

4. Méthodes à un pas

4.1 Principe général

Soit le problème de Cauchy

$$(C) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f \in C^0(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}) \\ t_0 \in \mathbb{R} \quad y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

(H.) On suppose que (C) a une solution unique sur $[t_0, t_0+T]$ pour toute donnée de Cauchy $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$

Définition Une méthode à un pas pour résoudre (C) sur $[t_0, t_0+T]$ est la donnée de $h^* > 0$ et de $\phi \in C^0([0, h^*] \times [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

La solution approchée de paramètre $h \in]0, h^*]$ est la suite finie

$$(z_k)_{0 \leq k \leq N}$$

où on a posé

$$N = E\left(\frac{T}{h}\right) \quad N = \text{partie entière}$$

$$\begin{cases} z_0 = y_0 \\ z_{k+1} = z_k + h \phi(h, t_k, z_k) \end{cases}$$

$$t_k = t_0 + k \cdot h$$

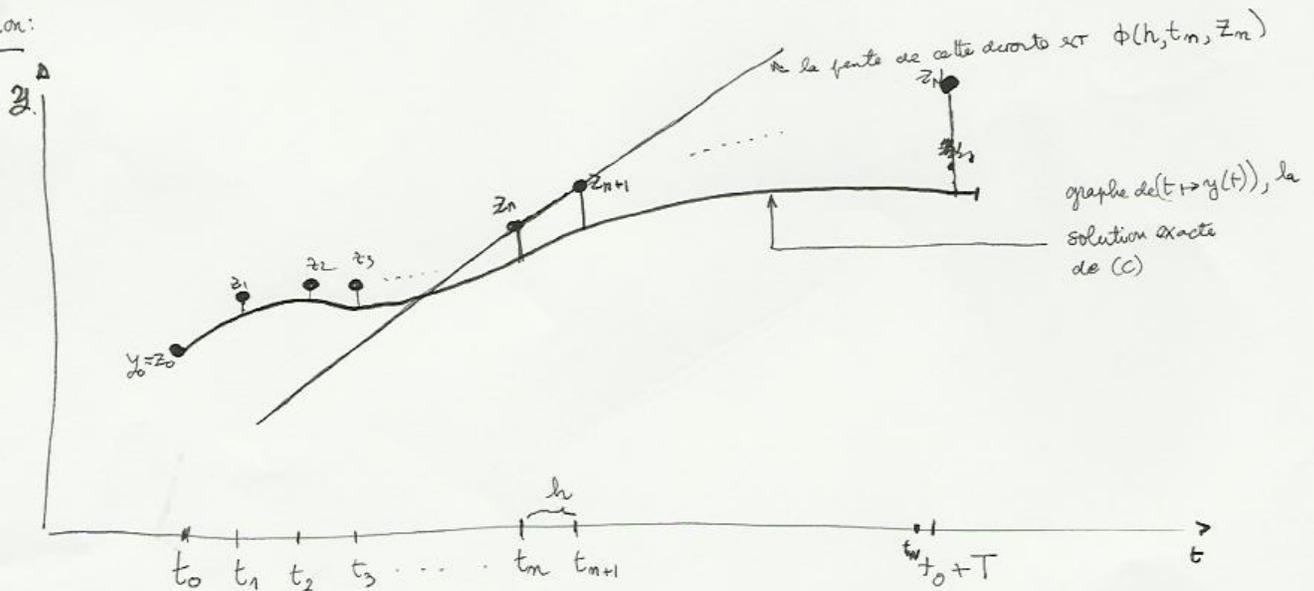
Remarque

On pense à z_k comme à une valeur approchée de $y(t_k)$ ou y est la solution de (C) sur $[t_0, t_0+T]$ (l'unicité nécessite le théorème de Cauchy-Lipschitz et est assurée si f est de classe C^1)

Exemple

$\phi(h, t, y) = f(t, y)$ définit la méthode d'Euler

Illustration:



Remarque: il n'est pas utile pratiquement numériquement de chercher à définir une solution approchée pour tout temps $t \in [t_0, t_0+T]$. En effet, numériquement, les variations de y sur des intervalles de temps plus petit que le plus petit nombre flottant ~~sur machine~~ seront indistinguables numériquement (si f est raisonnable' di sous $\|f\| \leq 100$).

