ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON.
L3 ANALYSE COMPLEXE 2012-2013.
PARTIEL DU 07 MARS 2013.
DURÉE: 2 HEURES.

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées.
Documents autorisés. Calculatrices, ordinateurs, téléphones portables interdits.
Tourner la page. Le sujet se poursuit au verso.

La sphère de Riemann sera notée $\mathbb{S}$ où $\mathbb{S} = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}, T)$, T étant la topologie introduite en cours engendrée par les ouverts de $\mathbb{C}$ et les ensembles de la forme $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$.

Exercice 1. *En étudiant* $\int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ *quand* $R \to +\infty$ *démontrer que tout polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré strictement positif a une racine complexe.*

Supposons que P n'a pas de zéro.

Les fonctions P', P étant polynomiales, donc holomorphes, la fonction P'/P est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Par le théorème de Cauchy $\int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 0$.

Par ailleurs $P'(z)/P(z) \sim \deg(P)/z$ quand $z \to \infty$ d'où $\int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \sim 2\pi i \deg(P)$ quand $z \to \infty$.

De la $\deg(P) = 0$.

Par suite un polynome de degré positif a nécessairement un zéro.

Exercice 2. *On se propose de calculer l'intégrale* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$. *Notons*

$$U := \mathbb{C} - \{e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5\pi/4}, e^{7\pi/4}\}.$$

(1) *Montrer que la fonction* $f : z \mapsto \frac{1}{1+z^4}$ *est définie et holomorphe sur* U.
(2) *Donner les termes d'indice négatif du développement en série de Laurent de* f *en* $z = e^{i\pi/4}$, $z = e^{3i\pi/4}$.
(3) *Pour* $R > 2$ *montrer que l'ensemble*

$$K_R := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im(z)} \geq 0,\ |z| \leq R,\ |z - e^{i\pi/4}| \geq 1/2,\ |z - e^{3i\pi/4}| \geq 1/2\}$$

est un compact à bords C^1 *par morceaux. Décrire* ∂K_R *comme une réunion de 4 arcs paramétrés réguliers de classe* C^1. *Indication: un dessin vaut parfois mieux qu'une preuve.*
(4) *Posons* $K'_R := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im(z)} \geq 0,\ |z| \leq R\}$. *Montrer que*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial K'_R} f(z) dz = I.$$

(5) *Calculer* $\int_{\partial\{|z-e^{i\pi/4}|\leq 1/2\}} f(z)dz$.
(6) *Calculer* I.

1) La fonction polynome $g = (z \to 1 + z^4)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ne s'annule qu'en $\{e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5\pi/4}, e^{7\pi/4}\}$. Par suite $f = 1/g$ est holomorphe sur U.

2) Comme $\zeta = e^{i\pi/4}$ est un zéro simple de g il suit que $g(z)/(z - e^{i\pi/4})$ est un polynome ne s'annulant pas en ζ. Donc $z \mapsto (z - e^{i\pi/4})f(z)$ est holomorphe près de ζ. Cette fonction holomorphe étant développable en série entière en ζ, il vient:

$$(z - e^{i\pi/4})f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - e^{i\pi/4})^n.$$

Par unicité du développement en série de Laurent, on a:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} b_n(z - e^{i\pi/4})^n,$$

et le seul terme négatif est $b_{-1}(z - e^{i\pi/4})^{-1}$. On a

$$b_{-1} = \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{(z - e^{i\pi/4})}{f(z)} = \frac{1}{g'(e^{i\pi/4})} = \frac{1}{4e^{3i\pi/4}}.$$

Un calcul similaire montre que le seul terme négatif en $\zeta = e^{3i\pi/4}$ est $c_{-1}(z-e^{3i\pi/4})^{-1}$ avec $c_{-1} = \frac{1}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i\pi/4}}$.

3) Comme il est fermé (défini par inéquations larges) et borné (contenu dans le ddisque de rayon R) K_R est compact. Son bord est composé de 4 arcs dont deux cercles, un segment de droite et un demi cercle. Par suite, il est C^1 par morceaux.

