

## Chapitre II. Algèbre linéaire effective.

Ce chapitre étudie les principales opérations matririelles numériques. On travaillera à coefficients complexes. Les complexes flottants sont stockés sous leur partie imaginaire et leur partie réelle comme deux réels flottants.

### 2.1 Méthodes directes pour la résolution de systèmes linéaires

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$   
 $b \in \mathbb{C}^n$

On considère le système linéaire  $n$  équations  $n$  inconnues suivant

$$(S) \quad A \cdot x = b \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{C}^n.$$

Explicitement

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

(a) Méthode du pivot de Gauß simple.

C'est la méthode la plus standard enseignée dès les classes de terminale scientifique. Supposons  $a_{11} \neq 0$ , on remplace la  $k$ -ième ligne  $L_k$  ( $k \geq 2$ ) de  $(S)$  par

$$L'_k = L_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}} L_1$$

et le système prend la forme

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ 0 + a_{mm}^{(1)}x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit } A^{(1)} \cdot x = b^{(1)}$$

Itérant le processus  $k$ -fois, si cela est possible on obtient un système

$S^{(k)}$  de la forme  $A^{(k)} \cdot x = b^{(k)}$



$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \pi_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_k. \end{bmatrix}$$

Pour itérer une fois de plus il est nécessaire de supposer que

$$\pi_{k+1} = (C_k)_{11} = A_{k+1, k+1}^{(k)} \neq 0.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée la méthode du pivot termine au rang k.

En particulier, si  $\forall k=1, \dots, m-1 \quad \pi_k \neq 0$ . on aboutit à un système

$S^{(m)}$  dont la matrice  $U = A^{(m)} = U(A)$  est triangulaire supérieure avec  $\pi_1, \dots, \pi_m$  comme éléments diagonaux.

Le passage de  $S$  à  $S^{(1)}$  revient à multiplier à gauche ( $S$ )

par la matrice

$$M_1 = M_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_{m1}/a_{11} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ -a_{m1}/a_{11} & 0 & \dots & 1 & & \\ & & & & I_{m-1}. & \end{bmatrix}$$

et le passage à  $(S^{(k)})$  revient à multiplier à gauche ( $S$ ) par

$$M_k \cdots M_1$$

$$M_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & M_1(C_k) \end{bmatrix}$$

$$\text{On pose } L(A) = M_{m-1} \cdots M_1 \quad A \in \mathbb{R}_n \mathbb{C}$$

Notation. Pour  $1 \leq p \leq n$  on notera

$$A_{[p]} \in M_p(\mathbb{C}) \quad \text{la matrice} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \quad \text{i.e. le 1<sup>er</sup> bloc pxp de } A.$$

On observe que le processus de formation de  $M_1(A)_{[p]}$  est le même que celui de  $M_1(A_{[p]})$  i.e.:  $M_1(A)_{[p]} = M_1(A_{[p]})$

& plus généralement pour  $k \leq p$

$$M_k(A)_{[p]} = M_k(A)_{[p]}.$$

Bien sûr pour  $k > p$

$$M_k(A)_{[p]} = I_p$$

comme donc

$$M_k(A) = \begin{bmatrix} M_k(A)_{[p]} & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

il suit que

$$M_k(A)_{[p]} \dots M_1(A)_{[p]} = \begin{bmatrix} M_k(A)_{[p]} & \dots & M_1(A)_{[p]} \end{bmatrix}_{[p]}$$

$$M_k(A_{[p]}) \dots M_1(A_{[p]}) =$$

si

$$L(A)_{[p]} = L(A_{[p]})$$

de même

$$U(A)_{[p]} = U(A_{[p]})$$

$$A_{[p]} = L(A_{[p]}) U(A_{[p]})$$

- en effet  $\det M_i = 1$ .

Corollaire:  $\pi_1 \dots \pi_p = \det A_{[p]} = \Delta_{[p]}$  avec la ~~1 ère ligne nulle~~

Corollaire: da méthode du pivot de gauss simple ~~avec toutes les échelles~~ ne termine pas

si et seulement  $\forall p \in \mathbb{N} \quad 1 \leq p \leq m-1 \quad \det A_{[p]} \neq 0$

De plus  $\det(A) = \det(U(A)) = \pi_1 \dots \pi_m$ .

## (b) factorisation LU.

les considérations précédentes se systématisent en le

Théorème: Supposons que  $\det A_{[p]} \neq 0$  pour  $1 \leq p \leq m$ . Alors il existe une unique factorisation

$$A = L \cdot U \quad (*)$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ * & 1 & 0 & & \\ & * & 1 & 0 & \\ & & * & 1 & \\ & & & * & 1 \end{pmatrix}$$

triangulaire inf avec 1 sur la diagonale ( $i_{inf} = lower$ )

$$U = \begin{pmatrix} \pi_1 & * & * & & \\ 0 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & \ddots & * \\ & & & \ddots & \pi_m \end{pmatrix}$$

triangulaire supérieure avec termes diagonaux non nul ( $i_{sup} = upper$ )

Déf: (\*) est la décomposition LU de A.

Réu:

Si on a résolu un grand nombre de fois un syst. de matrice A on a intérêt à stocker L et U.

Preuve: On a  $M_{m-1} \dots M_1 \cdot A = U$

$M_k$  est triang inf avec 1 sur la diagonale  
donc  $M_{m-1} \dots M_1$  a cette propriété ainsi que

$$L = M_1^{-1} \dots M_{m-1}^{-1}$$

Pour l'unicité si

$$LU = L'U' \quad (L'^{-1})L' = U'U'^{-1}$$

triang inf avec 1  
sur la diagonale

triang sup avec  $\pi'_i/\pi_i$   
comme élément diagonal

$$\text{de là } L'^{-1}L' = U'U'^{-1} = I_m.$$

(c) Remarques sur la mise en œuvre pratique du pivot de Gauss Simple.

