Chapitre V Équations différentielles et Intégration numérique

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = F(t,Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} F \in C^0(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}^n) \\ Y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) \end{array}$$

a une unique solution maximale (au sens de l'intervalle de définition). Le chapitre exposera les méthodes numériques pour l'approximer

1. Intégration numérique

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la solution de $\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

est $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u)\,du$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Plus généralement si $a,b \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

s'intègre en calculant des intégrales

En effet, posant $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,du$

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} (e^{-A}y)' = e^{-A}y \\ (e^{-A}y)(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Une partie de la résolution numérique des EDO se ramène donc au problème de calculer numériquement des intégrales

1.a Formules d'intégration numérique

Def Soit $a<b$ 2 réels. Une formule d'intégration numérique à n nœuds sur $[a,b]$ est la donnée d'une ~~nombre~~ famille

$$(x_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a \leq x_i \leq b \quad [\text{ou } a \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b] \\ \lambda_i \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ceci nous permet de définir ~~et de~~ la forme linéaire par $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ $\quad f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ sur $C^0([a,b];\mathbb{R})$ ~~définition~~

~~Une telle~~ On appelera aussi I une formule d'intégration numérique

Nous chercherons bien sûr à avoir une formule aussi bonne que possible, c'est à dire que

$$E(f) = \int_a^b f(t) - I(f)$$

est aussi petit que possible.

Rem: Pour des raisons de stabilité numérique il est préférable d'avoir de plus $\lambda_i \geq 0$

Déf | Soit $n \in \mathbb{N}$
Une formule d'intégration numérique I est d'ordre $\geq n$ ssi

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad E(P) = 0$$

De plus Elle est d'ordre n si $E(X^{n+1}) \neq 0$

Ex: I sur $[0,1]$

$I(f) = f(0)$ est d'ordre 0

$I(f) = f(1/2)$ ——— 1 (formule du point milieu)

$I(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$ ——— 1 (formule du trapèze)

$I(f) = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)\right)$ est d'ordre 3 (formule de Simpson)

$$\frac{1}{6}\left(0 + \frac{4}{8} + 1\right) = \frac{3}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \int x^3$$

$$\frac{1}{6}\left(0 + \frac{4}{16} + 1\right) = \frac{5}{24} \neq \frac{1}{5} = \int x^4.$$

1.b interpolation

~~Comment construire~~

Thm: Soit $x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathbb{R}$ alors $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$P(x_i) = \varphi_i$$

De plus $P = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \Pi_i$

avec $\Pi_i = \prod_{k \neq i} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)}$

Les Π_i s'appelent polynômes interpolateurs de Lagrange.

Preuve: Observons que $\Pi_i(x_i) = 1$

$\Pi_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$

Donc $\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \Pi_i\right)(x_k) = \varphi_k$ d'où l'existence

Pour l'unicité si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ verif

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) \quad \forall i = 1 \dots n$$

On a pour $P = P_1 - P_2$ $\qquad P(x_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

et donc

$$P = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)}_{\text{degré} = n} \; A(x) \qquad A(x) \in \mathbb{R}[X]$$

Comme degré$(P) \leq n-1$ on obtient $A = 0$ puis $P = 0$.

<u>Cor:</u> 1) $\Lambda : \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} \end{array} \right]$ est une application linéaire bijective

2) $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice inversible

<u>Preuve:</u> 1) reformulation du théorème, en prenant en cpte le fait evidt que Λ est linéaire

2) V est la matrice de Λ dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et la bc de $\mathbb{R}^n$.

<u>Proposition</u> Soit $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ une formule d'intégration d'ordre $\geq n-1$. Alors

$$\lambda_i = \int_a^b \Pi_i$$

<u>Preuve:</u> On associe $\Pi_1 \text{ ——— } \Pi_n$ les Lagr. interpolant associés à $x_1 \text{ ——— } x_n$

$I(\Pi_i) = \int_a^b \Pi_i(t)\,dt$ car $E(\Pi_i) = 0$ vu que l'ordre de I est $\geq n-1$

donc:

$$\lambda_i = \sum_j \lambda_j \Pi_i(x_j) = \int_a^b \Pi_i$$

Rq l'ordre d'une flle à n-noeuds est $\leq 2n-1$ – $\underset{0}{\underset{\parallel}{I(\pi)}} \neq \int \pi > 0$ si $\pi = \prod_{i=1}^{n} (x-x_i)^2$

1.c ~~Noyau de Péano~~

Th $I = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$ formule d'int d'ordre $m \geq 1$

sur $[a,b]$ –

~~Pour $t \in \mathbb{R}$ $t_+ = \max(t,0)$~~

$y \in \mathbb{R}$ $\quad F_y : x \longmapsto (x-y)_+^m$ et $G(y) = E(F_y)$

G est C^0 et verifie

$\forall f \in C^{m+1}[a,b]$ $\quad E(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(y) G(y) dy$

Not : Pour $t \in \mathbb{R}$ $t_+ = \max(t,0)$

Def G noyau de Péano de I - code d'erreur d'intégration.