4) $\int_{\partial K'_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}d\theta}{1+R^4e^{i4\theta}}$. Le premier terme tend vers l'intégrale convergente I qd $R \to +\infty$ tandis que le second est en module $\leq \pi R/(R^4 - 1)$ (si $R > 1$). Donc ce second terme tend vers 0 et la conclusion suit.

5) Il n'y a pas d'autre pole que $e^{i\pi/4}$ dans le disque fermé $|z - e^{i\pi/4}| \leq 1/2$ par suite la question 2) donne

$$f(z) = b_{-1}/(z - e^{i\pi/4}) + h(z)$$

où h est holomorphe sur le disque $|z - e^{i\pi/4}| < 1/2 + \epsilon$ où ϵ est petit.

$\int_{\partial\{|z-e^{i\pi/4}|\leq 1/2\}} h(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy.

Donc $\int_{\partial\{|z-e^{i\pi/4}|\leq 1/2\}} f(z)dz = b_{-1} \int_{\partial\{|z-e^{i\pi/4}|\leq 1/2\}} \frac{dz}{z-e^{i\pi/4}} = 2\pi i b_{-1}$.

6) Le théorème de Cauchy donne

$$\int_{\partial K_R} f(z)dz = 0.$$

En faisant attention au fait que les deux cercles centrés aux poles dans bord de K_R sont orientés dans le sens des aiguilles d'une montre tandis que dans 5) ils sont orientés dans le sens trigonométrique qui est l'inverse du précédent on a:

$$\int_{\partial K'_R} f(z)dz = \int_{\partial\{|z-e^{i\pi/4}|\leq 1/2\}} f(z)dz + \int_{\partial\{|z-e^{3i\pi/4}|\leq 1/2\}} f(z)dz = 2\pi i(b_{-1} + c_{-1}).$$

La question 4) fournit $I = 2\pi i(b_{-1} + c_{-1}) = 2\pi i.1/4.(e^{-3i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = \pi/\sqrt{2}$.

Exercice 3. *Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Casorati-Weierstrass admis en cours. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert de centre z_0 et $\Delta^* = \Delta - \{z_0\}$.*

(1) *Soit $f \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ telle que f est bornée. Montrer que f se prolonge à une fonction holomorphe sur Δ.*
(2) *Soit $g \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que a n'est pas valeur d'adhérence de $g(z)$ quand z tend vers z_0. Montrer que $f = \frac{1}{g-a}$ se prolonge à une fonction méromorphe sur Δ qui est holomorphe en z_0.*
(3) *Déduire que si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ vérifie que $\{n < 0 | \ a_n \neq 0\}$ est infini, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(z)$ quand $z \to z_0$ est $\mathbb{S}$ tout entière.*

On peut supposer $z_0 = 0$.

1) f admet le développement $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ ou la série $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ a rayon de convergence positif et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} X^n$ a rayon de convergence infini par le cours.

On a $2\pi i a_{-n} = \int_{|z|=\epsilon} z^{n-1} f(z) dz$ pour $n > 0$ et $\epsilon > 0$ assez petit.

Or cette intégrale est en valeur absolue $\leq \epsilon^n \sup_{|z|=\epsilon} |f(z)|$ qui est plus petit que $M\epsilon^n$ si M est un majorant de $|f|$ qui existe par hypothèse. De là vient que $a_{-n} = 0$ pour $n > 0$ et f est somme d'une série formelle de rayon de convergence positif.

Par suite f se prolonge à une fonction holomorphe en sur Δ.

2) L hypothèse donne que f est une fonction holomorphe bornée sur un disque épointé centré en 0. Elle se prolonge donc à une fonction holomorphe en 0. $S = g^{-1}(a)$ est fermé et discret dans Δ^*.

Mais comme a n'est pas vadh de $g(z)$ quand $z \to 0$, a fortiori il n'existe pas de suite dans S qui converge vers 0. Donc S est un fermé discret de Δ.