- Description de la matrice L.

Notons que  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -\gamma_2 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ -\gamma_m & & & 1 \end{pmatrix}$

Donc

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ \gamma_2 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ \gamma_m & & & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi  $\gamma_k$  est le coeff. mult. de la 1<sup>re</sup> ligne  
avant soustraction à la k-ième ligne  
au pas 1 de la méthode.

Pour simplifier supposons  $m=3$

$$M_1^{-1}M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

Plus généralement

Lemme: Le coefficient  $L_{ij}$  de  $L$   $i > j$  est le coeff. multiplicateur de la i<sup>ème</sup> ligne  
avant soustraction à la j-ième ligne au pas  $i$ -ème pas de la méthode  
du pivot de Gauss Simple.

ainsi la colonne  $L_1^{dL}$  nécessite  $n-1$  divisions  
et le calcul de  $L$  nécessite  $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$  opérations

- Calcul de la matrice U.

Revenons en arrière et rappelons qu'au  $k$ -ième étage de la méthode du pivot on obtient un système de matrice  $A^{(k)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & * & & \\ 0 & \ddots & \pi_k & * \\ | & & | & | \\ 0 & - & 0 & C_k \end{pmatrix}$

et que  $A^{(k+1)}$  s'obtient en ne changeant que le bloc  $C_k$  en le bloc  $C_k^{(1)}$ .

(connaissant  $L$ )

Le passage de  $A$  à  $A^{(1)}$  nécessite  $(m-1)^2$  multiplications soit  $2(m-1)^2$  opérations  $(m-1)^2$  soustractions

Ainsi le nombre d'opérations nécessaire au calcul de  $U$  est

$$2(m-1)^3 + 2(m-2)^3 + \dots + 2 \cdot 1^3 = 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \approx 2 \cdot \frac{m^3}{3}.$$

Conclusion

Le nombre d'opérations nécessaires à mettre  $A$  sous forme  $L \cdot U$  est  $\approx 2 \frac{m^3}{3}$ .

• Etant donné  $Ax = b$  et  $A = LU$

$x = U^{-1}(L^{-1}b)$  et il suffit de résoudre successivement

$$\begin{aligned} Ux &= c \\ Lc &= b. \end{aligned}$$

La résolution du système  $Lc = b$  est ce qui se produit lorsqu'on multiplie successivement  $b$  par  $M_2, \dots, M_{n-1}$  par

$$L^{-1} = M_{n-1} \cdots M_1.$$

Regardons le cas du système  $Ux = c$

$$U_{11}x_1 + U_{12}x_2 + \dots + U_{1n}x_n = c_1$$

$$U_{22}x_2 + \dots + U_{2n}x_n = c_2$$

$$U_{nn}x_n = c_n$$

Le calcul de  $x_n$  nécessite 1 division

$x_{n-1}$  nécessite 1 mult. 1 soustrac. 1 division (à  $(U_{2n}x_n)$   $(c_2 - U_{2n}x_n)$   $c_2 - U_{2n}x_n / U_{n-1,n-1}$ )

$x_{n-2}$  nécessite 2 mult. 2 soustrac. 1 div.

Ainsi résoudre  $Ux = c$  nécéste

$$1+3+5+\dots = \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) \sim n^2 \text{ opérations.}$$

• Bilan général sur l'efficacité du pivot simple.

Pour résoudre un système  $n \times n$  nég il faut  $\sim \frac{2}{3} n^3$  opérations

$$\underline{n=10^5} \rightarrow 6.6 \cdot 10^9 \text{ opérations}$$

La puissance d'un calculateur (en flops) est le nombre d'opération flottantes de précision simple qu'il est susceptible d'effectuer

Pour  $n=10^5$ , si on veut résoudre un 1 seconde, il faut donc une puissance de calcul de  $6.6 \cdot 10^9$  flops à 6,6 Gflop.

Processor PC très haut de gamme 2009	70 Gflop
Cray Jaguar (2009)	$1.75 \cdot 10^{15}$ flop

Donc  $n=10^5$  est dans le domaine du faisable pour pas trop cher  $n=10^8$  sera en revanche ruineux.....

• Variante de la méthode du pivot simple

\* pivot partial (en colonne). au  $i$ -ème étage on choisit comme pivot celle telle que  $|a_{ik}| = \max_k |a_{ik}|$  et on échange la  $i$ -ième et la 1ère ligne.

→ efficacité comparable au pivot simple en  $\frac{2}{3} n^3$

→ les restrictions sur les minima principaux... et donc plus de stabilité numérique.

\* pivot total on choisit comme pivot  $a_{ij}$  de module maximal. les tirs à effectuer dégradent l'efficacité en  $\frac{n^2 \log_2(n)}{3}$ .

## (d) Méthode de Cholesky :

- Déf •  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est dit hermitienne si  $t\bar{A} = A$ .  
 • une matrice hermitienne est définie positive si

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^n, \{\xi \neq 0\} \quad t\bar{\xi}A\xi > 0.$$

Noter que:  $t\bar{\xi}A\xi = t\bar{\xi}A\bar{\xi} \stackrel{\text{herm}}{=} t\bar{\xi}t\bar{A}\xi = t(\bar{\xi}\bar{A}\xi) = t\bar{\xi}A\xi$   
 donc  $t\bar{\xi}A\xi \in \mathbb{R}$ . si  $A$  hermitienne.

Théorème (Décomposition de Cholesky)  $A$  hermitienne définie positive.  $\exists ! C$  matrice triangulaire supérieure à diagonale positive telle que

$$A = t\bar{C}C$$

Remarque: soit  $D =$  la diagonale de  $C$      $L' = t\bar{C}D^{-1}$  est triangulaire inf avec 1 sur la diagonale et     $U' = DC$  est triangulaire sup à coefficients strictement positifs —

Donc  $\boxed{A = L'U'}$  —  $A = L'U'$  est la décomposition LU de  $A$ .