Preuve

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + R(x)$$ (Taylor avec reste intégral)

$$R(x) = \frac{1}{m!} \int_a^x f^{(m+1)}(y)(x-y)^m dy$$

$$R(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(y)(x-y)_+^m dy$$

On a: $E(f) = E(R)$

$$E(R) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(y) \; E(x \mapsto (x-y)_+^m) dy$$

$$= \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(y) G(y) dy$$

Cor ① $E(f) \leq \frac{1}{m!} \max_{a \leq y \leq b} |f^{(m+1)}(y)| \int_a^b |G(y)| dy$; ② Si G de sg cst $\exists \xi \in (a,b)$ $E(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} E(x \mapsto x^{m+1})$

1.d formules d'intégration composées

Soit $I = I_{[0,1]} = \sum \lambda_i f(x_i)$ une flle d'Integr d'ordre $m \geq 1$ sur $[0,1]$

alors $I(f) = I_{[a,b]}(f_{a,b})$ $\qquad f_{a,b}(t) = f(a+t(b-a)) \cdot (b-a)$ $\quad t \in [0,1]$

est une flle sur $[a,b]$ d'ordre même ordre.

Plus gén posons pour $i = 0, \dots, n$

$$\alpha_i = a + \frac{b-a}{n} i \qquad a \le \alpha_i \le b$$

On pose

$$I^{(n)}_{[a,b]}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{[\alpha_i ; \alpha_{i+1}]}(f)$$

<u>Th</u> $f \in C^0$ $\qquad I^{(n)}_{[a,b]}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Preuve:</u>

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in [a,b]$ $\quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$.

Si $\frac{b-a}{n} \le \delta$ on a

$$|f(x) - f(\alpha_i)| \le \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$$

donc

$$I_{[\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(f) = I_{[\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(x \mapsto f(\alpha_i)) + I_{[\alpha_i,\alpha_{i+1}]}(x \mapsto f(x) - f(\alpha_i))$$

$$= \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(\alpha_i)\,dt + \cancel{\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x \mapsto f(x) - f(\alpha_i))}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \; f(\xi_i) - f(\alpha_i)$$

$$\xi_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$$

$$= \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) - f(\alpha_i)\,dx + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\alpha_i - \alpha_{i+1}) (f(\xi_i) - f(\alpha_i))}_{E}$$

$$=$$

$$|E| \le (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) \varepsilon.$$

$$\left|E^{(n)}_{[a,b]}(f)\right| \le \frac{b-a}{n} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) \varepsilon. \qquad \square.$$

<u>Th</u> $\left|E^{(n)}_{[a,b]}(f)\right| \le \frac{b-a}{m!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{m+1} \max |f^{(m+1)}(\xi)| \int_0^1 |G(y)|\,dy \qquad f \in C^{m+1}$

Si $G \ge 0$ $\quad E^{(n)}_{[a,b]}(f) \le \frac{b-a}{m!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{m+1} f^{(m+1)}(\xi)\, E_{[0,1]}(x \mapsto x^{m+1})$

Preuve cg de variable.

Ex : Erreurs de la méthode de Simpson.

$$E^{(n)}_{[a,b]} = \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(c) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

du trapèze

$$E^{(n)}_{[a,b]} = \frac{b-a}{12} h^2 f^{(3)}(c)$$

($f \geq 0$ dans ces 2 cas).

2 Méthode de Picard

(C) $\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, y(t))\,dt$$

Cor. la sol de (C) sur $[t_0, t_1]$ $t_1 > t_0$ est l'unique point fixe de

$$\Phi : C^0[t_0,t_1], \mathbb{R} \circlearrowleft$$
$$f \longmapsto (t \mapsto) y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, f(t))\,dt$$

En particulier on peut essayer la méthode du point fixe pour Φ. Ceci s'appelle la méthode de Picard [nécessite de disposer de formules efficaces d'intégration numérique].