4.2 Consistance et stabilité

4.2.a Définitions

Définition: Une méthode est dite consistante si pour toute solution \bar{y} de $y' = f(t, y)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \bar{y}(t_{k+1}) - \bar{y}(t_k) - h \phi(h, t_k, \bar{y}(t_k)) \right\| = 0$$

Remarque: Notez que $\bar{z}_{k+1} = \bar{y}(t_k) + h \phi(h, t_k, \bar{y}(t_k))$ est ce qu'on obtient en appliquant la méthode la première fois élémentaire de la "méthode ϕ " pour résoudre (C') $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_k) = \bar{y}(t_k) \end{cases}$ dont la solution est précisément \bar{y} .

Scholie: La quantité $e_k = \left\| \bar{y}(t_k) - \bar{z}_k \right\|$ ^{merité d'être} appelée "erreur de consistance élémentaire". La consistance ^{ne} demande que le ^{erreur de consistance} élémentaire ne s'accumule pas de façon excessive. Le simple bon sens impose donc la consistance.

Noter que $\bar{z}_1 = z_1$ mais que $\bar{z}_k \neq z_k$ pour $k \geq 1$ en général.

Définition: Une méthode est dite stable si pour toutes suites $(z_k)_{k \in \{0, \dots, N\}}$, $(w_k)_{k \in \{0, \dots, N\}}$, $(\epsilon_k)_{k \in \{0, \dots, N\}}$ tq s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + h \phi(h, t_k, z_k) \\ w_{k+1} &= w_k + h \phi(h, t_k, w_k) + \epsilon_k \end{aligned}$$

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|z_k - w_k\| \leq M \cdot \left[\|z_0 - w_0\| + \sum_{k < N} \|\epsilon_k\| \right]$$

Rem: En raison des erreurs d'arrondi en arithmétique machine une méthode non stable est insensée: les erreurs sur la donnée de Cauchy $\|z_0 - w_0\|$ et sur ϕ ie ϵ_k s'accumuleraient de façon explosive.

4.2.b

Théorème: Une méthode ^{est} consistante et stable est convergente i.e.:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq N} \|z_k - y(t_k)\| = 0$$

Remarque: Ceci vaut pour tout choix de la donnée de Cauchy.

Preuve:

On prend pour (z_k) la sol. approchée. On choisit y la sol. de (C) et on pose

$$w_k = y(t_k) \text{ soit } \varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h \phi(h, t_k, y(t_k)).$$

$$\sum_{0 \leq k < N} \|\varepsilon_k\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ par consistence}$$

$$\max_{0 \leq k < N} \|z_k - w_k\| \leq M \cdot \left(\sum_{0 \leq k < N} \|\varepsilon_k\| \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \square.$$

Noter qu'on peut aussi ^{initialiser} ~~pour~~ (z_k) avec $z_0 = z_0(h)$ vérif. $z_0(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} y_0$
en vertu de l'inégalité de stabilité.

4.2.c CNS condition de consistence Pour

Prop: Une méthode à un pas est consistente ssi $\phi(0, t, y) = f(t, y), \forall t, y.$

Preuve: Pour simplifier on suppose $n=1.$

soit \bar{y} sol. de $y' = f(t, y)$

$$\exists c_k \in]t_k, t_{k+1}[\quad \bar{y}(t_{k+1}) - \bar{y}(t_k) = h \bar{f}'(c_k) = h f(c_k, y(c_k))$$

posons $e_k = \bar{y}(t_{k+1}) - \bar{y}(t_k) - h \phi(h, t_k, \bar{y}(t_k))$

$$e_k = h \left[f(c_k, y(c_k)) - \phi(h, t_k, \bar{y}(t_k)) \right]$$

$$= h \left[f(c_k, y(c_k)) - \phi(0, c_k, \bar{y}(c_k)) \right] = \alpha_k h$$

$$+ h \left[\phi(0, c_k, \bar{y}(c_k)) - \phi(h, t_k, \bar{y}(t_k)) \right] = h \beta_k$$

Par hypothèse

$$\alpha_k = f(c_k, y(c_k)) - \phi$$

$$S_1 = \sum_{0 \leq k < N} \|\alpha_k\| \text{ est une somme de Riemann pour } t \rightarrow \|f(t, y) - \phi(0, t, y)\| \text{ sur } [t_0, t_0+T]$$

$$\text{et donc } \lim_{h \rightarrow 0} S_1 = \int_{t_0}^{t_0+T} \|f(t, y(t)) - \phi(0, t, y)\| dt = 0.$$

$$\beta_k \leq \max_{\substack{|t-t'| \leq h \\ 0 \leq h' \leq h \\ t, t' \in [t_0, t_0+T]}} \|\phi(t, \bar{y}(t)) - \phi(h', \bar{y}(t'))\| = \beta(h)$$