### Preuve:

- Notez que  $C$  est inversible car ses éléments diagonaux sont positifs ( $a_{ii} > 0$ )
- donc  $t\bar{\xi}t\bar{C}C\xi = t\bar{(C\xi)}(C\xi) = \|C\xi\|_2^2 > 0 \quad \left( \left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)$   
si ~~et seulement si~~  $\xi \neq 0$ .

Donc  $t\bar{C}C$  est hermitienne définie positive.

- L'unicité résulte de la remarque ou de la même méthode que dans le cas LU.
- Seule l'existence pose problème. On donnera une preuve ~~algorithmique~~

Posons  $C = \begin{pmatrix} \gamma & \ell \\ 0 & C' \end{pmatrix} \quad t\bar{C}C = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t\bar{\ell} & t\bar{C}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \ell \\ 0 & C' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 & \gamma\ell \\ t\bar{\ell}\gamma & t\bar{\ell}\ell + t\bar{C}'C' \end{bmatrix}$

$$\gamma > 0$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ t\bar{\mathbf{0}} & A' \end{pmatrix} \quad \text{on doit avoir} \quad \gamma^2 = a_{11} > 0 \quad \text{Soit } \gamma = \sqrt{a_{11}}$$

$$\gamma\ell = \mathbf{0} \quad \text{Soit } \ell = \mathbf{0}/\gamma$$

### Par récurrence

En raisonnant par récurrence on doit vérifier que

$(A' - t\bar{\ell}\ell)$  est définie positive.

Sont  $\xi \in \mathbb{C}^n - \{\text{0}\}$

$$\xi' = \begin{pmatrix} \lambda \xi / y^2 \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n - \{\text{0}\}$$

${}^t \bar{\xi}' A \xi' > 0$  car  $A$  form. définie positive donc

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\lambda \xi}{y^2}, {}^t \bar{\xi} \right) \begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ {}^t \bar{\lambda} & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \xi / y^2 \\ \xi \end{pmatrix} &= \left( -\frac{\lambda \xi}{y^2}, {}^t \bar{\xi} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{{}^t \bar{\lambda} \lambda \xi}{y^2} + A' \xi \end{pmatrix} \\ &= -\frac{{}^t \bar{\xi} {}^t \bar{\lambda} \lambda \xi}{y^2} + {}^t \bar{\xi} A \xi \\ &= {}^t \bar{\xi} (A - {}^t \bar{\lambda} \cdot \bar{\lambda}) \xi > 0 \quad \square. \end{aligned}$$

Remarque:

On construit l'orthonormée de gram-schmidt de la base canonique  $(e_1, e_2, \dots)$  vis à vis de  $(\xi, \eta)_A = {}^t \bar{\xi} A \eta$  sur le procédé suivant

$$e_1 = \frac{e_1}{\sqrt{(e_1, e_1)_A}}$$

$$e'_k = e_k - \sum_{i < k} (e_i, e_k)_A e_i$$

$$e_k = \frac{e'_k}{\sqrt{(e'_k, e'_k)_A}}$$

et  $(e_1, e_2, \dots)$  est orthonormée i.e.  $(e_i, e_j)_A = \delta_{ij}$ .

La matrice de passage  $C'$  de la BC à son OGS vérifie donc

$$- {}^t \bar{C}' A C' = I_m$$

-  $C'$  triangulaire supérieure car  $e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

Par suite  $A = {}^t \bar{C}'^{-1} C'^{-1}$  et  $C = C'^{-1}$

Ceci fournit une autre preuve de l'existence de la décomposition de Cholesky, moins effective peut-être.

Efficacité de la méthode de Cholesky

# Le 1er pas de la méthode de Cholesky

Consiste à construire

$(\gamma, l)$  la 1<sup>re</sup> ligne de  $C$

et  $C' = A' - \gamma l l^T$  la matrice  $n-1, n-1$  à Cholesky récursive.

le calcul de  $\gamma$  nécessite

1

1 extr. de racine carree

( $n-1$ ) divisions

des éléments diagonaux de  $A' - \gamma l l^T$

$n$  multiplication

$n$  soustractions

des éléments superdiagonaux de —

$\frac{n(n-1)}{2}$

"  $\frac{n(n-1)}{2}$  soustr.

sous —

0 opération car la matrice  
est hermitienne.

Ceci donne

$$n \text{ extractions} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k-1) + 2(n-k) + n \cancel{n} \cancel{(n-k)(n-k-1)}$$

$$\sim \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sim \frac{n^2}{3}.$$

En principe la forme spéciale de  $A$  réduit d'un facteur 2 le temps de calcul par rapport à LU.

## (e) Méthode QR

Def  $Q \in M_n(\mathbb{C})$  est unitaire si  ${}^t \bar{Q} Q = I_n$

Thm  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Alors  $\exists ! (Q, R)$

-  $Q$  unitaire

-  $R$  triang. supérieure avec des ~~réels~~ positifs sur la diagonale telle que

$$A = QR$$

Preuve:

${}^t \bar{A} A$  est définie positive. Donc

${}^t \bar{A} A = {}^t \bar{R} R$  par la déc. de Cholesky

$$\text{Or } {}^t \bar{Q} R Q = {}^t \bar{R} {}^t \bar{Q} Q R = {}^t \bar{R} R$$

Donc  $R$  est la matrice de Cholesky de  ${}^t \bar{A} A$ . ( $\rightarrow$  unicité et existence)  
Posant, car c'est le seul choix possible  $Q = AR^{-1}$  on a bien

$${}^t \bar{Q} Q = {}^t \bar{(AR^{-1})} AR^{-1} = {}^t \bar{R}^{-1} {}^t \bar{A} A R^{-1} = {}^t \bar{R}^{-1} {}^t \bar{R} R R^{-1} = I_m. \square.$$