Prop : Si $\sup_{t \in [t_0,t_1]} \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq K < \infty$

Φ est $|t-t_0|K$ - Lipschitzienne pour $\| f \|_\infty = \sup_{t \in [t_0,t_1]} |f(t)|$

Pre

$$\phi(f_1) - \phi(f_2)(t) = \int_{t_0}^{t} F(t, f_1(t)) - F(t, f_2(t))\,dt$$

$$F(t, f_1(t)) - F(t, f_2(t)) \leq \sup \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| |f_1(t) - f_2(t)|$$

donc

$$|\phi(f_1) - \phi(f_2)(t)| \leq |t-t_0|\, K \cdot \sup_t |f_1 - f_2(t)|$$

$$\| \phi(f_1) - \phi(f_2) \|_\infty \leq |t-t_0| K \cdot \| f_1 - f_2 \|_\infty .$$

Donc si $|t-t_0|K < 1$ la méthode de Picard convergera vers l'unique solution de (C) - Cette méthode n'est pas souvent utilisée dans la pratique.

(Pas n°2)

On a supposé que $\sup |f| \leq M$

Donc $\| y_h'(t) \| \leq M$

$\| y'(t) \| \leq M$

donc y_h $h>0$ et $y_0 = y$ vérifie

$\forall t \in [t_0, t_1]$ $\quad \| y_h(t) - y_0 \| \leq M |t - t_0| \leq M |t_1 - t_0|$

si $t \in [t_0, t_1]$ et $h \geq 0$

Donc $(t, y_h(t)) \in [t_0, t_1] \times \bar{B}(y_0, M)$.

<u>Remarque</u>:

C'est ce fait qui implique que la solution maximale de (C) est définie sur $[t_0, +\infty[$

en effet ~~comme~~ si $\begin{cases} z' = g(t,z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$ admet une solution définie sur $[t_0, t_1[$ $\quad t_1 < \infty$ = temps d'existence de la solution maximale

Supposons ~~que~~ que $C = \sup_{t \in [t_0, t_1[} |z(t)| < +\infty$ ~~on doit avoir que~~ ~~et $t_1 < \infty$~~

Alors $|z'(t)| \leq \sup_{t \in [t_0, t_1] \times \bar{B}(0,C)} |f(t)| = K < \infty$

donc ~~si $t_0 \to t_1^-$~~ $\quad |z(t) - z(s)| \leq K |t - s|$

$\leq \varepsilon$ si $|t - t_1|, |s - t_1| < \varepsilon / K$.

le critère de Cauchy-Lipschitz implique que $\lim_{t \to t_1^-} z(t)$ ~~existe~~ ~~$= z^*(t)$~~ existe.

la fonction $z^* = \begin{pmatrix} (t_0; t_1] \to \mathbb{R}^n \\ t < t_1 \mapsto z(t) \\ t_1 \mapsto \lim_{t \to t_1^-} z(t) \end{pmatrix}$ est continue sur $[t_0, t_1]$ et C^0

$z' = f(t,z)$ pour $t < t_1$ sa dérivée à une limite en t_1^-

donc z^* est C^1 sur $[t_0, t_1]$.

on regarde alors $\tilde{z}$ ~~une~~ solution de $\begin{cases} z'(t) = g(t,z) \\ z(t_1) = z^*(t_1) \end{cases}$ sur $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$

et on voit que $\zeta : \begin{pmatrix} [t_0, t_1 + \varepsilon[\to \mathbb{R}^n \\ t \leq t_1 \mapsto z^*(t) \\ t > t_1 \to \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$ est solution de (C) sur $[t_0, t_1 + \varepsilon[$.

~~qui est alors unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz~~.

~~Donc ζ est solution de (C) sur $[t_0,$~~ Cette contradiction fournit que si $t_1 < \infty$ est le temps d'extinction de la solution de (C) $\sup_{[t_0, t_1[} |z(t)| = +\infty$.

(Pas n°3) <u>Inégalité différentielle vérifiée par $w = y - y_h$</u>

$$w' = y' - y_h' = f(t, y(t)) - f(\tau_h(t); y_h(\tau_h(t)))$$
$$= f(t, y(t)) - f(t, y_h(t)) + f(t, y_h(t)) - f(\tau_h(t); y_h(t))$$
$$+ f(\tau_h(t); y_h(t)) - f(\tau_h(t); y_h(\tau_h(t)))$$

Donc $\|w'\| \leq \sup_K |||J_f||| \left(\|y(t) - y_h(t)\| + |t - \tau_h(t)| + M \cdot |t - \tau_h(t)| \right)$

$$K = [t_0, t_1] \times \bar{B}(y_0; M)$$

Puis $\exists A, B > 0 \quad \|w'\| \leq Ah + B\|w(t)\|$

(Pas n°4). <u>Lemme de Gronwall</u>:

Soit γ continue et C^1 par morceaux sur $[t_0, t_1]$ $\|\gamma'\| \leq [\|\gamma\| + D]$

alors: $D + C\|\gamma(t)\| \leq (D + C\|\gamma(t_0)\|) e^{C|t - t_0|}$ pour $t_0 \in [t_0, t_1]$.