Comme $(t, h) \mapsto \phi(h, t, \bar{y}(t))$ est continue sur $[0, h^*] \times [t_0, t_0 + T]$ qui est compact

$$\beta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donc
$$\sum_{0 \leq k < N} \|h \beta_k\| \leq \beta(h) \cdot \left(\sum_{0 \leq k < N} h \right) \leq \beta(h) \cdot T \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donc
$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{0 \leq k < N} \|e_k\| = \int_{t_0}^{t_0+T} \|f(t, y) - \phi(0, t, y)\| dt \quad \square$$

Prop: Une méthode à un pas est stable si $\exists \Lambda > 0$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad \forall h \in [0, h^*] \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\phi(h, t, y) - \phi(h, t, z)\| \leq \Lambda \|y - z\|$$

Rege: Si la méthode est consistante on obtient que $y \mapsto f(t, y)$ est lipschitzienne en la variable y ce qui est la condition hypothèse optimale pour le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Cor: Si $\sup \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| < +\infty$ la méthode est stable.

Preuve:

$$\begin{aligned} z_{k+1} - w_{k+1} &= (z_k - w_k) + \varepsilon_k + h [\phi(h, t_k, z_k) - \phi(h, t_k, y_k)] \\ \|z_{k+1} - w_{k+1}\| &\leq \|z_k - w_k\| (1 + h\Lambda) + |\varepsilon_k| \end{aligned}$$

Par récurrence au $k \geq 0$ on a

$$\|z_k - w_k\| \leq e^{\Lambda(t_k - t_0)} \|z_0 - w_0\| + \sum_{i=0}^{k-1} e^{\Lambda(t_k - t_i)} |\varepsilon_i|$$

$k=0$ OK

$k \rightarrow k+1$

$$\|z_{k+1} - w_{k+1}\| \leq |\varepsilon_k| + (1 + h\Lambda) \cdot e^{\Lambda(t_k - t_0)} \|z_0 - w_0\| + \sum_{i=0}^{k-1} (1 + h\Lambda) e^{\Lambda(t_k - t_i)} |\varepsilon_i|$$

On a

$$1 + h\Lambda \leq e^{h\Lambda}$$

$$(1 + h\Lambda) e^{\Lambda(t_k - t_0)} \leq e^{\Lambda h + \Lambda(t_k - t_0)} = e^{\Lambda(t_k + h - t_0)} = e^{\Lambda(t_{k+1} - t_0)}$$

d'où le résultat avec le cas que $e^{h\Lambda} |\varepsilon_k| = e^{\Lambda(t_{k+1} - t_k)} |\varepsilon_k|$ $i = k+1 - 1 = k$

En particulier

$$\max_{0 \leq k < N} \|z_k - w_k\| \leq e^{\lambda T} \left(\|z_0 - w_0\| + \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| \right) \quad \square .$$

On a $M = e^{\lambda T}$ et la constante M se dégrade exponentiellement en T .

4.3 Méthodes de Runge-Kutta.

4.3.a Ordre d'une méthode à un pas.

Def: Une méthode a un pas est d'ordre $\geq p \geq 1$ si pour toute solution z de $y' = f(t, y)$ et tout $t_0 \in [t_0, t_0 + T]$ $\exists C > 0$

$$\|z(t_0 + h) - z(t_0) - h \phi(h, t_0, z(t_0))\| \leq C h^{p+1}$$

Remarque: on dit qu'une méthode est d'ordre ≥ 1 est donc consistante.

Exemple: la méth. d'Euler est d'ordre 1.

Theoreme: Pour une méthode stable et d'ordre $p \geq 1$ $\exists K > 0$ tel

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|y(t_k) - y_k\| \leq K \cdot (h^p + \|y_0(a) - y_0\|).$$

Preuve: On peut reprendre avec soin la preuve du théorème de convergence.