# Interprétation géométrique.

$$A_{ij} = \sum_k q_{ik} r_{kj}$$

la jème colonne

$$A_j = \sum_{1 \leq k \leq j} q_k(r_{kj}) \quad \text{car } R \text{ est triang. supérieure donc } r_{kj}=0 \text{ si } j < k$$

$$\text{donc } A_j \in \text{Vect}(\{q_k\}_{k \leq j})$$

$$\text{et } q_j \in \text{Vect}(\{A_k\}_{k \leq j}) \text{ car } r_{kk} \neq 0.$$

$$\text{D'autre part } q_k = \frac{A_k - A'_k}{r_{kk}} \quad A'_k \in \text{Vect}(\{A_j\}_{j \leq k})$$

Donc  $(q_1, \dots, q_m)$  est l'OGS / (-;-) de la base des colonnes de  $A$ .

$$Q = P_{E/\text{OGS}} \quad R = P_{\text{OGS}/A}$$

$$A = P_{E/A} \quad \square$$

Rem:  $Q^{-1} = +\bar{Q}$

## 2.2 Normes matricielles et concepts liés

### (a) Norme opératorielle, définition: premières propriétés

Soit  $N$  une norme sur l'espace  $E$  (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de dim finie. La norme

$$\underline{\text{Définition}} \quad \forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

~~elle dépend de  $N$~~ .

Lemme  $\|\cdot\|$  est une norme sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$ .

- $\|u\| \in \mathbb{R}_+$

- $\|\lambda \cdot u\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$

- on a  $\forall x \quad \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\| \quad \text{car} \quad \|u(x)\| \leq \|u\|$

donc  $\|u+v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq (\|u\| + \|v\|) \|x\|.$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

- Soit  $u$  t.q.  $\|u\|=0$  alors  $\forall x \quad \|u(x)\| \leq 0$  donc  $u(x)=0$  et  $u=0$ .

Rem: 1) le sup est un max car  $\{x \in E \mid \|x\|=1\}$  est compact.

2)  $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|=1}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \inf \{M > 0 \mid \forall z \quad \|u(z)\| \leq M\|z\|\}$

3)  $\|\cdot\|$  dépend de  $N$ . On devrait noter  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_N$ . On appelle

norme opératorielle ~~subordonnée à~~ à  $N$ .

Prop:  $u, v \in \mathcal{L}(E)$

$$\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Preuve:  $\|uv(x)\| \leq \|u\left(\frac{v(x)}{\|v(x)\|}\right)\| \|v(x)\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|x\|$ .

Donc:  $\sup_{\|x\|=1} \|uv\| = \|u\| \cdot \|v\|$ . de même si  $\|v(x)\|=0$ ,

Si  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\|A\|$  une norme sur  $\mathbb{C}^n$

On pose  $\|A\| = \|\alpha\|$  où  $(\alpha: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, z \mapsto Az)$  est l'endo associé à  $A$ .  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $M_n(\mathbb{C})$  et

Prop:  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

### (b) rayon spectral

Soit  $E$  un espace fini

Soit  $u \in L(E)$   $b_m = \|u^{m+1}\|$  alors  $b_{m+1} \leq b_m \cdot b_m$ .

Corollaire  $(b_m^{1/m})_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel positif noté  $\rho(u)$  appelé le rayon spectral de  $u$ .

Si  $b_{n_0} = 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad b_n = 0$ . On exclut ce cas.

•  $\beta_n = b_{2^n}^{1/2^n}$   $\beta_{n+1} = b_{2^{n+1}}^{1/2^{n+1}} \leq (b_{2^n}^{1/2^n})^{1/2} = \beta_n$   
donc  $0 \leq \beta_n \leq \beta_1$  et  $(\beta_n)$  converge vers  $\rho \in [0, \beta_1]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0$  tq  $\rho - \varepsilon \leq \beta_{n_0} \leq \rho + \varepsilon$ .

$$n \in \mathbb{N}^* \quad n = 2^{n_0} + r \quad 0 \leq r < 2^{n_0}$$

$$b_n \leq [b_{2^{n_0}}]^{a_n} \cdot b_r$$

$$b_n^{1/n} \leq (\rho + \varepsilon)^{\frac{2^{n_0}a_n}{n}} \cdot b_{n_0}^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

donc  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} \leq \rho + \varepsilon$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} \leq \rho$

• Supposons  $\exists n_0 \quad b_{n_0}^{1/n_0} < \rho$

$$2^n = a_n n_0 + r_n \quad b_{2^n}^{1/n} \leq [b_{n_0}]^{a_n} \cdot b_{r_n}$$

$$b_{2^n}^{1/2^n} \leq (b_{r_n})^{1/2^{n_0}} \cdot b_{n_0}^{a_n/2^{n_0}}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} \leq 1 \cdot b_{n_0}^{1/n_0} < \rho$$

donc  $\forall n \quad b_n^{1/n} \geq \rho$  et  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n^{1/n} = \rho$ .

Remarque  $\rho = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n^{1/n}$

Déf  $A \in M_n(\mathbb{C})$  Le rayon spectral de  $A$  est celui de l'endomorphisme associé à  $A$ .

Remarque A priori le rayon spectral dépend de la norme à laquelle  $\|A\|$  est définie.

