ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
L3 ANALYSE COMPLEXE 2013-2014
DEVOIR DE CONTROLE CONTINU 1, OCTOBRE 2013

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées. Des coquilles pouvant être présentes dans l'énoncé, n'hésitez pas en cas de doute à adresser une question à philippe.eyssidieux@ujf-grenoble.fr.

Problème

(1) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U. Soit $\bar{D} = \bar{D}(z_0, r)$ un disque fermé contenu dans U dont l'intérieur sera noté D. Montrer que

$$\forall z \in D \quad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{k+1}}.$$

(2) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux d'image $I = \gamma([0,1])$ et $\phi : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $(z \mapsto \int_\gamma \phi(t) \frac{dt}{t-z})$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash I$.

(3) Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U convergeant uniformément sur les compacts de U. Montrer que la limite de (f_n) est holomorphe et que pour tout k un entier positif la suite $(f_n^{(k)})$ des dérivées k-èmes converge uniformément sur les compacts.

(4) Soient (a_n) (b_n) deux suites de nombres complexes. Posons:

$$A_{m,p} = \sum_{n=m}^{n=p} a_n \quad S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{n=m'} a_n b_n.$$

Montrer que

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{n=m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'}.$$

(5) Soient $\alpha < \beta$ deux nombres réels, $z \in \mathbb{C}$ et $x = \Re\mathrm{e}\,(z)$. Montrer que

$$|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}| \leq |\frac{z}{x}|(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}).$$

On pourra utiliser la relation $e^{-\alpha z} - e^{-\beta z} = z \int_\alpha^\beta e^{-tz} dt$.

(6) Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels tendant vers $+\infty$. Montrer que, si la série $f(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z}$ converge pour $z = z_0$, elle converge uniformément dans tout domaine $A(z_0, \alpha)$ de la forme $\{\Re\mathrm{e}\,(z - z_0) \geq 0, \ |\arg(z - z_0)| \leq \alpha\}$ pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Indication: on se ramènera à $z_0 = 0$. Ensuite on étudiera le critère de Cauchy pour la série $f(z)$ en utilisant la question (4) avec $b_n = e^{-\lambda_n z}$.

(7) Déduire que $f(z)$ tend vers $f(z_0)$ quand $z \to z_0$ en restant dans le domaine $A(z_0, \alpha)$.

(8) On appelle $\rho(f) = \inf\{\Re\mathrm{e}\,(z_0) | f(z_0) \text{ converge.}\} \in [-\infty, +\infty]$ l'abscisse de convergence de $f(z)$. Montrer que la série $f(z)$ converge sur $\{\Re\mathrm{e}\,(z) > \rho(f)\}$ et y définit une fonction holomorphe qu'on notera encore f.

(9) Supposons que $\rho(f) < +\infty$. Étudier la limite de $e^{\lambda_0 x} f(x)$ quand $x \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$. Déduire que la fonction $(z \to f(z))$ est nulle si et seulement si la suite (a_n) est nulle.

(10) Supposons dans cette question seulement que $a_n \geq 0$. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ tel que f converge pour $\Re\mathrm{e}\,(z) > \rho$ et que la fonction f qu'elle définit sur ce demi plan peut être prolongée holomorphiquement à un voisinage de $z = \rho$.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ telle que f est holomorphe sur le disque $D(1 + \rho, 1 + \epsilon)$. Calculer les coefficients de Taylor de f en $1 + \rho$. En utilisant la représentation de $f(\rho - \epsilon')$ pour $\epsilon' < \epsilon$ comme une somme de la série de Taylor de f en $1 + \rho$, montrer que $f(z)$ converge en $z_0 = \rho - \epsilon'$.

(11) Restreignons désormais notre attention au cas des séries de Dirichlet classiques où $\lambda_n = \log(n)$. Montrer que si (a_n) est bornée $\rho(f) \leq 1$. Puis que si les sommes partielles $A_{m,p} = \sum_{n=p}^{n=m} a_n$ sont bornées (i.e.: $\sup_{m,p} |A_{m,p}| < +\infty$) on a $\rho(f) \leq 0$ (Indication: utiliser la méthode de la question (4)).

(12) Supposons que $a_n = \psi(n)$ avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ bornée et multiplicative, c.à.d. $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$. Montrer que $\rho(f) \leq 1$ et que pour tout s tel que $\Re\mathrm{e}\,(s) > 1$ $f(s) = \prod_{p \in P} (1 - \frac{\psi(p)}{p^s})^{-1}$, P désignant l'ensemble des nombres premiers [1].