4.3.b principes des méthodes de Runge-Kutta

Fixons $0 \leq c_1, \dots, c_q \leq 1$ des réels distincts et

$$\int_0^{c_j} f \approx \sum_{i=1}^q a_{ij} f(c_i) \quad \text{une formule d'intégration numérique sur } [0, c_j]$$

Ainsi $q=2$

$$\int_0^1 f \approx \sum_{i=1}^2 b_i f(c_i) \quad \text{sur } [0, 1].$$

Ponons

$$t_{k,i} = t_k + c_i h = t_0 + kh + c_i h. \text{ Soit } y \text{ une sol de } y' = f(t, y) \text{ on a.}$$

$$y(t_{k,i}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k,i}} f(t, y(t)) dt \approx y(t_k) + h \cdot \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{k,j}, y(t_{k,j}))$$

$$y(t_k) \approx y(t_k) + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_{k,j}, y(t_{k,j})).$$

On décrit la donnée avec un tableau de valeurs

c_1	a_{11}	...	a_{1q}
\vdots	\vdots		\vdots
c_q	a_{q1}	...	a_{qq}
	b_1	...	b_q

La méthode de Runge-Kutta correspondant à ces données consiste à construire

la suite $(y_k)_{0 \leq k \leq N}$ par:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_k, y_{k,j})$$

où les $(y_{k,j})_{0 \leq k \leq N}$ $j=1, \dots, q$ se calculent en fonction de y_k en

résolvant le système de $n \cdot q$ eq a $n \cdot q$ inconnues:

$$y_{k,i} = y_k + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{k,j}, y_{k,j}) \quad i=1, \dots, q.$$

4.3. Méthode de Runge-Kutta explicite

Si $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

est triangulaire inférieur avec 0 sur la diagonale

on a

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

et $y_{n,i} = y_n$ les $y_{n,i}$ se calculent en fonction des $(y_{n,j})$

Euler:

a	0
1	

Point-Milieu

0	0	0
$1/2$	$1/2$	0
0	0	1

Runge-Kutta classique

0	0	0	0	0
$1/2$	$1/2$	0	0	0
$1/2$	0	$1/2$	0	0
1	0	0	1	0
	$1/6$	$2/6$	$2/6$	$1/6$

formule de Simpson

ordre 1

ordre 2

$$y_{n+1} = y_n + h f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y))$$

ordre 4 (calculs trop volumineux mais élémentaires.)
très efficace.

4.3.4 Méthode de Runge Kutta explicite.

c'est le cas général.

Prop: si $h \sup_{[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^q} \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| < 1$. Le système des Runge données auxiliaires

de RK

$$y_{k,i} = y_k + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{k,j}; y_{k,j})$$

a une solution unique $y_{k,i} = \mathcal{P}_i(y_k)$.

Preuve: On se restreint à $n=1$ pour simplifier mais le cas général est similaire. Théorème du point fixe pour

$$F: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q \quad Y_k \mapsto Y_k + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{k,j}; Y_j)$$

$$J_F(Y) = A \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Cor: La méthode de RK se met sous la forme:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^q f(t_{k,j}; \mathcal{P}_j(y_k)) = y_n + h \Phi(t_k, y)$$

Ex: méthode d'Euler ^{implicite} ~~stochastique~~:

$$\frac{1}{1}.$$

$$\begin{cases} y_{n,1} = y_n + h f(t_{n+1}; y_{n,1}) \\ y_{n,2} = y_n + h f(t_{n,1}; y_{n,2}) \end{cases}$$

$$\text{soit } y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}; y_{n+1}).$$

Ordre = 1. ~~Stable~~ Théorie proche de la méth. d'Euler ~~implicite~~

4.3.5 Étude théorique des méthodes de Runge Kutta

Les techniques pour déterminer l'ordre d'une méthode de Runge-Kutta conduisent à des calculs matriciels simples lorsque nous nous décrivons les fuites de temps.

Théorème: les méthodes de Runge Kutta sont ~~stables~~ stables pour $0 < h < h^*$ h^* aux j peut

$$\text{dès que } \max_{(t,y)} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < +\infty.$$

La preuve de ce théorème est simple, longue, peu instructive et se trouve dans les références données dans la bibliographie.

4.3.6 Remarque finale: Pour améliorer les méthodes on peut utiliser un

variable $h_k > 0$ au lieu du pas constant $h_k \equiv h$ - la théorie ne change pas vraiment, mais les aspects numériques sont améliorés.

De nombreuses autres méthodes ont été développées dans la littérature en raison de l'importance pratique du problème.