x\} \times]t_m-\varepsilon, t_m[$, égale à $d(x)$.
Le seul choix possible pour $H|_{V_i}$ est donc $H_i(x,t) = (h(x); d_i(x))$
Sur $V_i \cap V_j = V_i^o \cap V_j^o \times]t_m-\varepsilon, t_m+\varepsilon[$ on a

$$H_i\big|_{V_i^\circ \cap V_j^\circ \times]t_m-\varepsilon, t_m[} = H_j\big|_{V_i^\circ \cap V_j^\circ \times]t_m-\varepsilon, t_m[} = H$$

par définition de $\mathcal{T}$.

Par construction $H_i|_{V_i \cap V_j} = H_j|_{V_i \cap V_j}$ et ces choix se recollent en un relèvement de h

$H : X \times]t_m-\varepsilon, t_m+\varepsilon[\to Y$ prolongeant $H|_{X \times]t_m-\varepsilon, t_m[}$

En le recollant avec $H|_{X \times [0, t_m[}$ on obtient que $[0, t_{max}+\varepsilon[\overset{\cap I}{\subset} I$.

La seule possibilité pour qu'il en aille ainsi est $t_{max} = 1$.

<u>Corollaire</u>: $\forall \gamma : [0,1] \xrightarrow{C^0} N$ $y_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ $\exists! \tilde{\gamma} : [0,1] \to M$ $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = y_0$.

<u>Proposition</u> Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}$ et $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Tout revêtement connexe à n feuillets de Δ^* est isomorphe à $p_n : \Delta^* \to \Delta^*$ $p_n(z) = z^n$

<u>Preuve</u> • $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \quad Re(z) > 0\}$

$\exp : \Pi \to \Delta^*$ est un revêtement et on a $\widetilde{\exp} : \Pi/_{2\pi i \mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \Delta^*$.

de même $e_n : z \mapsto \exp 2\pi i n z$ donne un isomorphisme $\Pi/_{2\pi i n \mathbb{Z}} \xrightarrow{\tilde{e}_n} \Delta^*$.

Comme $2\pi i n \mathbb{Z} \subset 2\pi i \mathbb{Z}$ on a un diagramme de revêtements

$$\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \Pi \arrow[d, "\tilde{e}_n"] \arrow[dd, bend left=60, "\widetilde{\exp}"] \\
\Pi/_{2i\pi n \mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \Delta^* \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
\Pi/_{2i\pi \mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \Delta^*
\end{tikzcd}$$

et il est facile de voir que $\tilde{p} = p_n$.

• Soit $U \xrightarrow{\pi} \Delta^*$ un revêtement connexe à n feuillets, ~~il existe alors, pour tout choix~~ ~~et~~

$\exp : \underset{]-\infty, 0[\times \mathbb{R}}{\overset{\Pi}{\shortparallel}} \to \Delta^*$. Pour tout choix de $x \in \pi^{-1}(\exp(-1))$ ~~il existe~~ (il y en a n) il existe alors un relèvement unique

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "\pi"] \\
\Pi \arrow[ur, "\tilde{e}"] \arrow[r, "\exp"'] & \Delta^*
\end{tikzcd}$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $\tilde{e}_k : z \to \tilde{e}(z + 2\pi i k)$ est un relèvement de l'exponentielle on a soit $\tilde{e}_k = \tilde{e}$ soit $\forall z$ $\tilde{e}_k(z) \neq e(z)$ (car deux relèvement coïncident s'ils coïncident en un point grâce à la clause d'unicité du lemme 2).

L'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tq $\tilde{e} = \tilde{e}_k$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ de la forme $d\mathbb{Z}$

et $\forall z, k \quad \tilde{e}(z+2\pi i k) = \tilde{e}(z) \iff k \in d\mathbb{Z}$

$\forall z, k, \ell \quad \tilde{e}(z+2\pi i k) = \tilde{e}(z+2i\pi \ell) \iff k-\ell \in d\mathbb{Z}$.