Donc f est holomorphe sur $\Delta - S$. En $z_1 \in S$ on a le développement en série entière $g(z) - a = (z-z_1)^N(\alpha_0 + \alpha_1(z-z_1) + \ldots$ avec $N > 0$ et $\alpha_0 \neq 0$. En effet sinon g serait constante sur un disque centré en z_1 donc constante sur Δ par le principe des zéros isolés.

De là vient que $z \to (z-z_1)^N f(z)$ admet une limite finie quand $z \to z_1$ et f se prolonge en z_1 à une fonction méromorphe.

Bilan: f se prolonge bien à une fonction méromorphe sur Δ holomorphe en 0.

3) Supposons que $a \in \mathbb{C}$ n'est pas vadh. Alors (2) permet de prolonger $1/(f-a)$ a une fonction holomorphe en 0. Il est clair que h n'est pas nulle. On a donc $f(z) = a + 1/h(z)$ pour $z \neq 0$. On a $h(z) = z^P h_0(z)$ avec $P \geq 0$ et h_0 holomorphe jamais nulle près de 0. Par suite $1/h_0$ est holomorphe près de 0 et a un développement en série entère $h_0^{-1}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots..$

On déduit le développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=0}^{P-1} \frac{c_0}{z^{n-P}} + \sum_{n\geq 0} d_n z^n$ qui n'a qu'un nombre fini de termes d'indice négatif. Par unicité de ce développement, on obtient une contradiction avec l'hypothèse.

Donc $\mathbb{C}$ est contenu dans l'ensemble des vadh de f. Mais celui ci est un fermé et comme $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathbb{S}$ il suit que ∞ est vadh aussi (la question 1 permet aussi de conclure).

Exercice 4. *Soit U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$.*

(1) *Soient* $f, g \in \mathcal{O}(U)$, $g \not\equiv 0$. *Montrer que la fonction*
$$r := \frac{f}{g} : U - g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C}$$
se prolonge à une fonction méromorphe $\bar{r}$ *sur* U *tout entier.*
(2) *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{M}(U)$ *des fonctions méromorphes sur* U *forme un corps.*
(3) *Le corps* $\mathcal{M}(U)$ *est il algébriquement clos?*
(4) *Soit* $\bar{r} : U \to \mathbb{S}$ *une fonction méromorphe. On suppose que* $\bar{r}^{-1}(\{\infty\})$ *est fini. Montrer que* $\exists f, g \in \mathcal{O}(U)$, $g \not\equiv 0$ *tel que* $\bar{r} = \overline{(\frac{f}{g})}$.
(5) *Soient* a, b, c, d *des nombres complexes tels que* $ad - bc \neq 0$. *Montrer que l'application* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ *définie sur* $\mathbb{C} - \{-d/c\}$[1] *se prolonge à un homéomorphisme de* $\mathbb{S}$.
(6) *Soit* $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *deux polynômes,* $Q \neq 0$. *Montrer que l'application* $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ *définie sur* $\mathbb{C} - Q^{-1}(0)$ *se prolonge à une application continue de* $\mathbb{S}$ *dans* $\mathbb{S}$.
(7) *Montrer que les seules fonctions méromorphes sur* $\mathbb{C}$ *se prolongeant à une application continue de* $\mathbb{S}$ *dans* $\mathbb{S}$ *sont les fonctions de la forme* $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ *avec* P *et* Q *des polynômes.*
(8) *Quelles sont les fonctions de la forme* $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ *qui se prolongent à des homéomorphismes de* $\mathbb{S}$*?*
(9) *(hors barême) Peut on enlever dans la question 4 l'hypothèse que* $\bar{r}^{-1}(\{\infty\})$ *est fini?*

1) Par le principe des zéros isolés $S = g^{-1}(\{0\})$ est discret. Soit $z_0 \in S$. Par le développement en série entière de f et g on a (sauf si $f \equiv 0$ mais ce cas est trivial) $f(z) = (z - z_0)^v \phi(z)$ et $g(z) = (z - z_0)^w \gamma(z)$ où $\phi(z_0) \neq 0$ et $\gamma(z_0) \neq 0$. $\phi/\gamma = \psi$ est holomorphe près de z_0 et donc $r(z) = (z - z_0)^{v-w}\psi(z)$ pour z près de z_0 (mais non égal à z_0).