Donc si  $N_1, N_2$  sont deux normes  $p_{N_1}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|_{N_1}^{1/n}$  pour que les deux normes peuvent ne pas être égales

Cependant lorsque ces normes sont  $M, M' > 0$

$$M \|A\| \leq \|A\|_{N_1} \leq M' \|A\| \leq M' \|A\|_{N_2} \leq M' \|A\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{n}} \|A\|_{N_1}^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|_{N_2}^{\frac{1}{n}} \leq (M')^{\frac{1}{n}} \|A\|_{N_2}^{\frac{1}{n}}$$

et  $M^{\frac{1}{n}} = 1$  donc  $p_{N_1}(u) = p_{N_2}(u)$ .

### (c) Conditionnement

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{C}^n$ . ex  $\|z\| = \|z\|_2 = \left[ \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

Def:  $A \in GL_n(\mathbb{C})$   $c(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  est le conditionnement de  $A$ .

Prop Soit  $(S)$  le système  $Ax = b$  et  $(S')$   $A(x + \delta x) = b + \delta b$  alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq c(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + o(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|})$$

Soit  $(S'')$   $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq c(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Preuve:

- $\delta x = A^{-1} \delta b$  donc  $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$  donc  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \|A^{-1}\|$
- $Ax = Ab$  donc  $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$
- $A \delta x = \delta A \cdot x + \delta A \cdot \delta x = 0$  donc  $A \cdot \delta x = \delta A(x + \delta x)$
- $\delta x = A^{-1} \delta A(x + \delta x)$   $\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \leq c(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Rem:  $c(A) \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$  erreur relative sur  $x$        $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  err. rel. sur  $A$        $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$  err. rel. sur  $B$

$\delta x \rightarrow c(A)$  coefficient d'amplification des erreurs relatives

•  $c(A) \geq 1$   
Lemma: Si  $A$  unitaire ( $A^* A = I$ )  $c(A) = 1$

$$\text{Ex} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \delta b \\ b = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad x + \delta x = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} \Rightarrow c(A) \approx 2000!$$

Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires(a) Série de Neumann

Théorème  $B \in M_n(\mathbb{C})$  ~~soit  $\varepsilon > 0$  telle que~~  $\exists C > 0$   $\|B^n\| \leq C[\rho(B) + \varepsilon]^n$

$$\|B^n\| \geq \rho(B)^n$$

Preuve:

Soit  $n_0$  tq  $\|B^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho + \varepsilon$  pour  $n \geq n_0$ .

alors

$$\frac{\|B^n\|}{(\rho + \varepsilon)^n} \leq 1 \text{ pour } n \geq n_0 \text{ et } \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|B^n\|}{(\rho + \varepsilon)^n} = \max(1, \max_{n \leq n_0} \frac{\|B^n\|}{(\rho + \varepsilon)^n})$$

Le second point vient de  $\rho(B) = \inf_n \|B^n\|^{\frac{1}{n}}$ .

Corollaire: Les assertions suivantes sont égales

$$(1) \rho(B) < 1$$

$$(2) B^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$(3) \left( \sum_{k=0}^{\infty} B^k \right) \text{ est une série convergente absolument.}$$

Remarque Dans ces conditions  $1-B$  inversible d'inverse  $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ . —

Preuve: (3)  $\Rightarrow$  (2) OK

(2)  $\Rightarrow$  (1) le second pt ou le - si je ge  $\forall \varepsilon > 0$   $(\rho - \varepsilon)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  donc  $\rho - \varepsilon < 1$ . et  $\rho \leq 1$ . Si  $\rho = 1$  rappelons se  $\|B^n\|^{\frac{1}{n}} \geq \rho$  pour  $n \gg 0$  comme on l'a vu lors de la preuve de la convergence des suites sous-multiplicatives. donc  $\rho = 1$  est exclue par (2)

$$(1) \Rightarrow (3) \quad \|B^n\| \leq C_\varepsilon (\rho + \varepsilon)^n \text{ pour } \varepsilon \text{ tq } \rho + \varepsilon < 1$$

$\uparrow$   
suite géométrique  $< 1$

Donc la série  $\sum \|B^n\|$  converge absolument —

$$\text{On a } (1-B) \sum_{k=0}^{\infty} B^k = 1 - B^{n+1} \text{ d'où selon (3) } (1-B) \sum_{k=0}^{\infty} B^k = 1.$$

Rem: la série géométrique matricielle  $\sum B^k$  est la série de Neumann pour inverser  $1-B$ .

Prop: Soit  $B \in M_n(\mathbb{C})$  tq  $\rho(B) < 1$ . La suite de vecteurs

$$u_{k+1} = B u_k + c$$

Converge vers l'unique solution  $u$  du système  $u = Bu + c$

Preuve  $u = Bu + c \Leftrightarrow (1-B)u = c$  Solution unique si  $(1-B)$  inversible ce qui est le cas si  $\rho(B) < 1$  par le corollaire

$$(u_{k+1} - u) = B(u_k - u) \text{ d'où } u_k - u = B^k(u_0 - u)$$

$$\text{et } \|u_k - u\| \leq C'_\varepsilon (\rho(B) + \varepsilon)^n \Leftrightarrow \text{convergence géométrique.}$$

## (B) Méthodes itératives classiques

On considère  $(S_0)$   $Ax = b$

On suppose  $A = M - N$  avec  $M$  "facile" à inverser

$$(S) \Leftrightarrow Mx = Nx + b$$

$$\Leftrightarrow x = M^{-1}N\bar{x} + M^{-1}b$$

Corollaire Si  $\rho(M^{-1}N) < 1$  la suite définie par

$$M \cdot \bar{x}_{k+1} = Nx_k + b$$

converge vers l'unique solution de  $(S)$ .

