ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON.
L3 ANALYSE COMPLEXE 2013-2014.
PARTIEL DU 12 NOVEMBRE 2013.
DURÉE: 2 HEURES.

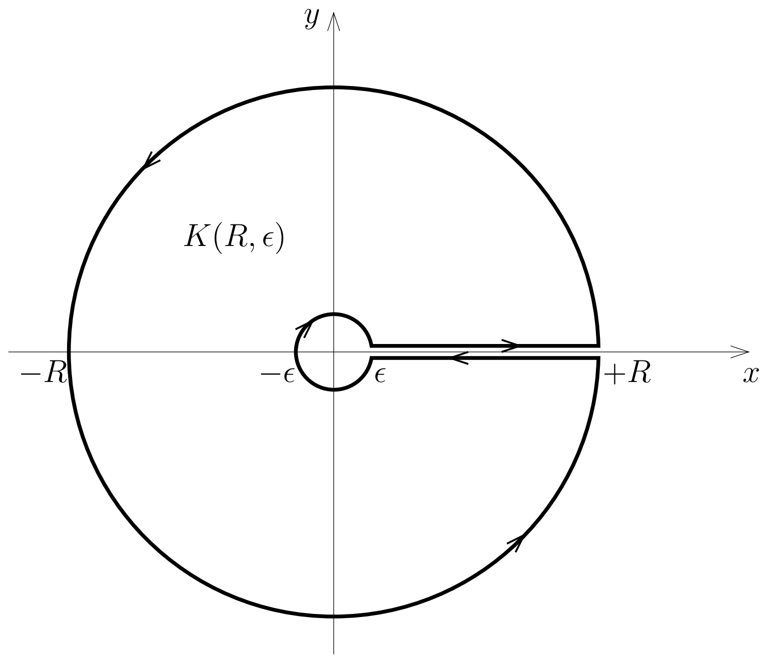
Les réponses données doivent être soigneusement justifiées.
Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones portables interdits.
Tourner la page. Le sujet se poursuit au verso.

Notation: $D(0, r)$ désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon $r \in \mathbb{R}_{>0}$ dans le plan complexe.

Exercice 1. *Justifier la convergence de et calculer l'intégrale*

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

en utilisant le contour:



Exercice 2. *On considère la série formelle* $\phi(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X^{2^n}$.

(1) *Montrer que le rayon de convergence de* ϕ *est* 1. *On notera* f *sa somme.*

(2) *Établir l'équation fonctionnelle*

$$\forall z \in D(0,1) \;\; f(z^2) = f(z) - z.$$

(3) *Montrer qu'il n'existe pas d'ouvert U connexe contenant strictement $D(0,1)$ avec une fonction $f^U \in \mathcal{O}(U)$ se restreignant à f sur $D(0,1)$.*

Indication: On pourra considérer le comportement de f sur les rayons de $D(0,1)$ faisant un angle $\frac{2k\pi}{2^m}$ avec l'axe des abscisses où $k, m \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle de degré $\deg(f) = \deg(P) - \deg(Q)$ ($P, Q \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ sont deux polynômes). On suppose que f n'a que des pôles simples $a_1, \ldots, a_q \notin \mathbb{Z}$ de résidus respectifs $b_1, \ldots b_q$.*

(1) *Montrer que la fonction $(z \mapsto \text{cotg}(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)})$ est méromorphe. Déterminer ses pôles et ses résidus.*

(2) *Désignons par K_n le carré enveloppe convexe de ses 4 sommets $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm (n+\frac{1}{2})i$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que:*

$$\forall z \in \partial K_n, \;\; |\text{cotg}(\pi z)| \leq M.$$

(3) *Montrer que, si $\deg(f) \leq -2$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial K_n} f(z)\text{cotg}(\pi z) dz = 0.$$

(4) *Montrer, sous cette hypothèse que:*

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = -\sum_{k=1}^{q} b_k \pi \text{cotg}(\pi a_k).$$

(5) *Calculer* $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{1+p^2}$.

