ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
L3 ANALYSE COMPLEXE 2011-2012
EXAMEN DU 11 MAI 2012.
DURÉE: 3 HEURES.

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées.
Documents autorisés. Calculatrices, ordinateurs, téléphones portables interdits.
Le barême indiqué est indicatif. Tourner la page. Le sujet se poursuit au verso.

Exercice 1. *Montrer que la bande*

$$B := \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$$

est un ouvert simplement connexe du plan complexe et donner une représentation conforme.

La bande B est convexe en particulier simplement connexe. Sa représentation conforme est un biholomorphisme $\psi : \Delta \to B$. Considérons l'application $\phi : B \to \mathbb{C}$ $q \mapsto \tau = \exp(\pi i q)$. Elle établit une bijection holomorphe de B sur $H = \{\tau \in \mathbb{C}\ Im(\tau) > 0\}$. L'application $c : \tau \mapsto z = \frac{\tau - i}{\tau + i}$ établit une bijection holomorphe de H sur Δ. Par suite $\psi := \phi^{-1} \circ c^{-1}$ est une représentation conforme de B. Tous calcul effectués:

$$\psi(z) = \frac{1}{i\pi} \log(i\frac{1+z}{1-z}),$$

où log est la détermination standard du logarithme sur H normalisée par $\log(i) = i\pi/2$.

Exercice 2. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x+1)^2(x+2)} dx.$$

On introduit la détermination usuelle du logarithme sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ et on considère la fonction méromorphe $\Psi(z) = \frac{\log^2(z)}{(z+1)^2(z+2)}$. Ses pôles sont $-1, -2$.

On applique le théorème des résidus au contour ∂K formé d'un arc de cercle de rayon $\epsilon \ll 1$ et d'angle $]\delta, 2\pi - \delta[$ parcouru dans le sens antihoraire d'un arc de cercle de rayon $R \gg 1$ et d'angle $]\delta, 2\pi - \delta[$ parcouru dans le sens horaire et des deux droites joignant les points de paramètres δ et $2\pi - \delta$ respectivement.

On obtient:

$$\int_{\partial K} \Psi(z) dz = 2\pi i(Res(\Psi, -1) + Res(\Psi, -2))$$

On vérifie que quand $\epsilon, \delta, 1/R \to 0$ les contributions des arcs de cercles tendent vers 0 tandis que la contribution des deux droites donne:

$$\int_{\partial K} \Psi(z)dz \to -4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x+1)^2(x+2)}dx + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$$

De là puisque les intégrales sont réelles:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x+1)^2(x+2)}dx = -\frac{1}{2}Re(Res(\Psi,-1) + Res(\Psi,-2)).$$

Comme le pole -2 est simple $Res(\Psi,-2) = \Psi(z)(z+2)|_{z=2} = \log^2(-2)/(-1)^2 = (\log(2)+i\pi)^2 = \log^2(2) - \pi^2 + 2i\pi\log(2)$.

Pour le résidu en -1, on pose $x = -1-w$ et on développe $\Psi(-1+w)$ en puissance de w:

$$\Psi(-1+w) = \log^2(-1+w)/w^2(1+w) = w^{-2}(1-w)(i\pi-w)^2+O(1) = -\pi^2 w^{-2}+(\pi^2-2i\pi)w^{-1}+O(1)$$

Puis $Res(\Psi,-1) = \pi^2 - 2i\pi$.

Enfin on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x+1)^2(x+2)}dx = -\frac{\log^2(2)}{2}.$$

Exercice 3. *Soient* $0 < r_1 < r_2$ *des réels positifs. Soit* f *une fonction holomorphe sur un ouvert contenant la couronne* $\{z \in \mathbb{C},\ r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. *On note pour* $r_1 \leq r \leq r_2$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

(1) *Soient* $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. *En appliquant le principe du maximum à* $z^p f(z)^q$, *montrer que:*

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^p M(r)^q \leq \max(r_1^p M(r_1)^q, r_2^p M(r_2)^q).$$

En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^\alpha M(r) \leq \max(r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)).$$

(2) *Montrer qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$ *et déduire l'inégalité*

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} M(r_2))^{\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}}.$$

(3) *En déduire que* $\log M(r)$ *est une fonction convexe de* $\log(r) \in [\log(r_1), \log(r_2)]$.

1) Observons que $\sup_{|z|=r} |z^p f(z)^q| = r^p M(r)^q$. Le principe du maximum implique que $\sup_{r_1 \leq |z| \leq r_2} |z^p f(z)^q| \leq M = \max(\sup_{r_1=|z|} |z^p f(z)^q|, \sup_{r_2=|z|} |z^p f(z)^q|)$. A fortiori, $\sup_{|z|=r} |z^p f(z)^q| \leq M$. Ces inégalités impliquent la relation

$$r^p M(r)^q \leq \max(r_1^p M(r_1)^q, r_2^p M(r_2)^q).$$

Prenons la racine q-ème on obtient $r^\alpha M(r) \leq \max(r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)$ pour $\alpha = p/q$. Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$. La relation pour $\alpha \in \mathbb{R}$ résulte par densité.