### Méthode de Jacobi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$N = M - A.$$

### Méthode de Gauß Seidel

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

plus efficace en général

### Méthode de relaxation $\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0, 1$

$$M_\omega = \begin{bmatrix} a_{11}/\omega & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}/\omega \end{bmatrix}$$

$$N_\omega = M_\omega - A$$

il faut alors chercher  $\omega$  tq  $\rho(M_\omega^{-1}N_\omega)$  minimal.  
paramètre de relaxation optimal.

## 2.4 Méthodes de calcul des éléments spectraux

La technique往常 de recherche des valeurs propres et vecteurs propres se fait en trois pas

Calcul du polynôme caractéristique de  $A$

Recherche des racines du polynôme car.

Recherche de  $\ker(A - \lambda I)$   $\lambda \in \text{sp}(A)$

faut résoudre par méthode du pivot

?

par méthode du pivot

de toute à la difficulté évidente qu'il faut rechercher les racines du polynôme caractéristique.

Pour les polynômes de degré 2 et 3 (ou 4) il existe des formules exactes avec extraction de racines carrées (ou cubiques). En degré 2 ce sont les formules élémentaires  $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ; en degré 3 les formules de Cardan découvertes à la Renaissance.

En degré 5 et plus il n'existe pas de formule exacte du ce type (ce est un théorème célèbre d'Abel) et donc il faut recourir à la résolution ~~exacte~~ numérique. Au chapitre suivant on verra comment faire. En attendant décrivons des méthodes spécifiques.

### a) méthode de la puissance.

Proposition: Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie

$$\rho(u) = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(u)} |\lambda|.$$

- Preuve:
- si  $u(x) = \lambda x$  avec  $\|x\|=1$  alors  $\|u^n(x)\| = \lambda^n$  et  $\|u^n(x)\| \geq \lambda^n$ . donc  $\|u^n\| \geq \lambda^n$  et  $\rho(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} \geq |\lambda|$ .
  - Soit  $B$  une base de  $E$  dans laquelle  $u$  soit diagonale par blocs de Jordan de la forme

$$J = J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J = \lambda \cdot I_m + N \quad N = J_m(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $N^k = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & 0 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\hspace{10em}}$  kème sous-diagonale

$$J^m = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-k} N^k \cdot \binom{m}{k} \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$$

polynôme de degré  $k$  en  $m$

Donc les coeff. de la matrice de  $u^n$  dans  $B$  sont de la forme

$$\text{Mat}(u^n)_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-k} \pi_{ij}(n) \quad \text{avec } \pi_{ij} \text{ un polynôme de degré } < \text{taille des blocs de Jordan}$$

donc  $u^n(x)_i = \sum \text{Mat}(u^n)_{ij} x_j$  et  $\|u^n(x)\| \leq C \cdot \|x\|^n$  pour  $n \geq 1$  donc

$\|u^n\| \leq C^{\frac{1}{n}} n^{\frac{\dim E}{n}} |\lambda|$        $\|u^n\| \leq C^{\frac{1}{n}} n^{\frac{\dim E}{n}} |\lambda|$

Corollaire: Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ayant une valeur propre simple  $\lambda$  qui est  $> 0$  modulo aux autres.

~~Sous-espaces Ker(A)~~

Alors il existe un sous espace vectoriel  $W$   $A$ -invariant

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \lambda I_n) \oplus W$$

et  $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus W$

$$\frac{A^n x_0}{\lambda^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \quad \text{où } v \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Preuve: une valeur propre simple est une racine simple du polynôme minimal. On a

$$\Pi_A = (X - \lambda) P$$

$P$  a pour racines les autres vp de  $A$

Lemme des Noyaux  $\Rightarrow \mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \lambda) \oplus \text{Ker } P(A)$

"  
W"

W est  $A$ -stable et les vp de

$A|_W$  sont  $\leq |\lambda|$  soit  $\mu$  la plus grande des modules des vp de  $A|_W$

Donc  $\forall \epsilon > 0 \exists \epsilon' > 0$

$$\text{peri } \|A\|_W \leq \epsilon (\mu + \epsilon)$$

Si  $x_0 = v_0 + w$

$$\begin{aligned} A^n x_0 &= \lambda^n v_0 + A^n w \\ &= \lambda^n v_0 + o(|\lambda|^n) \end{aligned}$$

Un petit problème se pose, si  $|\lambda| > 1$  la norme de  $A^n x_0$  va exploser (resp. s'effondrer) si  $|\lambda| < 1$  et il y a risque d'instabilité numérique. Il faut trouver maintenant un procédé pour "renormaliser"  $A^n x_0$  (car  $\lambda$  n'est pas connu a priori!) et une possibilité est la suivante :

On choisit  $y^*$  une forme linéaire auxiliaire,  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  et on pose

$$x_{k+1} = \frac{A \cdot x_k}{y^*(A \cdot x_k)} \quad \text{si bien sûr } y^*(A \cdot x_k) \neq 0.$$

Lemme:  $x_m = \frac{A^n x_0}{y^*(A^n x_0)}$  pour  $m \geq 1$ , ~~mais alors~~  
 si  $(x_k)_{k=1}^m$  est bien défini

Preuve:  $x_{k+1} \propto A \cdot x_k$  donc  $x_m \propto A^n x_0$

$\alpha = \text{proportionnel}$

De plus  $y^* x_{k+1} = 1$  par construction pour  $k \geq 1$ .

Corollaire  $\left[ \begin{array}{l} \text{Supposons } \text{Ker}(y^*) \cap \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\} \text{ (en particulier } \text{Ker}(A - \lambda I_n) = 1) \\ \text{Si } (x_k)_{k=1}^m \text{ est bien défini et } x_0 \notin W \text{ alors } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{vers un vecteur propre non nul de } A \text{ de valeur propre } \lambda. \end{array} \right]$

Preuve:  $x_0 = v_0 + w$

$$A^n x_0 = \lambda^n v_0 + o(|\lambda|^n)$$

donc

$$y^*(A^n x_0) = \lambda^n y^*(v_0) + o(|\lambda|^n). \text{ D'où } \neq 0 \text{ le résultat.}$$

Théorème: Soit  $A$  une matrice ayant une vp simple sauf si en module avec autres valeurs propres.