On a nécessairement $d \leq n$ car e a exactement n relèvements possibles. On a aussi un diagramme d'applications :

$$\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[dr, "\tilde{e}"] \arrow[dd, bend right=60, "e"'] & \\
& U \arrow[dl, "\pi"] \\
\Pi/2\pi i d\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi^*"] & \Delta^*
\end{tikzcd}$$

$\pi \circ \tilde{e}$ homéo local et π revêtement $\Rightarrow \tilde{e}$ homéo local $\Rightarrow \tilde{e}$ ouverte $\Rightarrow \tilde{e}(\Pi)$ ouvert.

Si $z \notin \tilde{e}(\Pi)$ soit $U \subset \Delta^*$ ouvert avec $\exp^{-1}(U) \cong U \times D$ et $\pi^{-1}(U) \cong U \times D'$ et $\pi(z) \in U$. On a $z = (\pi(z); d')$. Si $U \times \{d'\} \cap \tilde{e}(\Pi) \neq \emptyset$

$\tilde{e}$ étant un relèvet de $e|_{\pi^{-1}(U)} : e^{-1}U \longrightarrow U$ la seule solution est que

$e^{-1}U$ a une composante connexe W, isomorphe à U via π avec un élat $w \in W$ tq $\tilde{e}(w) = (\pi(w), d')$. Mais alors $\forall v \in W \quad \tilde{e}(v) = (\pi(v), d')$ par unicité.

pour $v \in W$ tq $\pi(v) = \pi(z)$ on a $\tilde{e}(v) = z$. Donc $U \times \{d'\} \cap \tilde{e}(\Pi) = \emptyset$

et $\tilde{e}(\Pi)$ fermé.

Donc $\tilde{e}(\Pi) = U$ car U connexe. Donc e^* est surjective.

donc $\underset{d}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{card}\,(\pi^*)^{-1}(x)}} \geq \underset{n}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{card}\,\pi^{-1}(x)}}$. Or $d \leq n$. Donc $d = n$. Donc e^* est bijective.

La fin de la vérification que e^* est un homéomorphisme est laissée à l'étudiant.

(d) construction finale.

<u>Théorème</u>: Soit ϖ une fonction algebrique de polynôme minimal P. Il existe alors une surface de Riemann compacte S munie de deux fonctions méromorphe z et w telles que $P(z,w) = 0$ uniquement determinées par la propriété que $\forall S'$ surf. de R. $z', w' \in \mathcal{M}(S')$ $P(z', w') = 0$ il existe un unique $\varphi : S' \longrightarrow S$ tq $(z', w') = (z, w) \circ \varphi$.

<u>Déf</u> Soit $\tilde{z} : S \to \mathbb{P}^1$ l'application holomorphe definie par z. La paire $(S, \tilde{z})$ est appelée surface de Riemann de $\varpi \in \mathbb{C}(z)$.

<u>Preuve</u> : On considère le revêtement a d feuillets

$$\pi_1 \quad p^{-1}(0)_\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma \cup \{\infty\}$$

~~Pour chac~~

Pour chaque point $p \in \Sigma \cup \{\infty\}$ considérons Δ_p un disque de coordonnées centrée en p et supposons les 2 à 2 disjoints

~~$\pi_1^{-1}(\Delta_p^*)$~~ $\pi_1^{-1}(\Delta_p \setminus \{p\})$ est isomorphe a une réunion de disques épointés

$\Delta^*_{p;k}$ de sorte que $\pi|_{\Delta^*_{p,k}} : \Delta^*_{p,k} \longrightarrow \Delta^*_p$ est en coordonnées locales

$z \longrightarrow z^{n_k}$ avec $\sum_k n_k = d$

On obtient S par recollement des $\Delta_{p,k}$ le long de $\Delta^*_{p,k}$

$$S := p^{-1}(0)_\Sigma \underset{\sqcup \Delta^*_{p,k}}{\cup} \sqcup \Delta_{p,k} .$$

~~On a ensemble~~

Notez que l'on a $p^{-1}(0)_\Sigma \subset S$ et $S \setminus p^{-1}(0)_\Sigma = B$ ensemble fini

Les diverses autres propriétés de S sont faciles à obtenir.

<u>Théorème</u> (admis, cf TD?) S est connexe.

<u>Remarque</u>. Soit S une surf. de Riemann connexe et $w \in \overline{\mathcal{M}(S)}$ il existe alors $T \longrightarrow S$ une surface de Riemann propre sur S jouant le rôle de surface de Riemann de w — par la preuve décrite ici.