2) $\alpha = \frac{\log M(r_1) - \log M(r_2)}{\log(r_2)-\log(r_1)}$ convient. Ceci donne:

$$r^{\frac{\log M(r_1)-\log M(r_2)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} M(r) \leq (r_1^\alpha M(r_1))^{\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} (r_2^\alpha M(r_2))^{\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}}$$

car $\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)} + \frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)} = 1$. On calcule alors:

$$(r_1^\alpha)^{\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}}(r_2^\alpha)^{\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} = e^{\alpha.\log(r_2)\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}+\log(r_1)\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} = e^{\alpha\log(r)} = r^\alpha.$$

D'où en effet:

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}} M(r_2))^{\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}}.$$

3) Le log de la relation est la relation de convexité:

$$\log M(r) \leq \frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)}\log M(r_1) + \frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}\log M(r_2)$$

étant donné que $\log(r) = \log(r_1)\frac{\log(r_2)-\log(r)}{\log(r_2)-\log(r_1)} + \log(r_2)\frac{\log(r)-\log(r_1)}{\log(r_2)-\log(r_1)}$.

En fait, la définition de la convexite de $\log M(r)$ vis a vis de $\log r$ est cette relation avec r_1, r_2 remplacés par r_1', r_2' où $r_1 \leq r_1' \leq r \leq r_2' \leq r_2$ mais les considérations précdentes s'appliquent.

Problème 1. *Le but du problème est d'établir la relation:*

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

(1) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout compact $K \Subset \mathbb{C}$*

$$I_K = \{n \in \mathbb{Z}|\ f_n \text{ a un pole dans } K\}$$

est fini et $\sum_{n\notin I_K} f_n$ est uniformément convergente dans K.

Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z)$ est sommable pour tout z hors d'un ensemble discret et que sa somme se prolonge à une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

(2) *Montrer que la somme $\Phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ définit une fonction méromorphe Φ sur $\mathbb{C}$.*

(3) *Montrer que Φ vérifie $\Phi(z+1) = \Phi(z)$, $\Phi(-z) = \Phi(z)$ et déterminer les pôles de Φ.*

(4) *Déterminer le développement en série de Laurent de Φ en 0. On exprimera le résultat en fonction des valeurs spéciales de la fonction zéta aux nombres entiers pairs, i.e. de*

$$\zeta(2k) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

(5) *Montrer que $\Phi(z)$ tend vers 0 quand $\mathrm{Im}(z)$ tend vers $\pm\infty$ uniformément par rapport à $\mathrm{Re}(z)$. Indication on pourra démontrer une inégalité de la forme $|\Phi(z)| \leq C|\mathrm{Im}(z)|$ avec $C > 0$.*

(6) *Montrer que la fonction $z \mapsto \Phi(z) - (\frac{\pi}{\sin(\pi z)})^2$ est holomorphe et bornée. Conclure.*

(7) *En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.*

1) Par le principe des zéros isolés l'ensemble des poles d'une fonction méromorphe est discret. Si P_n désigne l'ensemble des poles de la fonction, on a $|P_n \cap K| < \infty$ et comme il n'y a qu'un nombre fini de n tel que $P_n \cap K \neq \emptyset$, $\bigcup_n P_n \cap K$ est fini. De là vient que $\bigcup_n P_n$ est discret. A fortiori pour tout ensemble fini $I \subset \mathbb{Z}$, $P_I := \bigcup_{n \notin I} P_n$ est discret et par hypothèse $\sum_{n \notin I} f_n$ est une série de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur les compacts sur $\mathbb{C} - P_I$. Par suite, sa somme définit une fonction holomorphe $\sum_{n \notin I} f_n$ sur $\mathbb{C} - P_I$. Donc $\sum_{n \notin \mathbb{Z}} f_n = \sum_{n \notin I} f_n + \sum_{n \in I} f_n$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} - P_I$. Comme $\bigcap_{I \subset \mathbb{Z}\ fini} P_I = \emptyset$ $\sum_{n \notin \mathbb{Z}} f_n$ définit bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ entier.