Si $v \geq w$ r se prolonge à une fonction holomorphe en z_0 qui a fortiori est méromorphe en z_0.

Si $v < w$, en posant $N = w - v$ on voit que $(z - z_0)^N r(z)$ se prolonge à une fonction holomorphe en z_0 donc y a une limite finie. C'est le critère énoncé en cours pour que r se prolonge à une fonction méromorphe sur près de z_1.

L'une de ces alternatives étant réalisée pour chaque $z_0 \in S$ r se prolonge à $\bar{r} \in \mathcal{M}(U)$.

2) Soient f et g deux fonctions méromorphes sur U. L'ensemble S_f des points de U où f a un pole est discret, de même pour g, par suite $S = S_f \cup S_g$ est discret et f et g sont holomorphes sur $U - S$.

Par suite $f + g$ est holomorphe sur $U - S$. Soit $z_0 \in S$ et soit $v \in \mathbb{N}$ tel que $(z - z_0)^v f(z)$ se prolonge a une fonction holomorphe en z_0 (resp. w pour g). En prenant $N = \max(v, w)$ il vient $z \mapsto (z - z_0)^N f(z)$ resp. $z \mapsto (z - z_0)^N g(z)$ se prolonge a une fonction holomorphe en z_0. Par suite $z \mapsto (z - z_0)^N (f(z) + g(z))$ se prolonge a une fonction holomorphe en z_0.

[1] On pose $d/0 = \infty$.

Ainsi $f+g$ (défini comme le prolongé méromorphe de $f+g \in \mathcal{O}(U-S)$) est méromorphe.

De même pour le produit (en posant $N = v + w$).

Les propriétés algébriques (commutativités associativités distributivité neutre pour $+=$ fonction nulle neutre pour $\times=$ fonction constante egale à 1) se vérfient sans peine.

Soit $g \in \mathcal{M}(U)$ not identiquement nulle. Alors par le principe des zéros isol és Z_g est discret dans $U - S_g$ (on utilise la connexité de U! ce n'est pas un corps sinon.) et comme la limite de g en un pole est ∞ il ne s'accumule pas en S_g. De la suit que $S' = S_g \cup Z_g$ est discret dans U. a

$1/g \in \mathcal{O}(U-S)$. Si $z_0 \in S$ vérifie $z_0 \in S_g$ $1/g(z)$ a la limite 0 en z_0 donc $1/g$ se prolonge a une fonction holomorphe en z_0. De même, si $z_0 \in Z_g$ $1/g(z)$ a la limite $\infty \in \mathbb{S}$ en z_0 et $1/g$ se prolonge a une fonction meromorphe en z_0.

Le bilan est que $1/g$ se prolonge bien a une fonction méromorphe sur U qui est l'inverse de g pour la multiplication decrite ci dessus.

Donc $\mathcal{M}(U)$ est bien un corps.

(3) Non. Supposons $0 \in U$. Alors il n'y a pas de fonction méromorphe en 0 vérifiant $f^2(z) = z$. En effet une telle fonction verifierait $[f(z)| = |z|^{1/2}$ en contradiction avec le fait qu'une fonction méromorphe r près de 0 vérifie $r(z) \sim az^q$ quand $z \to 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$.

(4) Soient $z_0, \dots, z_p$ les poles de $\bar{r}$ et $w_0, \dots, w_p$ leurs ordres respectifs. La fonction $z \mapsto \prod_i (z-z_i)_i^w r(z)$ sur $U - \{z_0, \dots, z_p\}$ se prolonge à une fonction holomorphe f sur U et on a bien $r = f/g$ avec $g(z) = \prod_i (z-z_i)_i^w$ qui est une fonction polynomiale.

