ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON.
L3 ANALYSE COMPLEXE 2013-2014.
PARTIEL DU 12 NOVEMBRE 2013.
DURÉE: 2 HEURES.

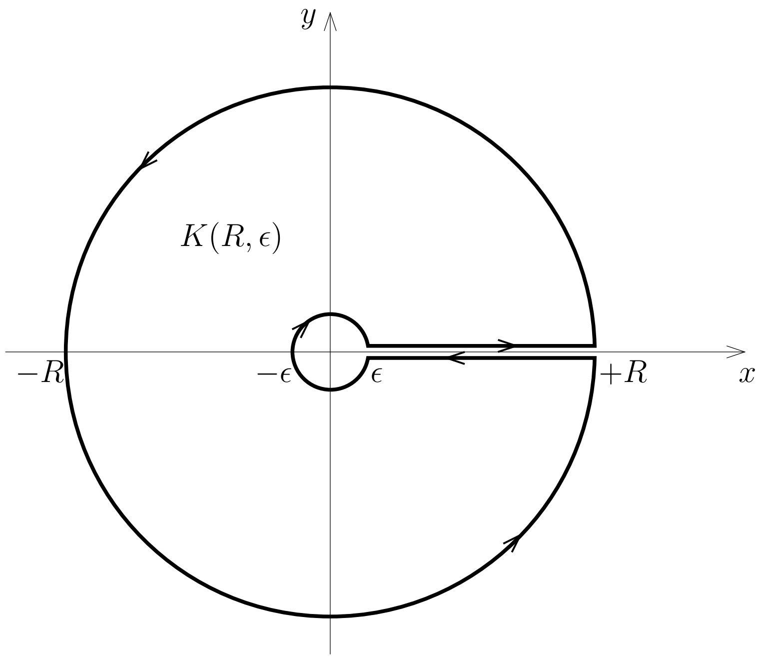
Les réponses données doivent être soigneusement justifiées.
Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones portables interdits.
Tourner la page. Le sujet se poursuit au verso.

Notation: $D(0,r)$ désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon $r \in \mathbb{R}_{>0}$ dans le plan complexe.

Exercice 1. *Justifier la convergence de et calculer l'intégrale*

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

en utilisant le contour:



Exercice 2. *On considère la série formelle* $\phi(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X^{2^n}$.

(1) *Montrer que le rayon de convergence de* ϕ *est* 1. *On notera* f *sa somme.*

(2) *Établir l'équation fonctionnelle*

$$\forall z \in D(0,1) \ f(z^2) = f(z) - z.$$

(3) *Montrer qu'il n'existe pas d'ouvert U connexe contenant strictement $D(0,1)$ avec une fonction $f^U \in \mathcal{O}(U)$ se restreignant à f sur $D(0,1)$.*

Indication: On pourra considérer le comportement de f sur les rayons de $D(0,1)$ faisant un angle $\frac{2k\pi}{2^m}$ avec l'axe des abscisses où $k, m \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle de degré* $\deg(f) = \deg(P) - \deg(Q)$ *($P, Q \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0\}$ sont deux polynômes). On suppose que f n'a que des pôles simples $a_1, \ldots, a_q \notin \mathbb{Z}$ de résidus respectifs $b_1, \ldots b_q$.*

(1) *Montrer que la fonction* $(z \mapsto \mathrm{cotg}(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)})$ *est méromorphe. Déterminer ses pôles et ses résidus.*

(2) *Désignons par K_n le carré enveloppe convexe de ses 4 sommets $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm (n+\frac{1}{2})i$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que:*

$$\forall z \in \partial K_n, \ |\mathrm{cotg}(\pi z)| \leq M.$$

(3) *Montrer que, si* $\deg(f) \leq -2$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial K_n} f(z)\mathrm{cotg}(\pi z) dz = 0.$$

(4) *Montrer sous cette hypothèse que:*

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = -\sum_{k=1}^{q} b_k \pi \mathrm{cotg}(\pi a_k).$$

(5) *Calculer* $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{1+p^2}$.

(6) *Supposons maintenant* $\deg(f) = -1$. *En choisissant $c \in \mathbb{C}$ convenablement et en considérant la fonction $g(z) = f(z) - \frac{c}{z}$ montrer qu'existe et calculer la limite suivante:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} f(p).$$

(7) *Soit $x \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. Calculer:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} \frac{1}{x-p}.$$