Soit  $y^*$  une forme linéaire ne s'annulant pas sur  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$  pour tout  $x_0 \in U$  le suite:  $x_{k+1} = \frac{Ax_k}{y^*(Ax_k)}$

converge vers un vp non nul de  $A$  de valeur propre  $\lambda$ .

Preuve: L'analyse précédente montre que la convergence à lieu sauf si

$$x_0 \in W \quad \text{ou} \quad y^*(A^n x_0) = 0 \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$y^*(A^n x_0) = 0 \iff {}^t A^n (y^*) (x_0) = 0$$

Donc si  $x_0 \notin F = W \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}({}^t A^m (y^*))$  il y a convergence vers  $v \in$

- il est certain que  $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \cap \text{Ker}(y^*) \cap F = \emptyset$  car  $A^n x = \lambda^n x$  si  $x \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

- Soit  $v_0 \in \text{Ker}(A - \lambda) \setminus \text{Ker}(y^*)$

On veut montrer  $B(v_0, \varepsilon) \cap F = \emptyset$  pour  $\varepsilon > 0$  petit

$$x = v + w \quad \|w\| < \varepsilon.$$

$$A^n x = \lambda^n v + A^n w \quad \|w\|, \|v\| \leq \varepsilon$$

$$\|A^n w\| \leq \delta \varepsilon (\mu + \delta)^n \quad \text{pour } \mu + \delta < |\lambda|.$$

$$\text{et } |y^*(A^n x)| = |y^*(A^n v)| + |y^*(A^n w)| \leq \varepsilon + \delta \varepsilon (\mu + \delta)^n.$$

Si  $C\varepsilon < |y^*(v_0)|$  on a donc  $|y^*(A^n(v_0 + x))| \neq 0 \quad \forall n \geq 0$   
et  $A^n(v_0 + x) \notin W$ .

Donc si  $\varepsilon > 0$  assez petit  $B(v_0, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ .

Donc  $U = C^n F$  est un voisinage de  $\lambda$

- la démonstration que  $U$  est ouvert (et  $F$  fermé) n'est pas compliquée mais un peu longue.  
Elle peut être sautée.

### b) Méthode de Jacobi

Elle est adaptée au calcul des valeurs propres des matrices symétriques réelles.

Lemme: Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$

Supposons  $a_{12} \neq 0$ . Existe  $\theta$  telle que la matrice de rotation  $\Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  vérifie  ${}^t \Omega A \Omega$  est symétrique diagonale.

De plus on peut calculer  $\theta$  explicitement avec l'aide de fonction trigonométriques inverses et d'extraction de racine carrées.

Preuve: diagonalisation des matrici sym. en base orthogonale

Pour le cas de  $\lambda$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det[A - \lambda I_2] = X^2 - (a_{11} + a_{22})X + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$

les up sont  $\lambda_{\pm} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ . Reste à chercher les vecteurs propres.

$$A - \lambda_{+} I_2 = \begin{bmatrix} \frac{a_{11} - a_{22} - \sqrt{\Delta}}{2} & a_{12} \\ a_{12} & \frac{a_{22} - a_{11} - \sqrt{\Delta}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_{+} I_2) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{a_{11} - a_{22} - \sqrt{\Delta}}{2} \cos \theta + a_{12} \sin \theta = 0$$

$$\iff \tan \theta = -\frac{a_{22} - a_{11} + \sqrt{\Delta}}{2a_{12}} \quad \square.$$

Noter que  $\Omega \in SO(2) = SU(2) \cap M_2(\mathbb{R})$  et donc  ${}^t \Omega = \Omega^{-1}$  donc

$$D = {}^t \Omega A \Omega = \Omega^{-1} A \Omega.$$

SRA

Méthode de Jacobi classique

Soit  $A \in S_m(\mathbb{R})$  on choisit  $p < q$  telle que  $|a_{p,q}| = \max_{1 \leq i < j \leq m} |a_{ij}|$

on extrait le bloc  $p, q$   $\begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix}$  et on note  $\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$

où  $\theta$  est comme dans le lemme puis

$$A_1 = {}^t \Omega_1 A \Omega_1.$$

Noter que on fait une opération de base  $e_1, \dots, e_n \rightarrow e_1, \dots, e_p, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q, \dots$  et donc que  $(A_1)_{ij} = A_{ij}$  sauf si  $i, j \in \{p+1, \dots, q\}$ .

Puis on itère en posant

$$A_{k+1} = {}^t \Omega_k A \Omega_k.$$

Par définition, ceci constitue la méthode de Jacobi classique.

Analogue de la méthode

Lemme:  $A_k = {}^t \Omega A \Omega$

où  $\Omega \in SO(n)$  vérifie

$$\Omega = \Omega_{k-1} \Omega_{k-2} \dots \Omega_1$$

Donc  $A_k$  est semblable à  $A$ .