(5) Par 1) cette fonction se prolonge à une fonction méromorphe sur C. Elle définit donc une application continue de U dans $\mathbb{S}$. Pour voir qu'elle se prolonge à une application continue F de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}$ il suffit de montrer qu'elle a une limite dans $\mathbb{S}$ quand $z \to \infty$.

Mais cette limite est manifestement a/c (ou ∞ si $c = 0$ puisqu'alors $a \neq 0$).

Ceci s'applique aussi à $z \mapsto \frac{dz-b}{az-c}$ qui se prolonge à G.

On a $F \circ G(z) = G \circ F(z) = z$ hors des deux points $z \in \mathbb{C}$ où ce n'est pas bien défini. Par continuité pour tout $z \in \mathbb{S}$ on a $F \circ G(z) = G \circ F(z) = z$ et F et G sont deux bijections réciproques qui sont continues.

Par suite F définit bien un homeomorphisme de $\mathbb{S}$ dans elle-même.

(6) Par la question 1) et par le cours P/Q se prolonge à une application continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{S}$. Il est facile de voir que P/Q a limite finie si $\deg(P) \leq \deg(Q)$ ou ∞ sinon quand $z \to \infty$. Donc P/Q se prolonge par continuité à une application continue de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}$.

(7) Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ se prolongeant à une application continue de $\mathbb{S}$. Alors f a une limite dans $\mathbb{S}$ quand $z \to \infty$. Quitte à remplacer f par $1/f$ (ce qui revient à composer par une application comme en (5)) si cette limite est infinie on suppose que la limite en question est finie. Quitte a remplacer f par $f+1$ (ce qui revient aussi à composer par une application comme en (5)) la limite peut etre supposee non nulle. L'ensemble des poles de f est discret dans $\mathbb{C}$ et ne s'accumule pas en ∞ (sinon la limite précédente serait infinie). Donc cet ensemble de pole est fini.

En appliquant la question (4) et sa preuve on voit qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[z]$ tel que $Qf = g$. Quitte a multiplier Q par z on a de plus que Q a degré positif. Donc $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ a limite ∞ quand $z \to \infty$. Donc $z \to 1/g(1/z)$ qui est holomorphe sur un disque épointé centré en 0 a limite 0 en 0 et donc se prolonge à une fonction holomorphe en 0. Par suite $g(z) \sim az^w$ quand $z \to \infty$ et g est une fonction polynome.

(8) Ce sont les fonctions de type (5) qui correspondent à P et Q de degre inferieur à 1. On suppose bien sur que P et Q n'ont pas de facteur commun c'est a dire qu'il n'ont pas de zéro commun.

On suppose $d = \deg P \geq \deg Q$ (l'autre cas se traitant symétriquement).

Par suite pour $r(z) = 0$ équivaut à $P(z) = 0$ (et $z \in C$). Par injectivité r a un seul zéro qui est l'unique zéro de P. Par suite $P(z) = a(z - z_P)^d$. Par suite $r = a(z - z_P)^d / Q(z)$ avec $Q(z_P) \neq 0$.

Mais par le cours si r est holomorphe injective sur un ouvert de C sa dérivée ne s'annule pas. Donc $d_P = 1$, cqfd.

(9) La réponse est oui. Il suffit de montrer que pour toute ensemble discret $S \subset U$ et toute application $w : S \to \mathbb{N}$ il existe une fonction holomorphe g sur U s'annulant exactement sur S avec un zéro d'ordre $w(s)$ en $s \in S$.

La construction de g est non triviale et requiert des moyens qui ne seront pas abordés en cours.

Il y a des constructions systématiques pour certains U (produits de Blaschke pour $U = \Delta$, autre construction de produit pour $U = \mathbb{C}$) mais pour U général je ne sais pas comment faire sans utiliser d'une façon comme d'une autre l'annulation de cohomologie $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$ par exemple en resolvant des equations de Cauchy Riemann inhomogènes $\bar{\partial} f = g$.

C'est d'ailleurs la réponse positive à (9) qui permet d'identifier $\mathcal{M}(U)$ au corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{O}(U)$ un fait qui est donc moins trivial que certains étudiants ont semblé le penser.