(6) *Supposons maintenant $\deg(f) = -1$. En choisissant $c \in \mathbb{C}$ convenablement et en considérant la fonction $g(z) = f(z) - \frac{c}{z}$ montrer qu'existe et calculer la limite suivante:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n \leq p \leq n} f(p).$$

(7) *Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Calculer:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n \leq p \leq n} \frac{1}{x-p}.$$

Exercice 1

La convergence de l'integrale est standard.

La fonction $(z \mapsto \frac{1}{\sqrt{z}(1+z^2)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ses pôles sont en $\pm i$.

Par le theoreme des residus

$$\int_{K(R,\epsilon} \frac{dz}{\sqrt{z}(1+z^2)} = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i))$$

pour $\epsilon < 1 < R$. Pour obtenir ceci on modifie le contour d'integration en remplaçant les deux segments $[\epsilon, R]$ parcourus en sens inverse par les segments $e^{\pm i\theta}[\epsilon, R]$, on ne parcourt les deux cercles que pour des angles dans $[\theta, 2\pi - \theta]$ de façon à ce que le contour soit le bord d'un contour régulier contenu dans le domaine de f, on applique la formule des résidus et on prend la limite quand $\theta \to 0$.

On a $\int_{K(R,\epsilon} * = \int_{|z|=R} * + \int_{|z|=\epsilon} * + 2\int_\epsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ et les deux integrales sur les cercles convergent vers 0 quand $\epsilon, R \to \infty$ comme on le voit sans peine.

Donc $2I = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i))$.

$Res(f,i) = \frac{1}{\sqrt{i}(i+i)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}$.

$Res(f,-i) = \frac{1}{\sqrt{-i}(-i-i)} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{-2i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i}$.

$I = \pi\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = \pi\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

1)Pour $\psi = \sum a_n X^n$ $1/RC(\psi) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Pour ψ $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ si n est une puissance de 2 0 sinon. Ainsi $1/RC(\phi) = 1$.

2) On a $\phi(X^2) = \phi(X) - X$ et $\phi(X^2)$ a aussi rayon de convergence 1. L'equation fonctionnelle s'ensuit en passant a la somme.

3) Il est clair que, si $x \in [0,1]$, $\mathbb{R} \ni f(x) \geq \sum_{k=0}^n x^{2^k}$ et $\liminf_{x\to 1^-} f(x) \geq n+1$ puis $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

S'il y a un U comme dans l'énoncé $1 \notin U$ sinon la précedente limite serait finie par contnuité de F^U.

Comme $f(e^{2ik\pi/2^m}z) = f(z) + P(z)$ où P est un polynôme de degré $\leq 2^{m-1}$ il suit que f n'a pas de limite le long des rayons prescrits puis que U ne doit contenir aucun point de la forme $e^{2ik\pi/2^m}$. Comme U est un ouvert, il ne peut contenir de point de module 1. Comme U est connexe $U = D(0,1)$ (sinon il y aurait un point de module ≥ 1 et le long d'un chemin de U le joignant a un point de $D(0,1)$ et par le theoreme des valeurs intermediaires il y aurait un point de module 1 dans U).

Exercice 3

1) comme quotient de fonctions holomorphes non nulles $z \mapsto \mathrm{cotg}(\pi z)$ est méromorphe. Ses poles sont contenus dans les zeros de $\sin(\pi z)$ qui sont les entiers. Comme ces zeros sont simples et qu'aux entiers $\cos(\pi z)$ vaut ± 1 les poles de $\mathrm{cotg}(\pi z)$ sont simples. On voit aisement que le residu en 0 est $\frac{1}{\pi}$. Par 1-periodicite le residu a tout entier est $\frac{1}{\pi}$.