(13) Si $a_n = 1$ la fonction f se note ζ. On a $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. En utilisant la représentation

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} t^{-s} dt,$$

qu'on justifiera, montrer que $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$ où ϕ est holomorphe sur le demi-plan $\Re\mathrm{e}\,(s) > 0$.

(14) Montrer que ζ se prolonge à une fonction méromorphe sur le demi-plan $\Re\mathrm{e}\,(s) > 0$ ayant un pôle simple en 1.

(15) Établir qu'il existe une branche du logarithme de ζ tel que $\log(\zeta(s)) = \sum_{k \geq 1, p \in P} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{ks}}$ pour $\Re\mathrm{e}\,(s) > 1$. En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$

$$\sum_{p \in P} p^{-\alpha} \sim \log(\frac{1}{\alpha - 1}) \text{ quand } \alpha \to 1^+.$$

Établir également que $\sum_{k \geq 2, p \in P} p^{-k\alpha} < +\infty$.

(16) Soit m un entier strictement positif. Un caractère modulo m est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ des inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^*$. Soit χ un tel caractère

[1] Dans la théorie des séries de Dirichlet, la variable complexe se note s par tradition.

modulo m et $\bar{\chi}$ son extension à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ obtenue en posant $\bar{\chi}(\bar{k}) = 0$ si $k \notin (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. Montrer que la fonction $(\mathbb{N} \to \mathbb{C}, k \mapsto \bar{\chi}(k \mod m))$ définit une fonction multiplicative bornée qu'on notera également χ par abus de langage.

(17) On pose $L(s,\chi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Montrer que, si $\chi \not\equiv 1$, $\rho(L(\ .\ ,\chi)) \leq 0$. Montrer que si $\Re\mathrm{e}\,(s) > 1$
$$L(s,\chi) = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

(18) Montrer que $L(s,1) = \zeta(s) \prod_{p|m, p\in P} (1-p^{-s})$ et que $\rho(L(\ .\ ,1)) = 1$.

(19) Montrer que les caractères modulo m forment un ensemble fini de cardinal $\phi(m)$, où $\phi(m)$ est l'indicatrice d'Euler de m, c.à.d. le cardinal de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

(20) Soit p un nombre premier ne divisant pas m. Montrer que $\prod_\chi (1-\chi(p)T) = (1-T^{f(p)})^{g(p)}$ où le produit est étendu à tous les caractères modulo m avec $f(p)$ l'ordre de $p \mod m$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ et $g(p) = \phi(m)/f(p)$.

(21) Posons $\zeta_m(s) = \prod_\chi L(s,\chi)$. Montrer que
$$\zeta_m(s) = \prod_{p\nmid m} \frac{1}{(1-p^{-f(p)s})^{g(p)}}$$
est une série de Dirichlet à coefficients positifs d'abscisse de convergence ≤ 1.

(22) Montrer que si il existe $\chi \neq 1$ tel que $L(1,\chi) = 0$ la série de Dirichlet ζ_m a abscisse de convergence ≤ 0 (on pourra utiliser la question (10)).

(23) Montrer que la série de Dirichlet ζ_m diverge à $s = \frac{1}{\phi(m)}$ et conclure que $L(1,\chi) \neq 0$ pour tout caractère $\chi \neq 1$.

(24) Posons $f_\chi(s) = \sum_{p\in P} \frac{\chi(p)}{p^s}$. Montrer que si $\chi \equiv 1$ $f_\chi(\alpha) \sim \log \frac{1}{\alpha-1}$ quand $\alpha \to 1^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(25) Supposons $\chi \not\equiv 1$. En décomposant $\log(L(s,\chi)) = f_\chi(s) + F_\chi(s)$ avec F_χ une série de Dirichlet qu'on déterminera montrer que $f_\chi(\alpha)$ reste borné quand $\alpha \to 1^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(26) Soit a premier avec m et posons $P_a = \{p \in P,\ p \equiv a \mod m\}$. Notons $g_a(s) = \sum_{p\in P_a} \frac{1}{p^s}$. Montrer que
$$g_a(s) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \chi(a)^{-1} f_\chi(s),$$
la somme étant étendue à tous les caractères modulo m.

(27) Montrer que $g_a(\alpha) \sim \frac{1}{\phi(m)} \log \frac{1}{\alpha-1}$ quand $\alpha \to 1^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(28) En déduire que P_a est infini, en d'autres termes que toute progression arithmétique de la forme $a+m\mathbb{Z}$ avec a, m premiers entre eux contient une infinité de nombres premiers (théorème de la progression arithmétique de Dirichlet).