<u>Preuve</u>: • $f = \|\gamma\|^2$. $f' = 2(\gamma, \gamma')$ f est C^0, C^1 par morceaux

$$|f'| \leq 2\|\gamma\| \cdot \|\gamma'\| \leq 2 f^{1/2}(D + C f^{1/2})$$

• $\phi(x) = \int_0^x \frac{ds}{2\sqrt{s}(D + C\sqrt{s})} = C^{-1} \log\left(1 + \frac{C}{D}\sqrt{x}\right)$

$\phi \in C^0(\mathbb{R}_+)$ ϕ C^1 sur $\mathbb{R}_{>0}$ $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(D + C\sqrt{x})}$ $\forall x > 0$

$G = \phi \circ f$ est C^0, C^1 sur $f^{-1}(]0, \infty[)$ et vérifie $G'(x) = w' \cdot \phi' \circ w$

donc $|G'(x)| \leq 1$

nulle sur $f^{-1}(0)$

• <u>lemme</u>: Soit $F \subset \mathbb{R}$ fermé $G \in C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^+)$ $G = 0$ sur F $G(t_0) = 0$

$G \in C^1([t_0, t_1] \setminus F; \mathbb{R})$ et $|G'(t)| \leq 1$ $t \in [t_0, t_1] \setminus F$

$$|G(t_1)| \leq |t_1 - t_0| + G(t_0)$$

<u>preuve</u>: fixons $\eta > 0$

$t_\eta = \inf \{ t \geq t_0 \quad |G(t)| > \eta + (1 + \eta)(t - t_0) - G(t_0) \} \cup \{t_1\}$

si $t_\eta = t_1$ pour tout $\eta > 0$ on a $G(t) \leq \eta + (1 + \eta)(t - t_0) + G(t_0)$ et $\eta \to 0$ donc le résultat.

supposons que l'absurde que $t_n < t_1$.

$t_n > t_0$

- $\exists\, t_n \downarrow t_n^+ \quad G(t_n) > \eta + (1+\eta)(t_n - t_0) + G(t_0)$ $\qquad \exists\, t_m' \to t_m^- \quad G(t_m) \leq \eta + (1+\eta)(t_m - t_0) + G(t_0)$

  donc $\quad G(t_n) \geq \eta + (1+\eta)(t_n - t_0) + G(t_0)$ $\qquad$ donc $\quad G(t_m) \leq \eta + (1+\eta)(t_m - t_0) + G(t_0)$

  ainsi $\quad G(t_n) \neq 0$ ~~et~~ $G(t_m) \neq 0$

  si $|t_m - t_n|$ petit on peut supp que $[t_n, t_m] \subset G^{-1}(0)$

  on a $\quad G(t_m) - G(t_n) > \eta + (1+\eta)(t_m - t_0) + G(t_0)$

  $$- \left(\eta + (1+\eta)(t_n - t_0)\right) - G(t_0)$$

  $$> (1+\eta)(t_m - t_n)$$

  ce qui contd que $G' \leq 1$ sur $[t_n, t_m]$ –

- $C^{-1} \log\left(1 + \frac{C}{D}\|\gamma(t)\|\right) \leq |t_1 - t_0| + C^{-1} \log\left(1 + \frac{C}{D}\|\gamma(t_0)\|\right)$

(Pas n°9) En appliqt Gronwall à w on obtient

$$Ah + B\|w(t)\| \leq \left(Ah + B\|w(t_0)\|\right) e^{B(t-t_0)} \qquad w(t_0) = 0$$

puis: $\quad \|w(t)\| \leq Ah\, e^{B(t_1 - t_0)} \quad \square.$

3.c | Méthode d'Euler rétrograde

~~[illegible]~~

Une variante consiste à définir y_h en $t_0 + nh$ par le procédé suivant

On pose $\quad y_h(t_0 + nh) = y_n \quad$ et on suppose que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

~~[illegible]~~

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_0 + (n+1)h;\, y_{n+1}).$$

Noter qu'il pour calculer y_{n+1} il faut résoudre un problème de point fixe de la forme $\quad y_{n+1} = \Phi(y_{n+1}) \qquad \Phi(y) = y_n + h\, f(t_0 + (n+1)h,\, y_{n+1})$

$J_\Phi(y) = h\, J_f(t_0 + (n+1)h;\, y)$ ~~donc~~

Φ est donc contractante si $\quad h \sup |||J_f||| < 1.$ Si cette condition est vérifiée ~~cette~~ méthode dite d'Euler rétrograde ~~converge vers~~ permet d'approximer la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ dans des conditions similaires à la méthode d'Euler ordinaire