ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON.
L3 ANALYSE COMPLEXE 2013-2014.
DEVOIR DE CONTROLE CONTINU DU 02 DÉCEMBRE 2013.

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées. Le problème comporte 3 parties fortement dépendantes entre elles et utilise le théorème de changement de variable pour les intégrales doubles et la formule de Green-Riemann dont on rappelle l'énoncé:

Théorème 1. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact régulier et $\alpha = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe C^1 définie sur un voisinage de K. Alors:*

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial K} \alpha.$$

Notations

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \le r < R \le +\infty$ on note:

$$\begin{aligned} D(z_0, R) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}, \\ \bar{D}(z_0, R) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le R\}, \\ A(r, R) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}. \end{aligned}$$

Pour une partie K de $\mathbb{C}$ on note $K^c = \mathbb{C} \setminus K$. En particulier $\bar{D}(0, r)^c = A(r, +\infty)$ est l'extérieur du disque $\{|z| \le r\}$.

Partie 1

(1) Redémontrer à l'aide du théorème 1 le théorème de Cauchy qu'une fonction holomorphe f de classe C^1 et définie sur un voisinage d'un compact régulier K vérifie $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$.

(2) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe injective. Montrer que l'image de U est un ouvert dont l'aire $\mathcal{A} := \mathcal{A}(f(U))$ est donnée par:

$$\mathcal{A} = \iint_U |f'(x + iy)|^2 dxdy.$$

(3) Soit $f \in \mathcal{O}(A(r, R))$ injective. Exprimer $\mathcal{A}(f(A(r, R)))$ en fonction des coefficients du développement de f en série de Laurent.

(4) Soit K un compact régulier. Montrer que:

$$\mathcal{A}(K \setminus \partial K) = \int_{\partial K} xdy = -\int_{\partial K} ydx = \int_{\partial K} \frac{i}{2} z d\bar{z} = -\int_{\partial K} \frac{i}{2} \bar{z} dz$$

Partie 2

On appelle $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions holomorphes f injectives sur $\bar{D}(0, 1)^c$ telles que $f(z) = z + B + g(z^{-1})$ où $B \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{O}(D(0, 1))$ vérifie $g(0) = 0$.

On note $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{U}$ telles que $0 \notin f(\bar{D}(0, 1)^c)$.

(1) Soit $f \in \mathcal{O}(\bar{D}(0, r)^c)$ telle que f est injective et $f(z) = P(z) + g(z^{-1})$ où $P \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme et g est une fonction holomorphe sur $D(0, \frac{1}{r})$ telle que $g(0) = 0$.

   (a) Montrer que P est une fonction affine et donc que $P(z) = cz + c_0$.

(b) Montrer que pour $+\infty > R > r$, $K_R := f(\bar{D}(0,R)^c)^c$ est un compact régulier dont on déterminera le bord.

(c) Notons $g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$. Montrer que l'aire de K_R est donnée par:

$$\mathcal{A}(K_R) = \pi(|c|^2 R^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k|c_k|^2}{R^{2k}}).$$

On supposera désormais $r = 1$ et $c = 1$, c'est à dire $f \in \mathcal{U}$.

(2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k|c_k|^2 \leq 1$.

(3) Montrer que $|c_1| \leq 1$ et étudier le cas d'égalité. Montrer que dans ce cas $f(\bar{D}(0,1)^c)^c$ est un segment de longueur 4.

(4) Montrer que

$$\forall z \in \bar{D}(0,1)^c \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|^2}}.$$

Indication: après majoration brutale de $|f'(z)|$ où $f'(z)$ est représentée comme une somme de série entière de la variable $1/z$, on cherchera comment utiliser (2).

(5) Dans quel cas l'inégalité (4) est-elle une égalité en $z = \rho\epsilon$ avec $|\epsilon| = 1$ et $\rho > 1$? Déterminer alors $f(\bar{D}(0,1)^c)^c$.

(6) Montrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions dans $\mathcal{U}$ telles que $f_1(\bar{D}(0,1)^c) = f_2(\bar{D}(0,1)^c)$ on a $f_1 = f_2$.

Indication: il pourra être utile de considérer la fonction $\frac{1}{f(z^{-1})}$.

(7) En déduire que, pour $f \in \mathcal{U}$, si $f(\bar{D}(0,1)^c)$ est symétrique par rapport à un point du plan complexe, ce point a pour affixe le nombre complexe B.

(8) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{U}'$ il existe une unique fonction f^* dans $\mathcal{U}'$ telle que $f^*(z)^2 = f(z^2)$. On notera symboliquement $f^*(z) = \sqrt{f(z^2)}$.

(9) En appliquant (6) à f^* montrer que si $f \in \mathcal{U}'$ on a $|B| \leq 2$.

(10) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{U}$ si $Q \in \partial f(\bar{D}(0,1)^c) = \overline{f(\bar{D}(0,1)^c)} \cap \overline{f(\bar{D}(0,1)^c)^c}$ on a $|B - Q| \leq 2$.

Partie 3

On appelle $\mathcal{U}^*$ l'ensemble des fonctions holomorphes f injectives sur $\bar{D}(0,1)$ telles que $f'(0) = 1$.

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{U}^*$ et $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ on a $|a_2| \leq 2$.

(2) Montrer que dans la question précédente l'égalité est atteinte pour les seules fonctions de la forme $f(z) = \frac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que si $f \in \mathcal{U}^*$, $f(D(0,1))$ contient le disque de centre 0 et de rayon 1/4 (Théorème de distortion de Koebe).

Indication: si $z_0 \notin f(D(0,1))$ on pourra considérer la fonction $e(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{z_0}}$.