ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
L3 ANALYSE COMPLEXE 2011-2012
EXAMEN DU 11 MAI 2012.
DURÉE: 3 HEURES.

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées.
Documents autorisés. Calculatrices, ordinateurs, téléphones portables interdits.
Le barême indiqué est indicatif. Tourner la page. Le sujet se poursuit au verso.

Exercice 1. *(1 pt) Montrer que la bande*

$$B := \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$$

est un ouvert simplement connexe du plan complexe et donner une représentation conforme.

Exercice 2. *(5 pts) Calculer l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x+1)^2(x+2)} dx.$$

Exercice 3. *(3 pts) Soient $0 < r_1 < r_2$ des réels positifs. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant la couronne $\{z \in \mathbb{C},\ r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. On note pour $r_1 \leq r \leq r_2$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.*

(1) *Soient $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $q > 0$. En appliquant le principe du maximum à $z^p f(z)^q$, montrer que:*

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^p M(r)^q \leq \max(r_1^p M(r_1)^q, r_2^p M(r_2)^q).$$

En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^\alpha M(r) \leq \max(r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)).$$

(2) *Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$ et déduire l'inégalité*

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} M(r_2))^{\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}}.$$

(3) *En déduire que $\log M(r)$ est une fonction convexe de $\log(r) \in [\log(r_1), \log(r_2)]$.*

Problème 1. *(11 pts) Le but du problème est d'établir la relation:*

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

(1) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une famille de fonctions méromorphes sur* $\mathbb{C}$ *telle que pour tout compact* $K \Subset \mathbb{C}$

$$I_K = \{n \in \mathbb{Z} | \ f_n \text{ a un pole dans } K\}$$

est fini et $\sum_{n\notin I_K} f_n$ *est uniformément convergente dans* K.

Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z)$ *converge pour tout* z *hors d'un ensemble discret et que sa somme se prolonge à une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$.

(2) *Montrer que la somme* $\Phi(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ *définit une fonction méromorphe* Φ *sur* $\mathbb{C}$.

(3) *Montrer que* Φ *vérifie* $\Phi(z+1) = \Phi(z)$, $\Phi(-z) = \Phi(z)$ *et déterminer les pôles de* Φ.

(4) *Déterminer le développement en série de Laurent de* Φ *en* 0. *On exprimera le résultat en fonction des valeurs spéciales de la fonction zéta aux nombres entiers positifs pairs, i.e. de*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

(5) *Montrer que* $\Phi(z)$ *tend vers* 0 *quand* $\mathrm{Im}(z)$ *tend vers* $\pm\infty$ *uniformément par rapport à* $\mathrm{Re}(z)$. *Indication on pourra démontrer une inégalité de la forme* $|\Phi(z)| \leq C|\mathrm{Im}(z)|^{-1}$ *avec* $C > 0$ *et* $\mathrm{Im}(z) \geq 1$.

(6) *Montrer que la fonction* $z \mapsto \Phi(z) - (\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2$ *est holomorphe et bornée. Conclure.*

(7) *En déduire les valeurs de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(4)$.