Posons  $A_k = D_k + R_k$        $D_k = \begin{pmatrix} (A_k)_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & (A_k)_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix}$  la matrice diagonale extraite de  $A_k$

Definiton Pour  $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice on pose

$$\|M\|_{HS}^2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2} \quad HS = Hilbert-Schmidt$$

Lemme:  $\|M\|_{HS}^2 = \text{tr}({}^t \bar{M} M)$

Preuve:  $AB_{ii} = \sum_k a_{ik} b_{ki} \quad B = M {}^t \bar{M} = A$   
 $m_{ij} = b_{ij} \quad a_{ij} = \overline{m_{ji}}$

$${}^t \bar{M} M_{ii} = \sum_{k=1}^n \overline{m_{ki}} m_{ki} = \sum_{k=1}^n |m_{ki}|^2$$

$$\text{tr}({}^t \bar{M} M) = \sum_{i,k} |m_{ki}|^2.$$

Lemme:  $\|R_{k+1}\|_{HS}^2 \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \|R_k\|_{HS}^2$

Preuve: Des éléments diagonaux de  $A_{k+1}$  seuls le  $(p,p)$  et le  $(q,q)$  sont modifiés  
De plus si  $(A)_{[pq]}$  est le bloc  $2 \times 2$  défini par l'intersection des lignes  $(p,q)$  et des colonnes  $(p,q)$

$$(A_{k+1})_{(p,q)} = {}^t \Omega (A_k)_{(p,q)} \Omega_{(p,q)}$$

Car  $\|{}^t \Omega A \Omega\|_{HS}^2 = \text{tr}({}^t \Omega {}^t A \Omega {}^t \Omega A \Omega) = \text{tr}(A^* A) = \|A\|_{HS}^2$

$$\|(A_{k+1})_{pp}^{1/2} + (A_{k+1})_{qq}^{1/2}\|^2 = \|(A_{k+1})_{p,q}\|^2 = \|(A_k)_{p,q}\|_{HS}^2 = |a_{kp}|_{pp}^2 + |a_{kq}|_{qq}^2 + 2 |a_{kp}|_{pq}^2$$

$$\text{Donc } \|D_{k+1}\|_{HS}^2 = \|D_k\|_{HS}^2 + 2|(A_k)_{pq}|^2$$

puis

$$\|R_{k+1}\|_{HS}^2 = \|A_{k+1}\|_{HS}^2 \Rightarrow \|D_{k+1}\|_{HS}^2 = \|A\|_{HS}^2 + \|D_k\|_{HS}^2$$

verifié

$$\begin{aligned} \|R_{k+1}\|_{HS}^2 &= \sum_{p,q} |(A_{k+1})_{pq}|^2 = \|R_k\|_{HS}^2 - 2|(A_k)_{pq}|^2 \\ &= 2 \left( \sum_{i < j} |(A_k)_{ij}|^2 - |(A_k)_{pq}|^2 \right) \\ &\leq 2 \left( 1 - \frac{2}{n(n-1)} \right) \sum_{i < j} |(A_k)_{ij}|^2 \quad \text{car } |(A_k)_{pq}|^2 \geq |(A_k)_{ij}|^2 \\ &\leq 1 - \frac{2}{n(n-1)} |(A_k)_{pq}|^2 \geq \sum_{i < j} |(A_k)_{ij}|^2 \end{aligned}$$

Corollaire  $(A_k)_{ij} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{n(n-1)} 0$  si  $i \neq j$

Synthèse:

Théorème la matrice suite de matrices  $(A_k)$  converge vers une matrice diagonale semblable à  $A$ .

Preuve: •  $A_m = {}^t \Omega'_m A_m \Omega_m$   $\Omega'_m \in SO(n)$

$${}^t \Omega'_m \Omega_m = I_n \text{ donc } \| \Omega'_m \|_{HS}^2 = n$$

et  $(\Omega'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée donc a une valeur d'adhérence  $\Omega^* \in SO(n)$

car  $SO(n)$  est fermé soit  $\Omega^*$  une val. d'adhérence de  $\Omega'_m$  on a

$$A = {}^t \Omega^* \Delta \Omega^*$$

Mais  $\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  donc  $\Delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $\Delta$  diagonale et semblable à  $A$ .

- il n'y a qu'un nombre fini de telles  $\Delta$  et donc il n'y a qu'un nombre fini de val. d'adhérence pour  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . de plus

$$\|A_{k+1} - A_k\|_{HS}^2 \approx |(A_k)_{pq}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

La convergence de  $(A_k)$  résulte de :

Lemme Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de réels vérifie

$$(1) x_{k+1} - x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(2)  $x_n \leq z_+$   $\exists$   $z_+$  telle que  $z_+$  soit 2 val. d'adhérence

alors  $[z_-, z_+]$  n'est pas dans  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Preuve:  $\xrightarrow{\text{à démontrer}}$

## méthode QR

Cette méthode est très peu usitée. Elle fonctionnera généralement bien pour des matrices quelconques et aussi bien que la décomposition des matrices symétriques.

$$A_0 \in GL_n(\mathbb{C}) \quad A_0 = Q_0 R_0$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} A_1 = R_0 Q_0 \quad A_1 = Q_1 R_1$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} A_2 = R_1 Q_1 \dots \text{etc}$$

Lemme:  $A_k$  est semblable à  $A_0$  par une matrice semelle

$$\begin{aligned} \text{En effet } A_{k+1} &= Q_k^* A_k Q_k \\ &= (Q_1 \cdots Q_k)^* A_0 (Q_1 \cdots Q_k) \end{aligned}$$

On admettra le théorème suivant (cf références pour une preuve)

$$\text{Posons } A_k = L_k + \Delta_k + U_k \quad \begin{array}{l} L_k = \text{triangulaire inf.} \\ U_k = \text{sup} \end{array} \quad \Delta_k = \text{diagonale}$$

Thm

$$\text{Si } A \in GL_n(\mathbb{C}) \quad L_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \Delta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{avec}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  val. propres de  $A$  avec multiplicités dans les cas suivants:

a) les vp  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  de  $A$  vérifient  $|\lambda_1| < \dots < |\lambda_m|$

b)  $A$  hermitienne définie positive.

Rém 1) Pas de convergence de  $U_k$  en général à l'énoncé du

2) il n'y a pas connu de contreexemple au théorème étendu aux matrices quelconques (ni de preuve de cet énoncé).