Séries entières - Formules de Cauchy

M. Kourganoff, M. Bouljihad

Exercice 1 (Principe des zéros isolés)**.** 1. Soit f une série entière $\sum a_n z^n$ (centrée en 0). On suppose qu'il existe une suite $x_n \longrightarrow 0$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = 0$. Montrer que f est nulle sur tout son disque de convergence.

2. Application : Trouver toutes les fonctions f analytique sur $\mathbf{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on ait $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$.

1. Montrer que pour tout $0 < r < \mathcal{R}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} \, \mathrm{d}\theta \quad \textit{(formule de Cauchy).}$$

2. Montrer que si f est bornée de rayon de convergence infini, alors elle est constante.
3. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet une racine.
4. On suppose que f a rayon de convergence infini. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
5. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que f se prolonge en une fonction continue sur le disque unité fermé et que

$$\exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \exists \theta > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \alpha + \theta] \quad f(e^{it}) = 0.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 3 (Les fonctions entières sont analytiques)**.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On note $r = R - |z_0|$. Montrer que f est développable en une série entière centrée en z_0 de rayon de convergence $\geq r$.

Exercice 4 (Principe du maximum)**.** Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence R. On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) *local* en $a \in D(0, R)$ si $|f|$ admet un maximum (resp. minimum) local en a.

1. On suppose f non constante, montrer que f n'admet ni maximum local, ni minimum local non nul.
2. En déduire une nouvelle preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 5. 1. Soit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$, prouver que pour toute fonction g continue sur $\partial D_1(0)$
on a

$$\overline{\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{g}(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

2. Soit P un polynôme complexe, $z_0 \in \mathbf{C}$, $r > 0$. Montrer que

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \overline{P}(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i r^2 \overline{P'}(z_0).$$

Exercice 6. Montrer que

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

où $\int_0^\infty$ s'interprète comme $\lim_{R\to\infty} \int_0^R$.
Indication : considérer le domaine $D_R = \left\{ re^{i\theta} \in \mathbf{C} \,\middle|\, 0 \leq r \leq R \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.

Exercice 7 (Lemme de Schwarz)**.** Soit f une fonction holomorphe dans le disque ouvert D de centre 0 et de rayon 1, telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall z \in D \quad |f(z)| \leq 1$$

1. Montrer que $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout z appartenant à D. Montrer que $|f'(0)| \leq 1$.
2. On suppose qu'il existe un élément non nul z_0 de D vérifiant $|f(z_0)| = |z_0|$, ou que $|f'(0)| = 1$. Montrer qu'il existe un nombre complexe a de module 1 tel que $f(z) = az$ pour tout z appartenant à D.