Holomorphie - Equations de Cauchy-Riemann

M. Kourganoff, M. Bouljihad

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe C^1, et déterminer ses points de $\mathbf{C}$-dérivabilité.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe définie sur une ouvert connexe Ω.

a) Montrer que f est constante si l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :
   i) $f(\Omega) \subset \mathbf{R}$,
   ii) $f(\Omega) \subset i\mathbf{R}$,
   iii) $|f|$ est constant.

b) Soient f, g deux fonctions holomorphes. On suppose que g ne s'annule pas sur Ω et $f(z)\overline{g}(z) \in \mathbf{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f = cg$.

c) On définit les opérateurs différentiels

$$\partial := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

   i) Montrer que g est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} g = 0$. Montrer que si g est holomorphe, alors $\partial g = g'$.
   ii) Montrer que $\overline{\partial} g = \overline{\partial \overline{g}}$.
   iii) Montrer que $\partial\overline{\partial} = \overline{\partial}\partial = \frac{1}{4}\Delta$, où Δ est le laplacien *complexe* : $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$, lorsque g est deux fois différentiable.
   iv) Montrer que $\overline{\partial}\partial(g\overline{h}) = g' \cdot \overline{h'}$. En déduire que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions holomorphes sur Ω (deux fois différentiables) telles que $\sum |f_j|^2$ est constant, alors toutes les f_j sont localement constantes.

Exercice 3. On suppose Ω connexe. Déterminer toutes les fonctions $f = u + iv$ telles que $g = u^2 + iv^2$ soit holomorphe.

Exercice 4.

1. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann en polaire s'écrivent $f'_r + \frac{i}{r} f'_\theta = 0$.
2. Soit P un polynôme non constant, supposé sans zéro. On pose alors $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{P(re^{i\theta})}$. Montrer que $I'(r) = 0$. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 5. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe D. Si on a

$$a\, u(x, y) + b\, v(x, y) = c \text{ dans } D,$$

a, b et c étant constantes réelles non toutes nulles. Montrer que $f(z)$ est constante dans D.

Exercice 6. Soit D un convexe dans le plan, et soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans D. Montrer que pour tout couple $a, b \in D$, on peut trouver deux points c et d sur le segment joignant a et b, tels que l'on ait

$$f(a) - f(b) = (a - b)(\Re\text{é}\,(f'(c)) + i\,\Im\text{m}\,(f'(d))).$$

Exercice 7.

Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, où u et v sont des fonctions réelles. Montrer que u et v sont des polynômes si et seulement s'il existe $a_{hk} \in \mathbf{C}$ tels que

$$f(z) = \sum_{h,k} a_{hk} z^h \overline{z}^k.$$

Montrer que f est holomorphe si et seulement si $a_{hk} = 0$ lorsque $k > 0$.

Exercice 8. Soit f une fonction complexe de variable complexe $z = x + iy$. On note par P la somme de segments $[a,b] + i[c,d]$ (donc P est un rectangle), et on l'oriente dans le sens horaire. On suppose que f soit continue sur P.

a) Définir l'intégrale curviligne

$$\int_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

b) Montrer que s'il existe une fonction continue $F : \partial P \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z) & \text{sur les segments horizontaux,} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(z) = if(z) & \text{sur les segments verticaux,} \end{cases}$$

alors $\int_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

c) Montrer que pour tout rectangle P dans $\mathbf{C}$ et tout $z \notin \partial P$, on a

$$\begin{cases} \int_{\partial P} \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = 2\pi i & \text{si } z \in P - \partial P \\ \int_{\partial P} \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = 0 & \text{si } z \notin P. \end{cases}$$