2) Comme $1+\mathrm{cotg}^2(\pi z) = \frac{1}{\sin^2 \pi z}$ il suffit de montrer que $\exists m > 0 \forall n \ \inf_{\partial K_n} |\sin(\pi z)| \leq m$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, $\sin(\pm(n+1/2)\pi i y) = (-1)^n \cos(iy) = (-1)^n \mathrm{ch}(y)$ est en module ≥ 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \pi(n+1/2)i) = 1/2i.(e^{\pi(n+1/2)}e^{-ix} + e^{-\pi(n+1/2)}$ est en module $\geq 1/2(e^{\pi(n+1/2)} - e^{-\pi(n+1/2)}) \geq \mathrm{sh}(\pi/2) > 0$.

On a une estimation similaire pour $\sin(x - \pi(n+1/2)i)$.

L'estimation voulue est donc établie.

3) Bien sur on suppose que $\sqrt{2}(n+1/2) > \max|a_k|$ de sorte que les poles de g sont a l'interieur du carré K_n.

L'integrand est $\leq C/n^2$ et le perimetre est $4n+4$ donc $\epsilon_n := \int_{\partial K_n} f(z)\text{cotg}(\pi z)dz = O(1/n)$.

4) Les poles de $\text{cotg}(\pi z)f(z)$ sont $\mathbb{Z} \cup \{a_1, \ldots, a_q\}$.

Par la formule des residus:

$$\epsilon_n = 2\pi i(\sum_{p=-n}^{n} Res(f(z)\text{cotg}(\pi z), p) + \sum_{k=1}^{q} Res(f(z)\text{cotg}(\pi z), a_k).$$

Pour z pres de p on a $f(z)\text{cotg}(\pi z) = f(p)/\pi(z-p)+O(1)$. Donc $Res(f(z)\text{cotg}(\pi z), p) = f(p)/\pi$.

De meme $Res(f(z)\text{cotg}(\pi z), a_k) = b_k \text{cotg}(\pi a_k)$.

La famille $(f(p))_{p\in\mathbb{Z}}$ étant sommable (absolument convergente), un passage a la limite donne le resultat demandé.

5) Les poles de $1/(1+z^2)$ sont en $\pm i$. Le residu b_1 en $a_1 = i$ est $1/2i$. Le residu b_2 en $a_2 = -i$ est $-1/2i$.

Donc $\sum_{p\in\mathbb{Z}} 1/1+p^2 = -\pi(1/2i\text{cotg}(\pi i) - 1/2i\text{cotg}(-\pi i)) = i\pi\text{cotg}(\pi i)$.

$\cos(\pi i) = \text{ch}(\pi)$. $\sin(\pi i) = e^{-\pi} - e^{\pi}/2i = i\text{sh}(\pi)$.

Enfin $\sum_{p\in\mathbb{Z}} 1/1+p^2 = \pi\coth(\pi)$ et $\sum_{p=1}^{\infty} 1/1+p^2 = \frac{1}{2}(\pi\coth(\pi) - 1)$.

6) On pose $c = \lim_{z\to\infty} zf(z)$. $g(z) = f(z)-c/z$ est alors de degre 2 et $\int_{\partial K_n} g(z)\text{cotg}(\pi z)dz \to 0$ par la question 3).

Comme $\int_{\partial K_n} \text{cotg}(\pi z)\frac{dz}{z} = 0$ (les cotés opposés s'annullent) il suit que $\eta_n := \int_{\partial K_n} f(z)\text{cotg}(\pi z)dz \to 0$.

La formule des residus donne alors comme en 4):

$$\eta_n = \sum_{n\leq p\leq -n} f(p)/\pi + \sum_{k} b_k \text{cotg}(\pi a_k)$$

et le resultat de 4) subsiste.

7) $f(z) = 1/(x-z)$ a seul pole simple x de residu -1. La limite cherchée vaut donc $\pi\text{cotg}(\pi x)$.