2) Il suffit de vérifier le critère énoncé en 1). On peut supposer que K est le disque fermé de rayon R. dans lequel seul sont présents des poles de f_n pour $|n| \leq R$ qui sont donc en nombre fini. Si $|z| \leq R$ et $|n| > R$ on a $|f_n(z)| \leq \frac{1}{(|n|-R)^2}$. Comme la série numérique à termes positifs $\sum_{|n| \geq R+1} \frac{1}{(|n|-R)^2}$ converge, on déduit que $\sum_{|n| \geq R+1} f_n$ converge uniformément sur $\{|z| \leq R\}$. La conclusion recherchée s'ensuit.

3) les poles de Φ sont évidemment contenus dans $\mathbb{Z}$. Comme chaque $n \in Z$ n'apparait comme pole que pour la seule fonction f_n $\sum_{k \neq n} f_k$ est holomorphe près de n et la partie principale de Φ en n est celle de f_n. (La partie principale d'une fonction meromorphe en un pole p est le polynome en $(z-p)^{-1}$ obtenu en supprimant les termes d'indice positif ou nul dans le developpement en serie de Laurent en ce pole). Donc n est bien un pole de Φ car la partie principale de Φ en n est $1/(z-n)^2$.

Périodicité et parité sont triviales.

4) On a $\Phi(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \Phi_0(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{2k} z^{2k}$, car Φ_0 est holomorphe en 0

La formule de Taylor donne que $a_{2k} = \frac{1}{(2k)!} \Phi_0^{(2k)}(0)$.

Si $f(z) = z^{-2}$ on a $f^{(2k)}(z) = (2k+1)! z^{-2-2k}$. Par suite $\Phi_0^{(2k)}(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (2k+1)!(-n)^{-2-2k} = 2(2k+1)!\zeta(2k+2)$. Enfin $a_{2k} = (4k+2)\zeta(2k+2)$.

5) Supposons $Im(z) > 0$.On a $|(z-n)^2| = (n - Re(z))^2 + Im(z)^2$. En coupant la somme en trois parties, l'une correspondant a $n_z \in \mathbb{Z}$ tel que $(Re(z) - n_z) \leq 1/2$ et les autres à $n > n_z$ $n < n_z$ on voit que: $|\Phi(z)| \leq Im(z)^{-2} + 2\sum_{n \in \mathbb{N}} ((1/2+n)^2 + Im(z)^2)$.

Une comparaison serie/integrale evidente donne $\sum_{n \in \mathbb{N}} ((1/2+n)^2 + Im(z)^2) \leq Im(z)^{-2} + \int_{1/2}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + Im(z)^2} = Im(z)^{-2} + Im(z)^{-1} \int_{1/2Im(z)}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \leq Im(z)^{-2} + Im(z)^{-1} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

On a donc obtenu $|\Phi(z)| \leq 3Im(z)^{-2} + \pi Im(z)^{-1}$. Donc $\Phi(z)$ tend vers 0 quand $\mathrm{Im}(z)$ tend vers $+\infty$ uniformément par rapport à $\mathrm{Re}(z)$.

La cas $Im(z) < 0$ découle de la relation évidente $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$.

Il y a hélas une coquille dans l'indication, il faudrait lire " on pourra démontrer une inégalité de la forme $|\Phi(z)| \leq C|\mathrm{Im}(z)|^{-1}$"

6) $\Phi(z)$ et $(\pi/\sin(\pi z))^2$ sont méromorphes paires 1-periodique ont pour poles les entiers et meme partie principale en 0. Il suit que la difference est holomorphe sur $\mathbb{C}$ 1 periodique. Elle est donc uniformement bornee pour $|Im(z)| \leq 1$. De plus $\sin(\pi(z)) \sim 1/2 \exp \pi |Im(z)|$ quand $|Im(z)| \to \infty$ donc cette difference tend vers 0 quand $\mathrm{Im}(z)$ tend vers $\pm\infty$ uniformément par rapport à $\mathrm{Re}(z)$ par 5). Cette difference est en particulier holomorphe bornée. Le théorème de Liouville implique que la difference est constante. La constante est nulle en raison de la limite nulle

quand $\mathrm{Im}(z)$ tend vers $+\infty$. On a bien etabli

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

7) Developpons $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ en z.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 &= \left(\frac{\pi}{\pi z - \pi^3 z^3/6 + \pi^5 z^5/120 + O(z^6)}\right)^2 \\
&= z^{-2}(1 - \pi^2 z^2/6 + \pi^4 z^4/120 + O(z^5))^{-2} \\
&= z^{-2}(1 - 2(-\pi^2 z^2/6 + \pi^4 z^4/120) + 3(-\pi^2 z^2/6)^2 + O(z^5)) \\
&= z^{-2} + \pi^2/3 + \pi^4/15 z^2 + O(z^3)
\end{aligned}$$

Par 4) $2\zeta(2) = \pi^2/3$ et $6\zeta(4) = \pi^4/15$. Ainsi $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$.

Le même argument permet de voir que $\zeta(2k) \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$.